

論 說 報 告

第 29 卷 第 3 號 昭和 15 年 2 月

軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける 圓形曲り梁の研究

正會員 岡 本 舜 三*

内容梗概 軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける圓形曲り梁の静力学上の問題に就いては、既に解法が確立されてゐて、その 1 は最少働の原理による法、その 2 は弾性曲線の微分方程式による法である。本文の前半に於て著者は第 3 の方法として撓角法を圓形曲り梁に擴張し、曲げモーメントと撓角撓度及撓角の間の 2 個の關係式 (23) 及 (27) を誘導し、之を用ふれば比較的簡單に問題を解きうる事を示した。

圓形曲り梁の振動については嚴密なる解法は得られてゐない。僅かに一次振動について Brown の近似式があるのみである。本文の後半に於て著者はその嚴密解を無限級数の形に於て求め、之と近似式とを比較して Brown の式の精度を検討し且二次振動數算定に關する新しき近似解法を興へ、先に得た嚴密解の結果と比較し充分なる精度を興へる事を示した。

目 次

- | | |
|-------------------|--------------|
| 1. 既往の研究と著者の研究の概要 | 4. 逆對稱なる振動 |
| 2. 撓角法公式の擴張 | 5. 一次振動の近似解法 |
| 3. 對稱なる振動 | 6. 二次振動の近似解法 |

1. 既往の研究と著者の研究の概要

曲り梁がその軸線を含む面に垂直なる外力を受ける時は、梁はその方向に撓み且捩れ断面には曲げモーメントと捩モーメントが共におきる。この様な外力のもとにある圓形曲り梁を簡單の爲に圓梁¹⁾と呼ぶことにする。面内に働く外力による變位と、面に垂直なる外力による變位とが互に無關係であることは、基本方程式を作つて見れば明瞭である。之等は 6 個の釣合方程式と 3 個の弾性條件式とよりなつてゐるが、變形が inextensional なる場合には垂面外力の影響を示す 5 個の式と面内外力の影響を示す 4 個の式とは全く無關係になるのである。従つて Kipperscheinung を除いては面内の外力によつて捩や側方撓みを生ずることなく、垂面外力によつて面内の曲げや直壓力を生ずる事はない。

土木建築構造に於ける圓梁の實際上の應用としては風力及地震力を受ける拱橋、張出露臺等があるが、他の部門に於てもこの様な應力状態にあると想像される構造は尠くないであらう。

圓梁の研究は 19 世紀末葉にバネの研究を目的とせる Grashof²⁾ によつて手を染められた。爾來 30 年間は夫々の目的に應じて各個の問題が取扱はれたが 1920 年頃には一應の一般理論が形作られた。この一般理論は、Unold³⁾ 等による弾性曲線の方程式を解く方法と Müller-Breslau⁴⁾ 等による最少働の原理による方法との 2 主流に分つことが出来る。弾性曲線は 6 次線形微分方程式になる。之を境界條件に合せて解く運算はかなり煩瑣であつて、簡單なる載荷の場合でなくては計算は容易でない。

* 東京帝國大學助教

1) 獨逸語では Kreissträger と云ふ。

2) 文獻 1.

3) 文獻 8.

4) 文獻 3.

最少働の原理による解法は、梁の両端に働く曲げモーメント、或は弾性重心に働くと考えらるゝモーメントを不静定量と定め、歪エネルギーが極少になる如く不静定量を決定せんとするものであるが、この原理のもつ普遍性の結果として各種の條件、各種の載荷に對して計算を遂行することが出来る。

従つて實在構造物の様に複雑なる條件のもとにある場合にはこの方法によるより他に方法は無い様に思はれる。しかしながら其の計算が餘りに機械的であるために、各式のもつ物理的意味を諒解するに難く、構造に生じてゐる應力の數値を知り得てもそこに存する通則を見出し難いことは缺點である様に思はれる。

従來行はれた研究方法はすべてこのうちのいずれかに屬せしめることが出来るが、唯一特異なる解法として Marcus⁵⁾ は拱理論における弾性荷重 (Elastische Gewicht) に相當する量を三次元的に彎曲せる棒について導くことに成功したが、原式の誘導にとゞまりその應用例に迄は言及せず、且彼に續いて此の方面に研究を進めた學者は無い様である。圓梁を單なる桁梁理論の一部として研究せるととゞまらず、實際の橋梁設計に應用せんと試みたのは Engesser, Hauranek, Mörsch, 大野, 及 Jakobsen⁶⁾ の諸氏である。そのよつてゐる原理はすべて最少働の原理である。Hauranek は拱に及ぼす對風構の影響も併せ論じ、Mörsch は設計公式を與へ、大野技師は弾性中心を創案することによつて計算を簡易化し、實在橋梁の複雑なる條件を考慮に入れて特に耐震の立場から詳細なる研究を發表され、Jakobsen は最近歐洲に架設された長大徑間の鉄筋コンクリート橋梁について實例を以て計算法を示してゐる。

之等諸學者の研究によつて、最近架設される大拱橋に對しては從來全く顧られなかつた側方の安定が顧慮されるに至り、計算の結果は模型實驗によつて確められた例さへあるに至つたけれども拱橋の断面變化、コンクリートの塑性、支柱及床版の存在等の影響や風力の他に地震力をも考慮せねばならない吾國の特殊事情を顧れば、この問題は未だ研究の端緒にいたばかりであつて、多くの未知の事柄が殘されてゐる様に思はれる。本文は之等の問題解決に資せんがために、圓梁の靜力學及振動について研究し、靜的外力をうける場合の不静定量の算定公式、一次及高次振動週期の嚴密解法、二次振動週期の近似解法等に關する著者の方法を説明せるものである。

直線梁理論を顧みるに、圓梁の場合と同様に最少働原理と弾性方程式とは問題解決の有力なる手段であるが、猶第 3 の方法として撓角撓度法があり連續構造、ラーメン構造の解法に優れたる成果をあげてゐる。著者は圓梁に於てもかくの如き關係が得らるべきことを豫想し、第 2 章に於て撓角撓度法の擴張を試みて新しき公式を導き得たのである。之を用ふれば問題によつては(例へば複合圓形曲り梁)從來の方法よりも簡単に解き得る事と思はれる。

圓梁の振動に就いては、その特別なる場合として閉輪については完全なる解が與へられてゐる。しかし開輪については境界條件に合はせて六次微分方程式を解き六次の行列式より固有値を求むる事は容易でない爲に未だ嚴密なる解法は求められてゐない様である。たゞ一次振動については Brown⁷⁾ は Rayleigh の方法を modify して近似的に振動數を求め、且實驗によつてその精度がかなり良い事を確めた。しかしこの方法は近似値を得べき理論的根據薄く、且嚴密解が知られてゐない以上近似解とは稱するも猶多少の疑問なきを得ない。又支間 200 m、拱矢 50 米にも及ぶ長大拱橋の出現を見る現在に至つては一次振動週期はかなり長くなる事が豫想されるから、地震作用に關聯して應力狀態を研究するには之のみでは充分でなく、高次の振動についても研究する必要があると思はれるのである。

5) 文獻 7.

6) 文獻 5, 6, 9, 23, 26.

7) 文獻 21.

第 3 第 4 兩章に於て著者は積分方程式より出發して、振動判別式として收斂の早い無限級數を導いた。この方法は他の理論に於ても無視される様な微量（例へば 振り慣性抵抗）を無視せる以外には少しも嚴正さを失つてゐないから、高次振動についても振動數を與へることが出来るのである。しかし一般に振動が高次になる程減衰の影響が著しいものであるから、この計算結果が直ちに減衰作用や軸壓力の働く實際の拱橋に適用されると考へる事には疑があり、之等の點については猶研究を要するのである。

第 5 章にて述べる様に Brown の解は著者の與へた嚴密解とよく一致し、優れたる近似解法なる事を示してゐるが、其れは Rayleigh の方法に準じたものであるから高次の振動については適用し得ざるものとされてゐる。しかし後章に説明する理由により、この近似解法の論據は之を二次振動にも適用しうべき事が推定されるので、同じ様な推論から二次振動數を求むべき近似式を導き、之を第 4 章に導ける解と比較してよく一致する事を確かめる事が出来た。

以上は著者の研究の大要であるが結論として次の 3 項に要約する事が出来る。即ち

- 1) 圓形曲り梁の自由振動周期は第 3 章 (73) 式及第 4 章 (95) 式によつて與へられる。
- 2) 一次自由振動週期の決定については Brown の解決は充分なる近似値を與へる。
- 3) 二次自由振動週期の決定については著者の近似式 (103) が充分なる近似値を與へる。

以上述べた研究は圓形断面を持つ圓梁を取扱つたものであるから、I 形梁の様に 振れによつて断面の平面保存の性質が著しく失はれる時には特別の考慮が拂はれねばならない。之については靜的外力をうくる問題については Unold⁸⁾ が、振動問題については Federhofer⁹⁾ が研究し、いつれの場合にも断面寸法に比し曲率が大なる時は著しき影響を及ぼすことを示した。矩形断面に於てはこの影響は餘り著しくはないであらう。しかし長大橋梁に亘り採用される面形断面に就いては振理論と共により深き研究が必要であると思はれる。

既往の代表的文獻及最近諸雜誌に發表された論文は次の如きものである。

1. Grashof; Theorie der Elastizität und Festigkeit. 1878.
2. Rayleigh; Theory of Sound. vol. I. 1894.
3. Müller Breslau; Die neuere Methoden der Festigkeitslehre. 1913.
4. Federhofer; Berechnung des senkrecht zur seiner Ebene belasteten Bogenträger. Z. f. Math. u. Phys. 1914.
5. Hauranek; Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichen Kraftangriff. B. u. E. 1918.
6. Engetzer; Der elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestaltung. Z. f. Bauwesen. 1919.
7. Marcus; Die elastische Linie des doppelt gekrümmter Träger. Z. f. Bauwesen. 1919.
8. Unold; Der Kreisträger. Forschungsarbeiten Heft 255. 1922.
9. Mörsch; Berechnung der Brückengewölbe für Winddruck exzentrische Belastung und einseitige Erwärmung. B. u. E. 1923.
10. Yamada; Träger doppelter Krümmung. Bauingenieur 1923.
11. Yamada; In der Ebene gekrümmte Träger und Rahmensystem mit gekrümmte Riegeln. 九州帝國大學工學部紀要 1926.
12. Hessler; Der nach einem Kreisbogen gekrümmte, beiderseits eingespaunte Eisenbetonträger mit rechteckigem Querschnitt. B. u. E. 1927.
13. Grammel; Die Kipperscheinungen bei elastischen Ringen. Z. A. M. M. 1927.

8) 文獻 8.

9) 文獻 28.

14. 黒田武定; 曲線橋の内力. 土木學會誌第 14 卷第 2 號 1928.
15. 坂 靜雄; 兩端彈性固定の張出曲梁¹⁰⁾, 建築雜誌, 昭和 5 年, 1930.
16. Worch; Beitrag zur ermittlung der Formänderung ebener Stabzüge mit räumlicher Stützung nebst Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter System. B. u. E. 1930.
17. Hessler; Der kontinuierliche, halbkreisförmige gebogene und gleichmäßige belastete Eisenbeonträger mit rechteckigen Querschnitt auf drei und vier gleich weit entfernten Stützen. B. u. E. 1930.
18. 妹澤克維; 振動學. 1932.
19. Schaechterle; Talbrücken der Verbindungsbahn Tuttlingen-Hattingen. B. u. E. 1933.
20. Federhofer; Biegungsschwingungen eines kreisringes bei konstanten aussen oder innen Drücke. Ing. Arch. 1933.
21. Brown; Lateral Vibration of Ringshaped Frames. Jour. Franklin Inst. 1934.
22. 大野 博; 鐵筋コンクリート無絞拱の經濟的並に耐震的設計 (2), 土木試驗所報告第 34 號 1936.
23. Eremin; Windstress in reinforced concrete arch bridges. Trans. A. S. C. E. 1937.
24. Klett; Die Rohrbach brücke bei Stuttgart. B. u. E. 1938.
25. Busemann; Über die Querstabilität des Rohrbachbrücke. B. u. E. 1938.
26. Jakobsen; Winddruck auf Bogenbrücken. B. u. E. 1940.
27. Hartog; Mechanical Vibratien. 1940.
28. Federhofer; Der senkrecht zu seiner Ebene schwingende Kreisbogenträger mit I Querschnitt. Z. A. M. M. 1940.

2. 撓角法公式の擴張

斷面一樣なる圓梁 (半徑 r) に, その軸線を含む平面に垂直なる方向をもつ單位梁長當り F_y なる外力が作用する時には次の釣合方程式が成立する¹¹⁾

$$\frac{dS_y}{d\theta} + rF_y = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dM_x}{d\theta} + T - rS_y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

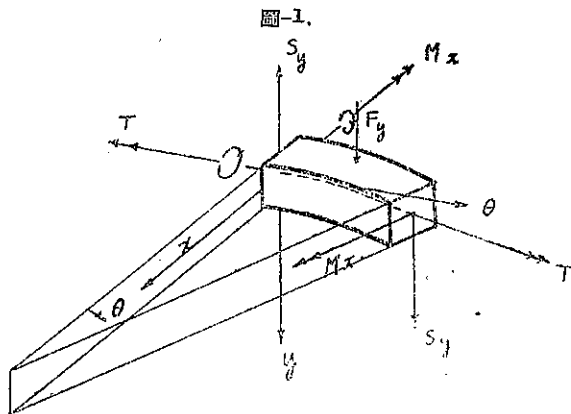
$$\frac{dT}{d\theta} - M_x = 0 \dots\dots\dots(3)$$

茲に v, y, θ 坐標は圖-1 に示す如く右手系にとり
 曲げモーメント M_x , 振りモーメント T , 剪斷力 S_y
 及外力 F_y の方向は矢印を以て示せる向を正とす。
 彈性條件は inextentional であると假定せば次の如くなる。

$$M_x = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} - r\beta \right) \dots\dots\dots(4)$$

$$T = \frac{\mu K}{r^2} \frac{d}{d\theta} (v + r\beta) \dots\dots\dots(5)$$

茲に v は y 軸方向の撓み, β は θ 軸方向の振角を表はし E 及 μ は縦彈性係數及剪斷彈性係數,



10) 古い文獻については坂博士, 兩端彈性固定の張出曲梁參照.

11) 文獻 15 及 Love. Mathematical theory of Elasticity.

I 及 K は部材断面の慣性モーメント及振係数とす。こゝに注意を要することは (5) の關係の成立するのは部材の横斷面が圓形又は之に近い形を持つてゐる場合に 限ることである。 I 形鋼の如き斷面形の場合には最初に平面であつた斷面は振れの爲に起伏を生じ曲面となり、この爲に軸方向の應力を發生し、梁の變形に對して相當に大きな影響を與へる様になる。従つて (5) 式を基本式として導かれる諸々の關係は圓形又は圓形に近い斷面をもつ梁にのみ適用すべきものである。

表-1.

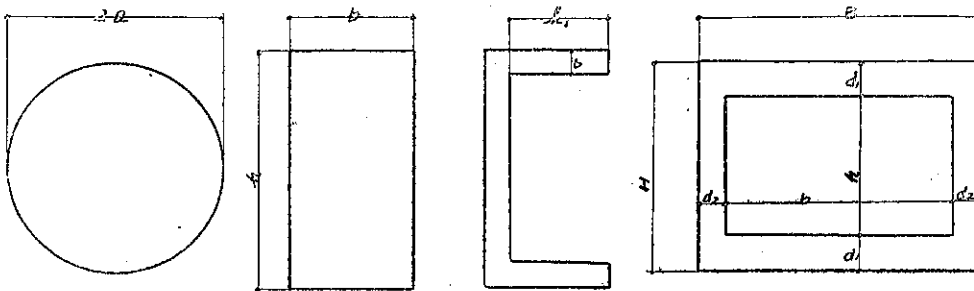
構造用材の E 及 μ の値は表-1 の如くである。

鋼の如き完全弾性に近い性質の材料では弾性係数は一定であるがコンクリートの如き塑性材料に於ては歪は應力に比例せず弾性係数なる語義も不明瞭になる。普通は割線弾性係数を探つて

材 料	E (kg/cm ²)	μ (kg/cm ²)	E/μ
橋梁, 建築用鋼	2.1×10^6	0.81×10^6	2.59
機械用硬鋼	2.2×10^6	0.85×10^6	2.59
鋳 鋼	2.15×10^6	0.83×10^6	2.59
鋳 鐵	1.00×10^6	0.38×10^6	2.63
アルミニウム	0.675×10^6	0.260×10^6	2.60
コンクリート	—	—	2.20

あるがコンクリートに於てはその値は抗壓強度に依つて變化する。しかし許容應力以下に於ては大體一定とみなしてよい様な値を定め得るので便宜上之を一定として計算するのが普通である。土木學會では應力算出の場合には $E=0.14 \times 10^6$ kg/cm²、不靜定力又は弾性變形の計算の場合には $E=0.21 \times 10^6$ kg/cm² と規定してゐる。剪斷弾性係數については實驗の資料も乏しく、その値も材料や決定方法の相違によつて大きな相違を生じてゐるが、實驗の結果によれば E と μ の値は變るも E/μ は大體一定となり 2.2~2.4 となることが認められてゐる。福田博士¹²⁾は「鐵筋コンクリート軸及鐵筋コンクリート軸における剪應力不靜定應力若しくは弾性變形の計算にはすべて弾性體公式を準用すべし。特に不靜定應力若しくは弾性變形の計算に 使用すべきコンクリートの剪斷弾性係數 μ に關してはコンクリートの品質に應じて適當なる値を採用すべし。但前項の場合に於て $E/\mu=2.2$ と假定することを得。」との案を發表して居られるが塑性材料を弾性理論を以て取扱ふ事を承認するならば弾性係數につい

圖-2.



てはこの程度の精度を以て満足するも亦已むを得ない事であらう。斷面の慣性モーメントは圓形斷面にては $I = \frac{\pi}{4} a^4$ 、矩形斷面にては $I = bh^3/12$ であり、斷面の振係數 K は圓形斷面については $K = \pi a^4/2$ ；矩形斷面については $K = \beta bh^3$ 、但し $\beta = \frac{1}{3} \left\{ 1 - 0.63 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{b^4}{h^4} \right) \right\}$ を以て與へらる。 I 形鋼に於ては $K = \frac{\beta}{3} \sum hb^3$ にして、斷面形による係數 β は A. Föppl の實驗的研究によれば \square 形にて 1.12, T 形にて 1.15, I 形にて 1.30 である。又最

12) 福田博士；鐵筋コンクリート理論

近長大橋梁に多く用ひられる函形断面の振係数は $K = \frac{BH+bh}{\frac{1}{Bd_2} + \frac{1}{(H-d_1)d_1}} \div \frac{2}{\frac{1}{Hd_2B^2} + \frac{1}{Bd_1H^2}}$ を以て與へらる。

弾性體の振曲げ問題に於ては $k = EI/\mu K$ なる比が屢々問題になる。このうち E/μ は先に示す如く鋼及コンクリートに於ては一定の値である。鋼に於て 2.59, コンクリートに於て 2.2 として、圓形及矩形断面について k を計算すると次の如くなる。

圓形断面 $k = \frac{E}{2\mu} = \begin{cases} 1.30 & (\text{鋼}) \\ 1.1 & (\text{コンクリート}) \end{cases}$

矩形断面

$h > b$ の時 $k = \frac{h^2 E}{12\beta b^2 \mu} = \begin{cases} \frac{0.216 h^2}{\beta b^2} & (\text{鋼}) \\ \frac{0.18 h^2}{\beta b^2} & (\text{コンクリート}) \end{cases}$

$h < b$ の時 $k = \frac{E}{12\beta \mu} = \begin{cases} \frac{0.216}{\beta} & (\text{鋼}) \\ \frac{0.18}{\beta} & (\text{コンクリート}) \end{cases}$

表-2.

h/b	β	k	
		鋼	コンクリート
1/2	0.229	0.944	0.79
2/3	0.196	1.10	0.92
1	0.141	1.53	1.3
3/2	0.196	2.48	2.1
2	0.229	3.95	3.1
∞	0.333	∞	∞

表-3.

Svinesund 橋の k

拱頂よりの水平距離	k
0	4.18
6.25	4.15
18.75	4.00
31.25	3.72
43.75	3.42
56.25	3.05
68.75	2.74
77.5	2.54

鉄筋コンクリート肋拱橋の實例によれば拱断面の b/h の値は普通 1/2 以上であるから k の範圍は大凡 0.79~3.1 となる (表-2)。又函形断面については Jakobsen¹³⁾ があげてゐる Svinesund 橋 (支間 155 m, 拱矢 40 m) の例によつて大體の様子を察知する事が出来る (表-3)。

以上記述せる所を綜合して考へて見ると特に研究を要する k の範圍は 0.75~4.0 としてよいと思ふ。

再び基本方程式に戻り (2) を微分し (1) と (3) とを代入せば

$$\frac{d^2 M_x}{d\theta^2} + M_x + r^2 T_y = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(3) を代入して

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{dT}{d\theta} + r^2 T_y = 0 \dots\dots\dots (7)$$

13) 文献 26.

(6) に (4) を代入せる式を $d^2/d\theta^2$ し之に (7) に (5) を代入せる式を加算せば

$$\frac{d^4v}{d\theta^4} + 2\frac{d^4v}{d\theta^4} + \frac{d^2v}{d\theta^2} = r^4 \left(\frac{1}{EI} \frac{d^2F_v}{d\theta^2} - \frac{1}{\mu K} F_v \right) \dots\dots\dots(8)$$

又 (6) に (4) を代入せば

$$\frac{EI}{r^4} \left(\frac{d^4v}{d\theta^4} - r \frac{d^2\beta}{d\theta^2} + \frac{d^2v}{d\theta^2} - r\beta \right) = r^2 F_v$$

(3) に (4) 及 (5) を代入せば

$$\frac{\mu K}{r^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + r \frac{d^2\beta}{d\theta^2} \right) + \frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} - r\beta \right) = 0$$

兩式より $d^2\beta/d\theta^2$ を消去せば

$$r \left(1 + \frac{EI}{\mu K} \right) \beta = \frac{d^4v}{d\theta^4} + \left(2 + \frac{EI}{\mu K} \right) \frac{d^2v}{d\theta^2} - \frac{r^4}{EI} F_v \dots\dots\dots(9)$$

(8)(9) 兩式は Federhofer の得た彈性曲線の方方程式である。

部材 AB を考へ (圖-3) A 及 B における曲げモーメント, 捩モーメント, 剪斷力, 撓み, 撓角, 捩角を夫々 $M_A, M_B, T_A, T_B, S_A, S_B, v_A, v_B, \varphi_A, \varphi_B, \beta_A, \beta_B$ を以て表はす。 $\theta=0$ 及 $\theta=\alpha$ にて, $M_x=M_A, M_x=M_B$ なる條件を満足する (6) の解は

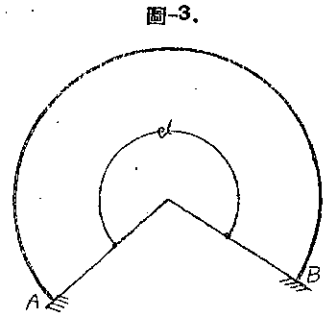


圖-3.

$$\begin{aligned} M_x = & (M_B - M_A \cos \alpha) \operatorname{cosec} \alpha \sin \theta + M_A \cos \theta \\ & + \{ m_{1,\alpha} - m_1 - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha \} \sin \theta \\ & - (m_{2,0} - m_2) \cos \theta \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

茲に m_1 及 m_2 は

$$\left. \begin{aligned} m_1(\theta) &= r^2 \int F_v \cos \theta \, d\theta \\ m_2(\theta) &= r^2 \int F_v \sin \theta \, d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

なる不定積分にして $m_{1,\alpha}, m_{1,0}, m_{2,\alpha}, m_{2,0}$ は夫々 $m_1(\alpha), m_1(0), m_2(\alpha), m_2(0)$ の略である。(10) を (3) に代入して得られる微分方程式を, $\theta=0$ にて $T=T_A$ なる條件のもとに解けば

$$\begin{aligned} T = & T_A + (M_B - M_A \cos \alpha) \operatorname{cosec} \alpha (1 - \cos \theta) + M_A \sin \theta - r(f - f_0) \\ & + \{ m_{1,\alpha} - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha \} (1 - \cos \theta) - m_{1,0} + m_1 \cos \theta + (m_2 - m_{2,0}) \sin \theta \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

茲に f は

$$f(\theta) = r \int F_v \, d\theta \dots\dots\dots(13)$$

なる不定積分にして f_0, f_α は夫々 $f(0)$ 及 $f(\alpha)$ の略である。(12) を (5) に代入し $\theta=0$ にて $v=v_A, \beta=\beta_A$ なる條件のもとに解けば

$$\begin{aligned} \frac{\mu K}{r^2} (v + r\beta) = & \frac{\mu K}{r^2} (v_A + r\beta_A) + \theta T_A + r(\theta f_0 - g + g_0) + (M_B - M_A \cos \alpha) \operatorname{cosec} \alpha (\theta - \sin \theta) \\ & + M_A (1 - \cos \theta) + \{ m_{1,\alpha} - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha \} (\theta - \sin \theta) + m_1 \sin \theta - m_{1,0} \theta - (m_2 - m_{2,0}) \cos \theta \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

茲に g は

$$g = \theta f - r \int F_y \theta d\theta \dots\dots\dots (15)$$

なる不定積分にして g_0, g_a は $g(0), g(\alpha)$ の略である。

(14) に於て $\theta = \alpha, v = v_B, \beta = \beta_B$ とおけば

$$\alpha T_A = \frac{\mu K}{r^2} \{v_B - v_A + r(\beta_B - \beta_A)\} + M_B - M_A - \frac{\alpha}{\sin \alpha} (M_B - M_A \cos \alpha) + L_8 \dots\dots\dots (16)$$

茲に L_8 は

$$L_8 = r^2 \int_0^\alpha F_y \left\{ \alpha - \theta - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \theta) \right\} d\theta \dots\dots\dots (17)$$

同様に

$$\alpha T_B = \frac{\mu K}{r^2} \{v_B - v_A + r(\beta_B - \beta_A)\} + M_B - M_A + \frac{\alpha}{\sin \alpha} (M_A - M_B \cos \alpha) + L_7 \dots\dots\dots (18)$$

茲に L_7 は

$$L_7 = r^2 \int_0^\alpha F_y \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \theta - \theta \right) d\theta \dots\dots\dots (19)$$

(10) を微分せば

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{d\theta} = & (M_B - M_A \cos \alpha) \operatorname{cosec} \alpha \cos \theta - M_A \sin \theta + \{m_{1,\alpha} - m_1 - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha\} \cos \theta \\ & + (m_{2,0} - m_2) \sin \theta \end{aligned}$$

(12) に (16) を代入せば

$$\begin{aligned} T = & r(f_0 - f) + (M_B - M_A \cos \alpha) \operatorname{cosec} \alpha (1 - \cos \theta) + M_A \sin \theta \\ & + \{m_{1,\alpha} - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha\} (1 - \cos \theta) - m_{1,0} + m_1 \cos \theta - (m_{2,0} - m_2) \sin \theta \\ & + \frac{1}{\alpha G} \{v_B - v_A + r(\beta_B - \beta_A)\} + \frac{1}{\alpha} (M_B - M_A) - \frac{1}{\sin \alpha} (M_B - M_A \cos \alpha) + \frac{L_8}{\alpha} \end{aligned}$$

兩式を (2) に代入せば兩端に於ける剪斷力を得。

$$\alpha r S_A = M_B - M_A + \frac{1}{G} \{v_B - v_A + r(\beta_B - \beta_A)\} + L_8 \dots\dots\dots (20)$$

$$\alpha r S_B = M_B - M_A + \frac{1}{G} \{v_B - v_A + r(\beta_B - \beta_A)\} - L_8 \dots\dots\dots (21)$$

従つて部材兩端における曲げモーメントと弾性變形とを知れば任意の位置における曲げモーメント、撓モーメント、剪斷力及兩端における撓モーメント及剪斷力を求めることが出来る。(4) を變形せば

$$M_x = - \frac{EI}{r^2} \left\{ \frac{d^2 v}{d\theta^2} + v - (v + r\beta) \right\}$$

之に (10) 及 (14) を代入せば

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = & v_A + r\beta_A + \frac{\theta}{\alpha} \{v_B - v_A + r(\beta_B - \beta_A)\} + M_B \left\{ \frac{r^2}{\mu K} \frac{\theta}{\alpha} - \left(\frac{r^2}{\mu K} + \frac{r^2}{EI} \right) \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right\} \\ & + M_A \left\{ \frac{r^2}{\mu K} \left(1 - \frac{\theta}{\alpha} \right) - \left(\frac{r^2}{\mu K} + \frac{r^2}{EI} \right) \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \right\} + \frac{r^2}{\mu K} [r(\theta f_0 - g + g_0) \\ & + \{m_{1,\alpha} - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha\} (\theta - \sin \theta) + m_1 \sin \theta - m_{1,0} \theta - (m_{2,0} - m_2) \cos \theta \\ & - \frac{r\theta}{\alpha} (\alpha f_0 - g_a + g_0) - \theta \{m_{1,\alpha} - m_{1,0} - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha\}] \end{aligned}$$

$$-\frac{r^2}{EI} [m_{1,\alpha} - m_1 - (m_{2,\alpha} - m_{2,0}) \cot \alpha] \sin \theta - (m_{2,0} - m_2) \cos \theta] \dots\dots\dots (22)$$

この式の兩邊に $\sin \theta$ を乘じて \int_0^α なる積分を施し

$$\int_0^\alpha \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) \sin \theta \cdot d\theta = \left(\frac{dv}{d\theta} \right) \sin \alpha - v_B \cos \alpha + v_A = r\varphi_A \sin \alpha - v_B \cos \alpha + r_A$$

なる關係を利用すれば次式が得られる。

$$\left\{ \frac{H}{2} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \right) - G \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) \right\} M_B + \left\{ \frac{H}{2} (1 - \alpha \cot \alpha) - G \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \right\} M_A \\ = \frac{\sin \alpha}{\alpha} (v_B - v_A) - r\varphi_B \sin \alpha + \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) r\beta_A + \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) r\beta_B + \frac{H}{2} L_2 + GL_1 \dots\dots\dots (23)$$

茲に L_1, L_2 は

$$L_1 = r^2 \int_0^\alpha F_v \left(\sin \theta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \theta \right) d\theta \dots\dots\dots (24)$$

$$L_2 = r^2 \int_0^\alpha F_v (\alpha \cot \alpha \sin \theta - \theta \cos \theta) d\theta \dots\dots\dots (25)$$

なる荷重のみによつて定まる項にして G 及 H は

$$G = \frac{r^2}{\mu K} \quad H = \frac{r^2}{EI} + \frac{r^2}{\mu K} \dots\dots\dots (26)$$

なる常数である。

同様に (22) の兩邊に $\sin(\alpha - \theta)$ を乘じて \int_0^α なる積分を施せば

$$\left\{ \frac{H}{2} (1 - \alpha \cot \alpha) - G \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \right\} M_B + \left\{ \frac{H}{2} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \right) - G \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) \right\} M_A \\ = \frac{\sin \alpha}{\alpha} (v_A - v_B) + r\varphi_A \sin \alpha + \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) r\beta_A + \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) r\beta_B + \frac{H}{2} L_4 + GL_2 \dots\dots\dots (27)$$

茲に L_2, L_4 は

$$L_2 = r^2 \int_0^\alpha F_v \left\{ \sin(\alpha - \theta) - \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - \theta) \right\} d\theta \dots\dots\dots (28)$$

$$L_4 = r^2 \int_0^\alpha F_v \left\{ \theta \cos(\alpha - \theta) - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \theta \right\} d\theta \dots\dots\dots (29)$$

(23)(27) の兩式は直線梁における撓角撓度公式の圓梁に對する擴張であることは明であるから、之を撓角撓度公式と呼んで差支へないであらう。従つて荷重項 L をあらかじめ計算しておけば、比較的簡單に且その物理的意味を見失ふことなく不靜定量を算出することが出来る。この解法は複合圓よりなる曲り梁、對風構をもつ並列 2 拱の如き連続構造及ラーメン構造の解法に於てその特徴を發揮するであらうと思はれる。特に $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha r \rightarrow l$ なる極限の場合には直線梁となり

$$l(M_A + 2M_B) = 6EI \left\{ -\varphi_B + \frac{1}{l} (v_B - v_A) \right\} - \frac{6}{l} \int_0^l M' x dx \dots\dots\dots (30)$$

$$l(2M_A + M_B) = 6EI \left\{ \varphi_A - \frac{1}{l} (v_B - v_A) \right\} - \frac{6}{l} \int_0^l M' (l-x) dx \dots\dots\dots (31)$$

なる既知の公式となる。又 $\alpha \rightarrow 180^\circ$ なる半圓梁の場合は

$$M_A + M_B = -r^2 \int_0^\pi F_y \sin \theta \, d\theta = 0 \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{4}H - \frac{2}{\pi}G\right)(M_B - M_A) &= -r(\varphi_A + \varphi_B) - \frac{2}{\pi}(v_A - v_B + r(\beta_A - \beta_B)) \\ &+ Gr^3 \int_0^\pi F_y \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta + \frac{Hr^2}{2} \int_0^\pi F_y \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta - \theta \sin \theta\right) d\theta \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

となる。

猶今後屢々繰返される運算を簡単ならしめるために

$$A = \frac{H}{2} \left\{ \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha - i \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$$B = \frac{H}{2} \left\{ 1 - \alpha \cot \alpha - i \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \right\} \dots\dots\dots (35)$$

即ち

$$A + B = \frac{H}{2} (1 - \cos \alpha) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\sin \alpha} - i \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$A - B = \frac{H}{2} (1 + \cos \alpha) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 + i \left(1 - \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{2} \right) \right\} \dots\dots\dots (37)$$

と略記しておく。茲に

$$i = \frac{2G}{H} = \frac{2k}{1+k} \dots\dots\dots (38)$$

であり

$$\frac{H}{2} = \frac{1+k}{2} \cdot \frac{r^2}{EI} \quad G = k \frac{r^2}{EI} \dots\dots\dots (39)$$

である。α の種々の値について A 及 B を計算せば表 4 の如くなる。A 點に於ける $M_A, T_A, v_A, \beta_A, \varphi_A$ 及 B 點における M_B, T_B, S_B を知れば、B 點における撓み v_B 及捩れ角 β_B を求める事が出来る。(20) により

$$v_B + r\beta_B = \{\alpha r S_A - (M_B - M_A) - L_0\} G + v_A + r\beta_A \dots\dots\dots (i)$$

之を (27) に代入すると

$$\begin{aligned} BM_B + AM_A &= r\varphi_A \sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} (v_A + r\beta_A) - r\beta_A \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\alpha} (v_B + r\beta_B) + r\beta_B \\ &= r\varphi_A \sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} (v_A + r\beta_A) - r\beta_A \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\alpha} (v_A + r\beta_A) - G \frac{\sin \alpha}{\alpha} \{\alpha r S_A - (M_B - M_A) \\ &\quad - L_0\} + r\beta_B \\ &= r\varphi_A \sin \alpha - r\beta_A \cos \alpha - G \frac{\sin \alpha}{\alpha} \{\alpha r S_A - M_B + M_A - L_0\} + r\beta_B \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

(i) 及 (ii) より

$$v_B = v_A + r\varphi_A \sin \alpha + r\beta_A (1 - \cos \alpha) + G \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) (\alpha r S_A - M_B + M_A - L_0) - BM_B - AM_A \dots\dots\dots (40)$$

$$r\beta_B = r\beta_A \cos \alpha - r\varphi_A \sin \alpha + G \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha r S_A - M_B + M_A - L_0) + BM_B + AM_A \dots\dots\dots (41)$$

荷重項を整理すると表 5 の如くなる。

表-4.

α	A (係数 $H/2$)	B (係数 $H/2$)
30°	0.1812-0.0889 i	0.0931-0.0451 i
60°	0.7092-0.3270 i	0.3953-0.1730 i
90°	1.5708-0.6366 i	1.0000-0.3634 i
120°	2.9185-0.9135 i	2.2093-0.5865 i
150°	6.1020-1.0570 i	5.5346-0.8090 i
210°	-6.4644-0.7306 i	-5.3485-1.1354 i
240°	-4.3369-0.2933 i	-1.4186-1.2067 i
270°	-4.7124+0.2122 i	1.0000-1.2122 i
300°	-6.5462+0.6654 i	4.0233-1.1654 i
330°	-12.3852+0.9528 i	10.9762-1.0868 i

表-5.

(1) 一般式

$$L_1 = \int_0^\alpha F_y r^2 \left(\sin \theta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \theta \right) d\theta$$

$$L_2 = \int_0^\alpha F_y r^2 \left\{ \sin(\alpha - \theta) - \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - \theta) \right\} d\theta$$

$$L_3 = \int_0^\alpha F_y r^2 (\alpha \cot \alpha \sin \theta - \theta \cos \theta) d\theta$$

$$L_4 = \int_0^\alpha F_y r^2 \left\{ \theta \cos(\alpha - \theta) - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \theta \right\} d\theta$$

$$L_5 = \int_0^\alpha F_y r^2 (\alpha - \theta) d\theta$$

$$L_6 = \int_0^\alpha F_y r^2 \theta d\theta$$

$$L_7 = \int_0^\alpha F_y r^2 \left\{ \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \theta - \theta \right\} d\theta$$

$$L_8 = \int_0^\alpha F_y r^2 \left\{ \alpha - \theta - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \theta) \right\} d\theta$$

(2) $\theta = \xi$ における集中荷重 P による荷重項 (圖-4)

$$L_1 = Pr \left(\sin \xi - \frac{\xi}{\alpha} \sin \alpha \right)$$

$$L_2 = Pr \left\{ \sin(\alpha - \xi) - \frac{\alpha - \xi}{\alpha} \sin \alpha \right\}$$

$$L_3 = Pr (\alpha \cot \alpha \sin \xi - \xi \cos \xi)$$

$$L_4 = Pr \{ \alpha \cot \alpha \sin(\alpha - \xi) - (\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) \}$$

$$L_5 = Pr (\alpha - \xi)$$

$$L_6 = Pr \xi$$

$$L_7 = Pr \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \xi - \xi \right)$$

$$L_8 = Pr \left\{ \alpha - \xi - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \xi) \right\}$$

(3) 全等布荷重 w による荷重項 (圖-5)

$$L_1 = L_2 = wr^2 \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \right)$$

$$L_3 = L_4 = wr^2 (1 - \cos \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$L_5 = L_6 = \frac{wr^2 \alpha^2}{2}$$

$$L_7 = -L_8 = -wr^2 \left\{ \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{\sin \alpha} (1 - \cos \alpha) \right\}$$

圖-4.

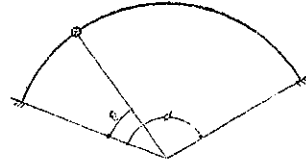


圖-5.

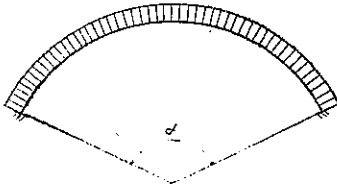
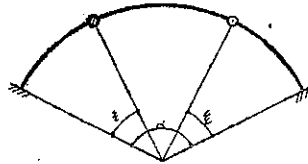


圖-6.



(4) $\theta = \xi$ 及 $\theta = \alpha - \xi$ における逆對稱集中荷重 P による荷重項 (圖-6)

$$L_1 = -L_2 = Pr \left\{ \sin \xi - \sin(\alpha - \xi) + \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - 2\xi) \right\}$$

$$L_3 = -L_4 = Pr \left\{ \alpha \cot \frac{\alpha}{2} \sin \xi - 2\xi \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 2\xi}{2} \right\}$$

$$L_5 = -L_6 = Pr (\alpha - 2\xi)$$

$$L_7 = -L_8 = -Pr \left[\alpha - 2\xi + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \{ \sin \xi - \sin(\alpha - \xi) \} \right]$$

公式の用法を例示する爲に、全等布荷重を受くる場合についてモーメントの分布を調べて見やう。風力又は地震力の作用は等分布荷重と假定されるのが普通であるが、風力の場合は兎も角として地震力の場合には梁が剛性でない以上かなり事實と異なつた假定の様に思はれる。しかし等分布荷重をうける場合の考察は圓梁の性情を知る上に最も基礎的なものであつて、その性質を調べる事は必要なことと思はれる。(27) に全等布荷重に對する荷重項を代入すれば $M_A = M_B$ であるから

$$M_A = \frac{1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \left(2 - \alpha \cot \frac{\alpha}{2} \right) \frac{i}{2}}{1 + \frac{\alpha}{\sin \alpha} - i} wr^2$$

となる。任意の點の曲げモーメントは (10) により

$$M_x = \frac{M_A + wr^2}{\sin \alpha} \{ \sin \theta + \sin(\alpha - \theta) \} - wr^2$$

中央點 C に於ける曲げモーメントは

$$M_c = \frac{M_A + wr^2}{\cos \frac{\alpha}{2}} - wr^2$$

よつて M_x を M_A, M_c を以て表はせば

$$M_x = M_A + \frac{M_c - M_A}{1 - \cos \frac{\alpha}{2}} \left\{ \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right\}$$

となり兩固定端と中央との間の曲げモーメントは θ に關して cosine curve をなして分布してゐる事がわかる (圖-7)。

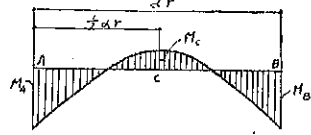
捩モーメントは兩固定端にては (16) によつて

$$T_A = \frac{\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) - 2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha}{\sin \alpha} - i} wr^2$$

中央に於ては 0 となり中間の點に於ては

$$T_\theta = \left(T_A - \frac{\alpha}{2} wr^2 \right) \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) wr^2$$

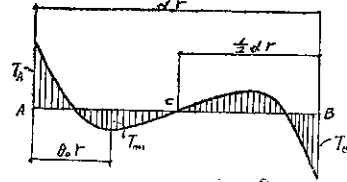
圖-7.



よつて捩モーメントの分布は、兩固定端にて正の最大値を生じ、中央に向ふに従ひて漸減し遂に符號を變じ、1/4 圓弧の附近にて負の極大に達し、中央に至りて 0 となる (圖-8)。負の極大値を生ずる位置は

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta_0 \right) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} - \frac{T_A}{wr^2}}$$

圖-8.



にて與へられ、その値は

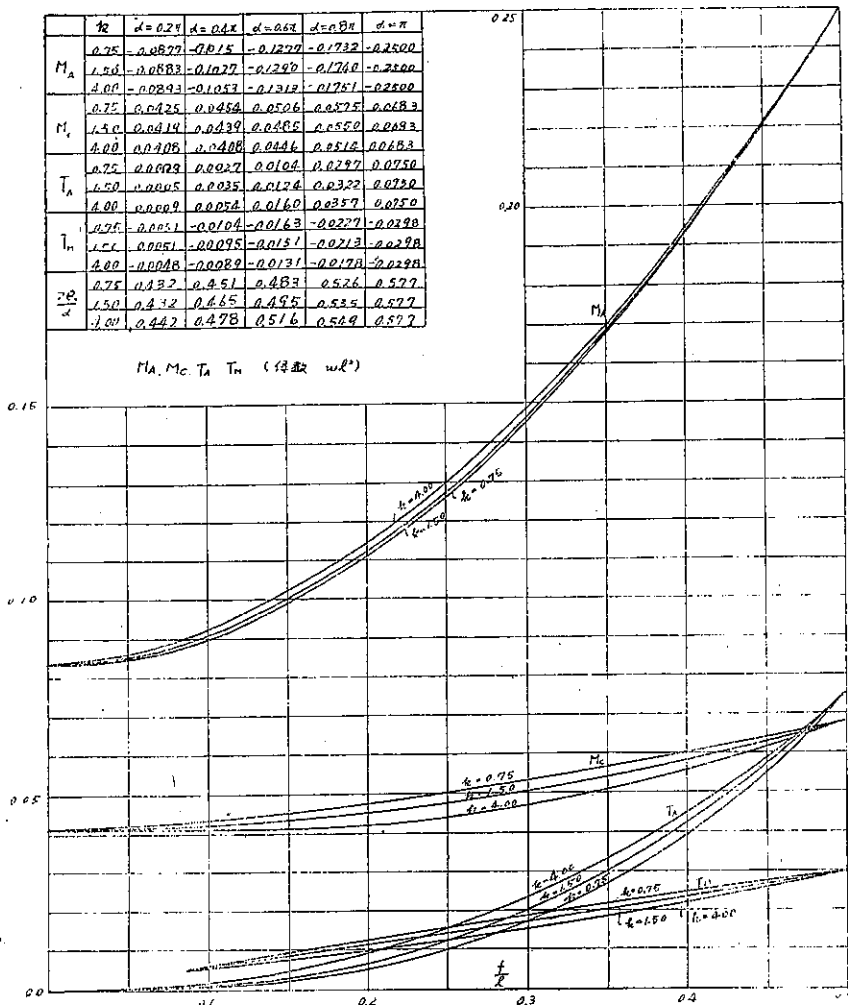
$$T_m = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \theta - \tan \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) \right\} wr^2$$

である。 M_A, M_c, T_A, T_m 及 T_m を生ずる位置を計算せる結果は圖-9 の如くなる。圖-9 は支間 l 挟矢 f なる圓梁における諸モーメントを wl^2 を係數として f/l の函數として表はしたものである。

この表から次の如き圓梁の性質を知ることが出来る。負の最大曲げモーメント M_A は、 f/l が大となると共に増大し、半圓におけるその値は直線梁における場合の 3 倍である。直線梁及半圓に於ては k の影響なく、その中間の曲率の場合は、 k が大となる程 M_A は増大するもその影響は著しくない。正の最大曲げモーメントは M_c であり、 f/l が大となると共に増大し、半圓におけるその値は直線梁における値の 1.64 倍である。 M_c/M_A は f/l が増すと共に減じ、直線梁に於て 1/2、半圓に於て 1/3.66 である。直線梁及半圓に於ては k の影響なく、その中間の曲率の場合は k が小なる程 M_c は大となる。即ち曲げ剛度 EI の増大又は捩剛度 μK の減少は、曲げモーメントを兩端に遷移せしめる傾向があると云ふことが出来る。

兩固定端における捩モーメントは f/l の増大と共に増し、殊に梁形が半圓に近づくると急激に大となる。梁の彎曲が微なるか又は半圓に近い時は k の影響は少いがその中間の曲率の場合には k の増大は T_A を著しく増大せしめる。中央點における捩モーメントは 0 であるが中央と固定端の中間部に負の最大捩モーメントを生ず。その

圖-9.



位置は f/l が 1/4 (約) 以下なる時はや Δ 固定端側により f/l が 1/4 (約) 以上なる時はや Δ 中央側にかたよる。又 k の増大はその位置をや Δ 中央側に移動せしむるもその影響は著しくはない。負の振モーメントの大きさは f/l の増加と共に増し f/l が小なる時は T_A に比し大であるが f/l が 1/4 (約) を超へると T_A より小になり半圓に於ては T_A の約 40% に過ぎない。 k の影響は梁の彎曲微なるか又は半圓に近い時は小であるがその中間の曲率の場合は k の増大は T_m を著しく減少せしめる。即ち曲げ剛度の増大又は振剛度の減少は振モーメントをも亦両端に遷移せしむると言ふことが出来る。

3. 對稱なる振動

彈性曲線 (8) 及 (9) 兩式における荷重 F_v を振動 v による慣性抵抗なりとみなせば減衰作用なく且 θ 及 ω 兩軸方向の rotatory inertia を無視せる場合の振動方程式となる。振動を振幅 u , 振動數 $n/2\pi$ なる單弦運動と假

定せば、棒の單位長さ當り重量が m なる時最大位相時の慣性抵抗は

$$F_y = \frac{m}{g} p^2 u \dots\dots\dots (42)$$

となる。よつて (8) 及 (9) 兩式より撓振幅 u , 振振幅 β に関する方程式として

$$\frac{d^4 u}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{mp^2 r^4}{gEI}\right) \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{mp^2 r^4}{g\mu K} u = 0 \dots\dots\dots (43)$$

$$\left(1 + \frac{EI}{\mu K}\right) r\beta = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(2 + \frac{EI}{\mu K}\right) \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{mp^2 r^4}{gEI} u \dots\dots\dots (44)$$

が得られる、之は Federhofer の得た振動方程式である。

rotatory inertia は無視されるのが普通である。Federhofer の研究によりその影響は圓梁の寸法に比して半徑が小なる程大となるがそれでも猶微少量に過ぎない事が示されてゐる。

(43) を兩端の支持條件に合はせて一般に解くことは煩しく、まして振動判別式は冗長なる行列式となり之を解いて固有値を見出す事は不可能である。

著者は無限級数を用ひてこの問題を取扱ひ、振動曲線の形と振動判別式とを表はすことが出来た。次に之を誘導しやう。

圖-10.

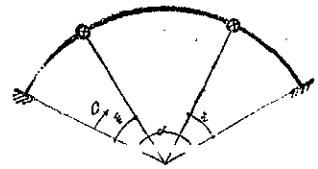


圖-10¹⁴⁾ に示す如く左右對稱なる位置に集中荷重 P が作用する荷重状態 P_y を Fourier 級數に展開すれば¹⁵⁾

$$F_y = \frac{4P}{\alpha r} \sum \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta \quad n=1, 3, 5, \dots\dots\dots (45)$$

となる。但し

$$\gamma = \frac{\pi}{\alpha} \dots\dots\dots (46)$$

この荷重による彈性曲線の方程式は (8) に (45) を代入して

$$\frac{d^4 v}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} = - \frac{4Pr^2}{\alpha EI} \sum ((n^2 \gamma^2 + k) \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta \dots\dots\dots (47)$$

この式の特解を v_0 , 餘函數を v_1 とせば

$$v_0 = \frac{4Pr^2}{\alpha EI} \sum \frac{K_n}{n\gamma^4} \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta \dots\dots\dots (48)$$

茲に K_n は

$$K_n = \frac{n^2 + \frac{k}{\gamma^2}}{n \left(n^2 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2} \quad n=1, 3, 5, \dots\dots\dots (49)$$

なる常數列であつて n の増大と共に $1/n^6$ の order を以つて減少してゆく。種々の α に関する K_n の値は表-6 の如くなる。

對稱形をもつ餘函數は C_1, C_2, C_3 を積分常數とせば次式となる。

$$v_1 = C_1 \{\sin \theta + \sin(\alpha - \theta)\} + C_2 \{\alpha - \theta\} \sin \theta + \theta \sin(\alpha - \theta) + C_3 \dots\dots\dots (50)$$

14) 紙の表から裏に向つて働く力を \otimes , 裏から表に向つて働く力を \odot を以てあらはす。
15) Bleich, Theorie u. Berechnung der Eisernen Brücken, 51 頁.

表-6.

	α			α	
K_1	0.2π	$1.0851+0.04340k$	K_6	0.2π	$0.0080257+0.00001284k$
	0.4π	$1.4172+0.22675k$		0.4π	$0.0080969+0.00005182k$
	0.6π	$2.4414+0.87890k$		0.6π	$0.0082355+0.00011872k$
	0.8π	$7.7161+4.93830k$		0.8π	$0.0084259+0.00021570k$
K_2	0.2π	$0.037368+0.0001611k$	K_7	π	$0.0086806+0.00034722k$
	0.4π	$0.038390+0.0006825k$		0.2π	$0.0029202+0.0000238k$
	0.6π	$0.040188+0.0016075k$		0.4π	$0.0029346+0.00002958k$
	0.8π	$0.042925+0.0030595k$		0.6π	$0.0029588+0.00002174k$
	π	$0.046875+0.0052084k$		0.8π	$0.0029921+0.00003903k$
			π	$0.0030382+0.00006200k$	

積分常数は次の 3 個の境界条件によつて決定する。

(I) $\theta=0 \quad \theta=\alpha$ にて $v_0+v_1=0$
 $\therefore C_1 \sin \alpha + C_3 = 0 \dots\dots\dots (51)$

(II) $\theta=0 \quad \theta=\alpha$ にて $\frac{dv_0}{d\theta} + \frac{dv_1}{d\theta} = 0$
 $\therefore C_1(1 - \cos \alpha) + C_2(\alpha + \sin \alpha) + \frac{4Pr^3}{\alpha EI} \sum K_n \sin n\gamma\xi = 0 \dots\dots\dots (52)$

(III) $\theta=0 \quad \theta=\alpha$ にて $r(1+k)\beta = B$ (常數)

(9) により

$$\frac{d^4(v_0+v_1)}{d\theta^4} + (2+k)\frac{d^2(v_0+v_1)}{d\theta^2} - \frac{r^4}{EI}F\gamma = B \dots\dots\dots (53)$$

しかるに $\theta=0$ にて $\frac{d^2v_0}{d\theta^2} = 0$ となる。又 $\frac{d^2v_1}{d\theta^2} - \frac{r^4}{EI}F\gamma = 0^{(16)}$ となる。

よつて (53) は

$$\frac{d^4v}{d\theta^4} + (2+3k)\frac{d^2v}{d\theta^2} = B \dots\dots\dots (54)$$

$$\therefore C_1(1+k)\sin \alpha + 2kC_2(1+\cos \alpha) + B = 0 \dots\dots\dots (55)$$

(51) (52) (55) より積分常数を決定せば

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\gamma\pi}{\lambda_0 \sin \alpha} \left\{ -(\alpha + \sin \alpha)B + 2k(1 + \cos \alpha) \frac{4Pr^3}{\alpha EI \gamma^3} \sum K_n \sin n\gamma\xi \right\} \\ C_2 &= \frac{\gamma\pi}{\lambda_0} \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} B - \frac{4Pr^3(1+k)}{\alpha EI \gamma^3} \sum K_n \sin n\gamma\xi \right\} \\ C_3 &= \frac{\gamma\pi}{\lambda_0} \left\{ (\alpha + \sin \alpha)B - 2k(1 + \cos \alpha) \frac{4Pr^3}{\alpha EI \gamma^3} \sum K_n \sin n\gamma\xi \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

$$16) \frac{d^4v_0}{d\theta^4} - \frac{r^4}{EI}F\gamma = \frac{4Pr^3}{\alpha EI} \sum (n^2 K_n - 1) \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta \text{ にして } n^2 K_n - 1 = \frac{1 + \frac{k}{n^2 \gamma^2}}{\left(1 - \frac{1}{n^2 \gamma^2}\right)^3} - 1 = \frac{2+k - \frac{1}{n^2 \gamma^2}}{n^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{n^2 \gamma^2}\right)^2} \gamma_x$$

ればなり。

但

$$\lambda_0 = \pi^2 \left\{ (1+k) + (1-k) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

よつて各點に働く對稱荷重 P による θ 點の撓みは C_1, C_2, C_3 を (56) にて與へる時次式となる。

$$v(\theta, \xi) = \frac{4P\gamma^3}{\alpha EI\gamma^4} \sum \frac{K_n}{n} \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta + C_1 \{ \sin \theta + \sin(\alpha - \theta) - \sin \alpha \} \\ + C_2 \{ (\alpha - \theta) \sin \theta + \theta \sin(\alpha - \theta) \} \dots \dots \dots (58)$$

今兩固定端が

$$v = 1 \times \sin \theta, \quad \beta = 0 \dots \dots \dots (59)$$

なる週期的運動を強制されて梁が振動してゐるものとし、その最大位相にある時の状態について考察するにその瞬間には梁は靜止の状態にありて各點には慣性抵抗 mp^2u/g が働き、各點の平衡位置よりの變位は u である。 u なる變位のうち 1 は剛體としての變位であるから梁の撓みは $u-1$ である。しかるに ξ 點に働く對稱荷重 P による θ 點の撓みは (20) によつて $v(\theta, \xi)$ であるから對稱分布荷重 mp^2u/g による θ 點の撓みは

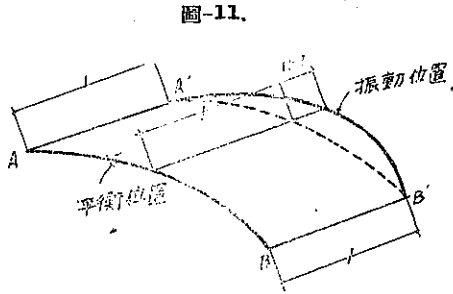


圖-11.

$\int_0^{\alpha/2} \frac{mp^2u}{gP} u(\xi) \cdot v(\theta, \xi) \cdot r l d\xi$ によつて表はされる。よつて次の關係が成立せねばならぬ

$$u(\theta) - 1 = \int_0^{\alpha/2} \frac{mp^2u(\xi)v(\theta, \xi)}{gP} r l d\xi \\ \therefore u(\theta) = 1 + \frac{mp^2r}{gP} \int_0^{\alpha/2} v(\theta, \xi) u(\xi) r l d\xi \dots \dots \dots (60)$$

(60) は核 $v(\theta, \xi)$ をもつ Fredholm の第二種積分方程式である。この式を解くために

$$\alpha_n = \gamma \int_0^{\alpha/2} u(\xi) \sin n\gamma\xi \cdot r l d\xi \quad n = 1, 3, 5, \dots \dots \dots (61)$$

とおき (58) を (60) に代入せば

$$u(\theta) = 1 + \frac{mp^2r}{gP} \left[\frac{4P\gamma^3}{\alpha EI\gamma^4} \sum \frac{K_n r l n}{n} \sin n\gamma\theta + \{ \sin \theta + \sin(\alpha - \theta) - \sin \alpha \} \int_0^{\alpha/2} C_1 u(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \{ (\alpha - \theta) \sin \theta + \theta \sin(\alpha - \theta) \} \int_0^{\alpha/2} C_2 u(\xi) d\xi \right] \dots \dots \dots (62)$$

而して

$$\int_0^{\alpha/2} C_1 u(\xi) d\xi = \frac{\pi\gamma}{\lambda_0 \sin \alpha} \left\{ -(\alpha - \sin \alpha) C + 2k(1 + \cos \alpha) \frac{4P\gamma^3}{\alpha EI\gamma^4} \sum K_n \alpha_n \right\} \\ \int_0^{\alpha/2} C_2 u(\xi) d\xi = \frac{\pi\gamma}{\lambda_0} \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} C - \frac{4P\gamma^3(1+k)}{\alpha EI\gamma^4} \sum K_n \alpha_n \right\}$$

となり C は $C = B \int_0^{\alpha/2} u(\xi) d\xi$ なる常數である。

積分常數 C を $\theta = 0$ 及 $\theta = \alpha$ にて $\beta = 0$ なる條件によつて定める。しからば境界條件は (44) により

$$\frac{d^4 u}{d\theta^4} + (2+k) \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{mp^2 r^4}{gEI} u = 0 \dots \dots \dots (63)$$

(62) により

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{mp^2r}{gP} \left[\frac{4Pr^3}{\alpha EI} \sum n\gamma^2 K_n \alpha_n \sin n\gamma\theta + \{\sin\theta + \sin(\alpha-\theta)\} \int_0^{\alpha/2} C_{1u}(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \{(\alpha-\theta)\sin\theta + \theta\sin(\alpha-\theta) + 2(\cos\theta + \cos(\alpha-\theta))\} \int_0^{\alpha/2} C_{2u}(\xi) d\xi \right] \\ \frac{d^4u}{d\theta^4} &= \frac{mp^2r}{gP} \left[\frac{4Pr^3}{\alpha EI\gamma} \sum n^3 \alpha_n K_n \sin n\gamma\theta + \{\sin\theta + \sin(\alpha-\theta)\} \int_0^{\alpha/2} C_{1u}(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \{(\alpha-\theta)\sin\theta + \theta\sin(\alpha-\theta) + 4(\cos\theta + \cos(\alpha-\theta))\} \int_0^{\alpha/2} C_{2u}(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{mp^2r}{gP} \left[\frac{4Pr^3}{\alpha EI\gamma} \sum \left\{ \frac{1}{n} + \left(n^3 \alpha_n K_n - \frac{1}{n} \right) \right\} \sin n\gamma\theta + \{\sin\theta + \sin(\alpha-\theta)\} \int_0^{\alpha/2} C_{1u}(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \{(\alpha-\theta)\sin\theta + \theta\sin(\alpha-\theta) + 4(\cos\theta + \cos(\alpha-\theta))\} \int_0^{\alpha/2} C_{2u}(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

しかるに Fourier 級数論により

$$\sum \frac{1}{n} \sin n\gamma\theta = \frac{\pi}{4} \quad (0 < \theta < \pi) \quad n=1, 3, 5, \dots$$

である。

又 $\sum \left(n^3 \alpha_n K_n - \frac{1}{n} \right) \sin n\gamma\theta = \sum \left\{ \alpha_n (n^3 K_n - 1) + \left(\alpha_n - \frac{1}{n} \right) \right\} \sin n\gamma\theta$ に於て $n^3 K_n - 1$ は $1/n^2$ の order, α_n は $1/n$ の order の量であるから上式は $\theta=0$ の近傍に於て一様に収斂するであらう。よつて

$$\left(\frac{d^4u}{d\theta^4} \right)_0 = \frac{mp^2r^4}{gEI} + \frac{mp^2r}{gP} \left[\sin\alpha \int_0^{\alpha/2} C_{1u}(\xi) d\xi + 4(1+\cos\alpha) \int_0^{\alpha/2} C_{2u}(\xi) d\xi \right]$$

$$\text{又} \quad \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} \right)_0 = -\frac{mp^2r}{gP} \left[\sin\alpha \int_0^{\alpha/2} C_{1u}(\xi) d\xi + 2(1+\cos\alpha) \int_0^{\alpha/2} C_{2u}(\xi) d\xi \right]$$

$$u_0 = 1$$

である。之を (63) に代入せば

$$C = 0$$

を得。故に

$$\phi^4 = \frac{mp^2r\alpha^4}{gEI\pi^4} \dots \dots \dots (64)$$

と略記すれば (62) は

$$\begin{aligned} u(\theta) &= 1 + 4\phi^4 \left[\frac{1}{\pi} \sum \frac{K_n \alpha_n}{n} \sin n\gamma\theta + \frac{\gamma^2}{\lambda_0} \sum K_n \alpha_n \left\{ 4k \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+k)(\alpha-\theta)\sin\theta + \theta\sin(\alpha-\theta) \right\} \right] \dots \dots \dots (65) \end{aligned}$$

となる。 α_n を決定する爲に (65) を (61) に代入すれば長い運算の後に

$$\alpha_j = \frac{1}{j} + 4\phi^4 \left\{ \frac{K_j \alpha_j}{4j} - \frac{4}{\lambda_0} K_j \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum K_n \alpha_n \right\} \quad \begin{matrix} j=1, 3, 5, \\ n=1, 3, 5, \dots \end{matrix}$$

を得。之を變形せば

$$\alpha_j = \frac{\frac{1}{j}}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} - \frac{16\phi^4}{\lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{K_j}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} \sum K_n \alpha_n \quad \begin{matrix} j=1, 3, 5, \dots \\ n=1, 3, 5, \dots \end{matrix} \dots \dots \dots (66)$$

$\sum K_n \alpha_n$ なる無限級数の和は上記の多聯方程式の各式に K_j を乗じて全部加へ合はすことによつて得られる。

$$\begin{aligned} \therefore \sum K_j \alpha_j &= \sum \frac{\frac{K_j}{j}}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} - \frac{16 \phi^4}{\lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{\frac{K_j^2}{j}}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} \sum K_n \alpha_n \\ \therefore \sum K_n \alpha_n &= \frac{\sum \frac{\frac{K_j}{j}}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4}}{1 + \frac{16 \phi^4}{\lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{\frac{K_j^2}{j}}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4}} \quad j=1, 3, 5, \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

この式の右邊の無限級数は K_j が $1/j^2$ の order を以て減少するから、 $\sum K_n \alpha_n$ は一般には僅か數項を計算することによつて充分精確なる値を得ることが出来る。この式を (66) に代入すれば常數 α_j を定むる事が出来、 α_j を知れば (65) によつて振動撓曲線の形を算出することが出来る。振動撓曲線は (44) により次式を以て與へらる。

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{4\gamma^2 \phi^4}{r(1+k)} \left[\frac{1}{\pi} \sum \left[\left\{ n^2 \gamma^2 - n(2+k) - \frac{\gamma^2 \phi^4}{n} \right\} K_n \alpha_n - \frac{\gamma^2}{n} \right] \sin n\gamma\theta \right. \\ &\quad + \left\{ 4k \cos \frac{\alpha}{2} \left[\gamma^4 \phi^4 \cos \frac{\alpha}{2} - (1+k+\gamma^4 \phi^4) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) \right] + (1+k)(1+k+\gamma^4 \phi^4) \{ \theta \sin(\alpha-\theta) \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha-\theta) \sin \theta \} + 2k(1+k) \{ \cos(\alpha-\theta) + \cos \theta \} \right] \frac{1}{\lambda_0} \sum K_n \alpha_n \right] \dots \dots \dots (68) \end{aligned}$$

(65), (68) 兩式を (4) に代入して曲げモーメントが得られる

$$\begin{aligned} M &= -\frac{4EI\gamma^2 \phi^4}{(1+k)r^2} \left[\frac{1}{\lambda_0} \sum K_n \alpha_n \left\{ 4k\gamma^4 \phi^4 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+k)\gamma^4 \phi^4 \{ \theta \sin(\alpha-\theta) + (\alpha-\theta) \sin \theta \} + 2(1+k) \{ \cos(\alpha-\theta) + \cos \theta \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\pi} \sum \left[\left\{ n^2 \gamma^2 - n - \frac{\gamma^2 \phi^4}{n} \right\} K_n \alpha_n - \frac{\gamma^2}{n} \right] \sin n\gamma\theta \right] \dots \dots \dots (69) \end{aligned}$$

$\theta=0$ とおきて兩端の曲げモーメントを求めれば

$$M_A = -\frac{16EI\gamma^2 \phi^4}{r^2 \lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum K_n \alpha_n \dots \dots \dots (70)$$

(69) を $\theta = \frac{\alpha}{2}$ にて $T=0$ なる條件のもとに積分すると撓モーメントが得られる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{4EI\gamma^2 \phi^4}{(1+k)r^2} \left[\frac{1}{\lambda_0} \sum K_n \alpha_n \left\{ 4k\gamma^4 \phi^4 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1+k)\gamma^4 \phi^4 \{ \theta \cos(\alpha-\theta) - (\alpha-\theta) \cos \theta \} + (1+k)(2+\gamma^4 \phi^4) (\sin(\alpha-\theta) - \sin \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\pi} \sum \left[\left\{ n^2 \gamma^2 - n - \frac{\gamma^2 \phi^4}{n} \right\} K_n \alpha_n - \frac{\gamma^2}{n} \right] \frac{\cos n\gamma\theta}{n\gamma} \right] \dots \dots \dots (71) \end{aligned}$$

(67) に於て分母が 0 なる時は $\sum K_n \alpha_n \rightarrow \infty$ にしてすべての α_j は無限大となる。従つて u は無限に大となるから

$$1 + \frac{16 \phi^4}{\lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{K_j^2}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} = 0$$

は對稱なる自由振動の振動判別式とみなすことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\phi^4} \\ \frac{\lambda_0 \sec^2 \frac{\alpha}{2}}{16} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (72)$$

とにおいて上式を書き變へると振動判別式は次式となる。

$$\sum \frac{K_j^2}{x - \frac{K_j^2}{j}} = \frac{1}{a} \quad j=1, 3, 5, \dots \dots\dots (73)$$

特に $\alpha = \pi$ なる半圓形の場合には上式は不定形となる。この場合には $\frac{K_1^2}{K_1 - x} - \frac{\lambda_0 \sec^2 \frac{\alpha}{2}}{16}$ の極限值を求める爲に $\pi - \alpha = \delta$ とおき δ を微量と考へて展開すれば

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\pi^2(1+k)}{4\delta^2} \left\{ 1 + \frac{1-k}{1+k} \frac{\delta}{\pi} + \frac{3-k}{4(1+k)} \frac{\delta^2}{\pi^2} + \dots \right\} \\ \frac{K_1^2}{K_1 - x} &= \frac{\pi^2(1+k)}{4\delta^2} \left\{ 1 + \frac{1-k}{1+k} \frac{\delta}{\pi} + \frac{3-k+16x(1+k)}{4(1+k)} \frac{\delta^2}{\pi^2} + \dots \right\} \\ \frac{\lambda_0 \sec^2 \frac{\alpha}{2}}{16} &= \frac{\pi^2(1+k)}{4\delta^2} \left\{ 1 + \frac{1-k}{1+k} \frac{\delta}{\pi} + \frac{12(1-k) + \pi^2(1+k)}{12(1+k)} \frac{\delta^2}{\pi^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

なる故

$$\frac{K_1^2}{K_1 - x} - \frac{\lambda_0 \sec^2 \frac{\alpha}{2}}{16} = x - \frac{1}{16} \left\{ \frac{\pi^2}{3}(1+k) - 3(k-1) \right\}$$

となる。よつて振動判別式は次式となる。

$$x - \frac{1}{16} \left\{ \frac{\pi^2}{3}(1+k) - 3(k-1) \right\} = \sum \frac{K_j^2}{x - \frac{K_j^2}{j}} \quad j=3, 5, 7, \dots \dots\dots (74)$$

種々の α に関する $1/a$ の値は表-7 の如くなる。

表-7.

(73) の級数の各項は夫々双曲線を表はし、その y 軸に平行なる漸近線は $x = K_j/j$ に於て x 軸を切る。 K_j は表-6 に見る如く j が小なる間は著しく速やかに収斂するから第 2 項以下の各項についての漸近線は y 軸に接近して密集し、之等の各項の和なる級数を示す曲線は夫々隣接する漸近線の間

$\alpha = 0.2 \pi$	$1/a = 1.3199 + 0.0439 9 k$
$\alpha = 0.4 \pi$	$1/a = 1.6557 + 0.2291 9 k$
$\alpha = 0.6 \pi$	$1/a = 2.6863 + 0.8845 9 k$
$\alpha = 0.8 \pi$	$1/a = 7.9705 + 4.9490 0 k$

あつて $(-\infty)$ より $(+\infty)$ まで變じその間 2 個の反曲點を有する曲線となる。したがつて之等の曲線と $y = 1/a$ なる x 軸に平行なる直線との交點は j 次振動に関する x を與へる。圖-12¹⁷⁾ はこの關係を畫いたものである。 x が既知なる時は振動數 N は次式を以て與へらる。

$$N = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \sqrt{\frac{gEI}{m(vcc)^4}} \dots\dots\dots (75)$$

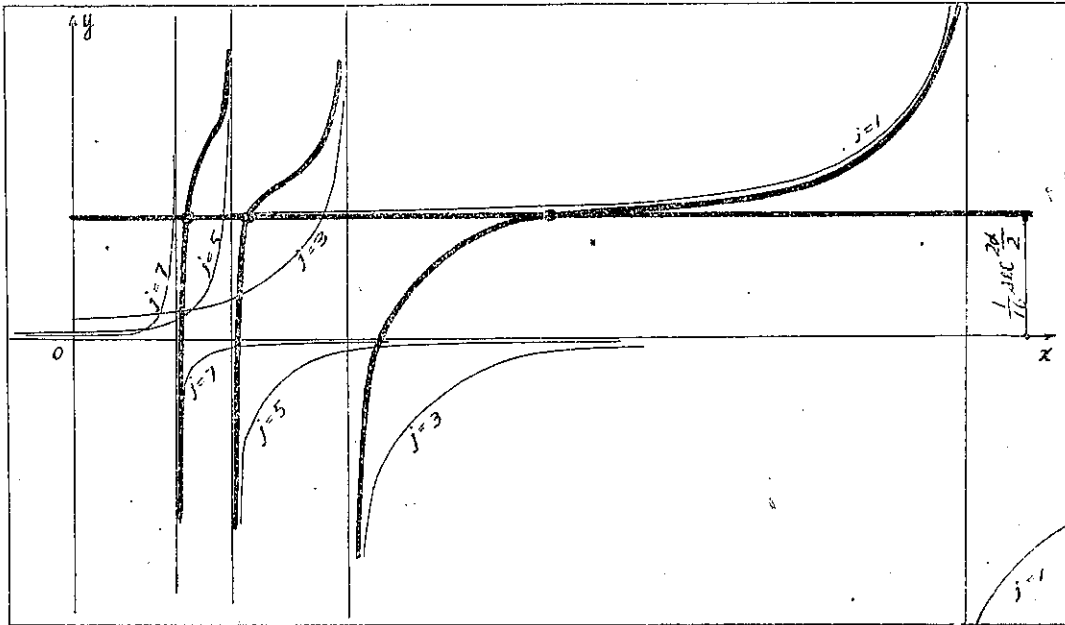
拱の支間を l 、拱矢を f を以て表はしたる時は

$$\frac{f}{l} = \tan \frac{\alpha}{4}$$

であるから上式を變形すれば

17) 圖を見易くする爲にその縮尺は甚しく狂はせてある。

図-12.



$$N = n_0 \sqrt{\frac{gEI}{ml^3}} \dots \dots \dots (76)$$

茲に

$$n_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right) \dots \dots \dots (77)$$

である。

表-6 に示す如く K_1 は K_2 以下の K に比して著しく大であるから 1 次振動を求むるには第 3 項以下は無視するも差支へなく第 1 項のみをとりてもかなりの精度の値が得られる。その場合の x を x_1 とせば

$$x_1 = K_1 - \alpha K_1^2$$

第 2 項迄とりたる場合の x を x_2 とし $x_2 - x_1 = d$ を以て表はせば補正項は

$$d = \frac{\alpha^2 K_1 K_2}{x_1 - \frac{K_2}{3}}$$

を以て與へらる。 $\alpha = \pi$ なる場合は

$$x_1 = 0.2681 + 0.01812k$$

となり補正項は

$$d = \frac{K_2^2}{x_1 - \frac{K_2}{3}} + \frac{K_2^3}{x_2 - \frac{K_2}{5}}$$

を以て與へらる。

自由振動の撓曲線は (60) のかわりに

$$u(\theta) = \frac{wP^2 r}{gJ^2} \int_0^{\alpha/2} r(\theta, \xi) u(\xi) d\xi \dots\dots\dots (78)$$

なる同次積分方程式をときて

$$u(\theta) = 4\phi^4 \left[\frac{1}{\pi} \sum \frac{K_n \alpha_n}{n} \sin n\gamma\theta + \frac{\gamma^2}{\lambda_0} \sum K_n \alpha_n \left\{ 4k \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1-k)(\cos(\alpha-\theta)\sin\theta + \theta \sin(\alpha-\theta)) \right\} \right] \dots\dots\dots (79)$$

となる。この場合 (76) に相當する式は

$$\alpha_j = -\frac{16}{\lambda_0} \phi^4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{K_j}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} \sum K_n \alpha_n \quad \begin{matrix} n=1, 3, 5, \dots \\ j=1, 3, 5, \dots \end{matrix} \dots\dots\dots (80)$$

となり、この式に K_j を乗じて加へ合せれば次式となる。

$$\left(1 + \frac{16\phi^4}{\lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{K_j^2}{1 - \frac{K_j}{j} \phi^4} \right) \sum K_n \alpha_n = 0$$

この式は (73) と同じであるから (79) は (73) を満足する ϕ (即ち x) についてのみ成立する。かくの如き x を x_j とすれば x_j については (80) により

$$\alpha_n = -\frac{16}{\lambda_0 x_j} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{K_n}{1 - \frac{K_n}{n x_j}} \sum K_n \alpha_n$$

であるから之を (79) に代入し、且自由振動にては常係数は無意味であるから之を省略すれば、振動曲線は

$$u(\theta) = 4k \cos \frac{\alpha}{2} \left\{ \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right\} - (1+k) \{ \cos(\alpha-\theta) \sin\theta + \theta \sin(\alpha-\theta) \} \\ - \frac{16}{\pi \gamma^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{K_n^2}{n \left(x_j - \frac{K_n}{n} \right)} \sin n\gamma\theta \quad n=1, 3, 5, \dots \dots\dots (81)$$

となる。第 1 第 2 兩項は n 及 x_j に關係なく、第 3 項は j が小なる限りは數項を採るのみで充分精密なる値を與へる。

α 及 k が振動數に及ぶ影響を見る爲に $k=0.75, k=1.00, k=1.50, n=2.50, k=4.00$ について α が夫々 $0.2\pi, 0.4\pi, 0.6\pi, 0.8\pi, \pi$ なる場合に於ける 1 次振動の振動數と振動曲線形を計算せる結果を表-8 及圖 13~15 に

表-8.

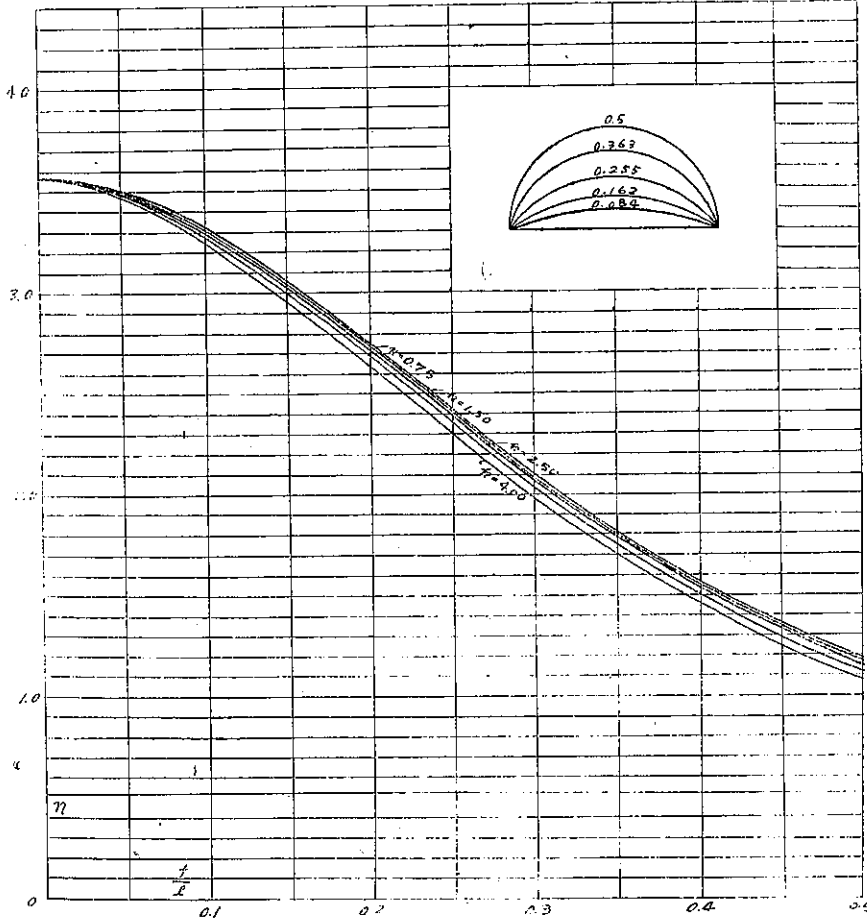
$N = n\omega$ 振動數, $EI = \text{曲り剛性}$, $k = \text{係數}$
 $\frac{w}{g} = \text{単位長さ当り荷重}$, $\gamma = \text{角周波數}$, $\lambda_0 = \frac{EI}{r^2 k}$

k	α γl	0.2π		0.4π		0.6π		0.8π		π	
		x	N_0	x	N_0	x	N_0	x	N_0	x	N_0
0.75	I 次	0.1997	3.401	0.2140	2.172	0.2374	2.376	0.2643	1.750	0.2917	1.179
	II 次	0.02593	4.438	0.02694	8.375	0.02873	6.529	0.03153	5.083	0.03451	3.043
1.00	I 次	0.2001	3.398	0.2160	2.758	0.2398	2.764	0.2685	1.737	0.2966	1.167
	II 次	0.02597	4.431	0.02710	8.351	0.02900	6.500	0.03179	5.047	0.03515	3.410
1.50	I 次	0.2010	3.390	0.2185	2.938	0.2445	2.341	0.2756	1.720	0.3044	1.150
	II 次	0.02604	4.418	0.02734	8.314	0.02954	6.734	0.03265	4.579	0.03633	3.355
2.50	I 次	0.2027	3.376	0.2240	2.905	0.2529	2.302	0.2862	1.682	0.3261	1.115
	II 次	0.02616	4.400	0.02781	8.243	0.03051	6.626	0.03332	4.857	0.03733	3.266
4.00	I 次	0.2077	3.335	0.2310	2.860	0.2645	2.250	0.3049	1.630	0.3553	1.068
	II 次	0.02633	4.366	0.02848	8.146	0.03192	6.478	0.03665	4.687	0.04105	3.187

示した。

この結果を見れば普通に用ひらるゝ範圍の斷面をもつ圓梁の1次振動について次の性質を知る事が出来る。即ち振動數(表-8及圖-13, 14)については

圖-13.



1) EI, m, l が同一なる時は, k の増大即ち μb の減少は振動を緩ならしめる。その程度は f/l が小なる時は殊んど影響はないけれども, 拱矢がますと共に大となり半圓に於ては相當に大きな影響を與へる。

2) EI の増大は振動數を増す。

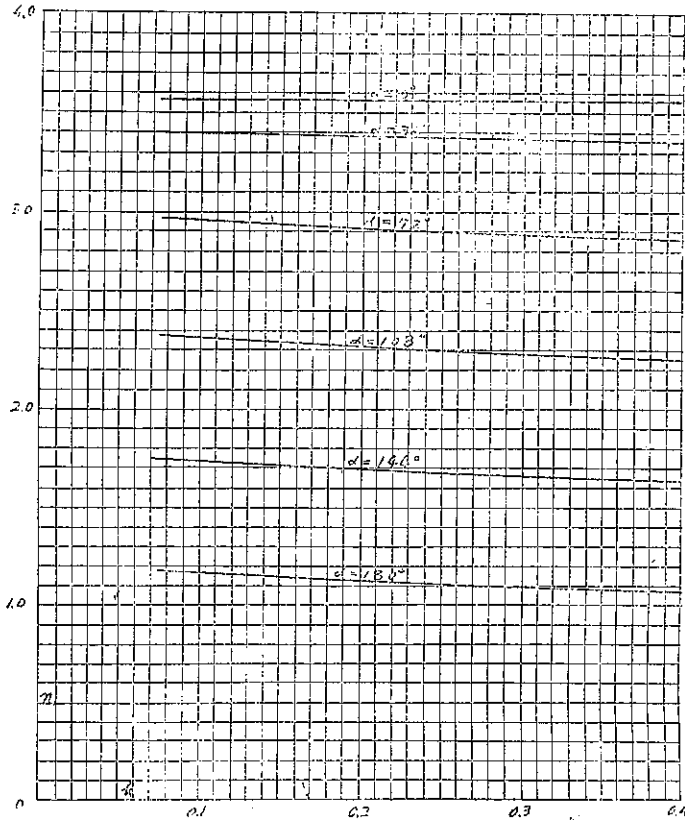
3) k が一定なる時は f/l の増加は振動を緩ならしめ, 半圓の場合の振動數は直線梁の場合 ($n_0 = 3.561$)¹⁸⁾ の 30% にすぎない。極めて概算的には f/l が 0.1~0.4 の範圍では $n_0 = a - b \cdot f/l$ なる直線的關係を假定することが出来る。

撓曲線(表-9及圖-15)については

1) f/l の増すと共に漸次中央部の撓が他の部分に比し大になるがその影響は非常に僅かであつて, f/l が 1/4

18) 妹澤博士: 振動學

圖14.



位迄は殆んど影響がないと稱してよく半圓に近づくにつれて急に影響が著しくなってくる。

2) h の増大は僅かながら中央部の撓を他の部分に比して大ならしめる。その結果振動数を減少させることになるものと思はれる。

3) Brown によつて假定された曲線形 $u = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\alpha} \right)$ は表-9 の如くであるから、眞の撓曲線に比較して中央部の撓がやゝ過大である。

表-9.

$\frac{\theta}{\alpha/2}$	u				Brown の式 による u
	$\alpha = 0.2\pi$	$\alpha = 0.4\pi$	$\alpha = 0.6\pi$	$\alpha = 0.8\pi$	
0.2	0.119	0.116	0.112	0.110	0.086
0.4	0.389	0.385	0.381	0.372	0.346
0.6	0.687	0.686	0.686	0.675	0.655
0.8	0.918	0.917	0.916	0.909	0.905
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

$k=1$ なる場合について第 3 次振動数を計算せる結果は表-8 及圖-16の如くである。即ち f/l の増加は振動

圖-15.

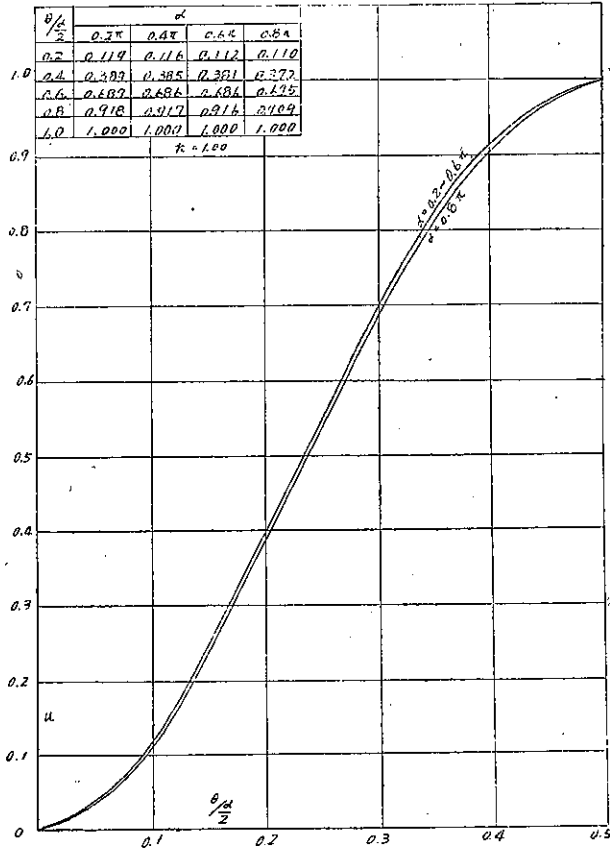


表-10.

α	δ	K_1	K_2	F_5	k_1'	K_2'	K_3'	a	$aK_1'^2$
60°	3	1.4414	0.0375	0.0084	2.0773	0.00141	0.00007	0.5951	1.2364
120°	15	5.0400	0.0386	0.00285	25.40051	0.00149	0.00007	0.1888	4.7450
180°	1	—	0.0534	0.0091	—	0.00285	0.00008	—	—
240°	0.75	5.3266	0.0717	0.0100	28.37200	0.00514	0.00010	0.1760	4.9946
300°	0.6	1.4150	0.1074	0.0142	2.00237	0.01153	0.00020	0.5307	1.0627

を緩ならしめ半圓の場合の振動数は直線梁の場合 ($n_0 = 19.242^{18)}$ の 36.8% である。

Brown は直径 1/4' 梁長 41.65' $t = 1.25$ $\sqrt{\frac{gEI}{m(rv)^4}} = 5.37$ なる圓形断面の圓梁の自由振動数を實測¹⁹⁾した。ここに著者の導いた解法によつて振動数を計算し、この實験値と比る較すと共に公式の用法を例示しやう。

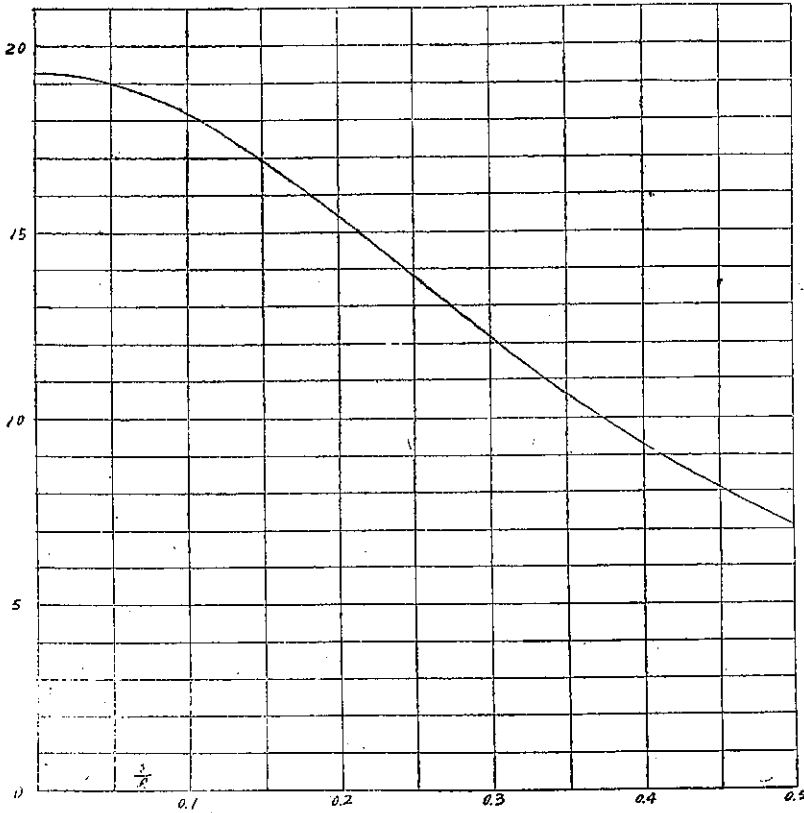
先づ K_1, K_2, K_3 及 $\alpha = \frac{16}{\lambda_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ を計算し表-10 を得。

$\alpha = 60^\circ$ の場合

級数の初項のみをとりたる場合の α を第一近似値 α_1 とす。

19) 文献 21.

圖-1.6.



$$\frac{K_1^2}{K_1 - x_1} = \frac{1}{a} \quad \therefore \quad x_1 = K_1 - aK_1^2 = 1.4414 - 1.2364 = 0.2050$$

振動数は

$$N = \frac{p}{2\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \sqrt{\frac{gEI}{ml^3}} = \frac{8.4352}{\sqrt{x}}$$

なるを以て $f_1 = \frac{8.4352}{\sqrt{0.2050}} = 18.6$ 回/秒

第二項迄とると

$$\frac{K_1^2}{K_1 - x} + \frac{K_2^2}{\frac{K_2}{3} - x} = \frac{1}{a}$$

に於て第二項の x に近似的に x_1 を代入せば直ち1. 第二近似値 x_2 を得。 $x_2 = x_1 + d_1$ と表はせば

$$d_1 = \frac{a^2 K_1^2 K_2^2}{x_1 - \frac{K_2}{3}} \quad \therefore \quad d_1 = \frac{(0.5951 \times 1.4414 \times 0.0375)^2}{0.2050 - \frac{0.0375}{3}} = 0.0053$$

$$\therefore \quad x_2 = 0.2050 + 0.0053 = 0.2103 \quad \therefore \quad f_2 = \frac{8.4352}{\sqrt{0.2103}} = 18.4 \text{ 回/秒}$$

第三項迄とると

$$\frac{K_1^2}{K_1-x} + \frac{K_2^2}{\frac{K_3}{3}-x} + \frac{K_6^2}{\frac{K_5}{5}-x} = \frac{1}{a}$$

に於て第二項以下の x に x_2 を代入せば直ちに第三近似値 x_3 を得。 $x_3 = x_2 + d$ と表はせば

$$d_2 = \frac{\alpha^2 K_1^2 K_6^2}{x_2 - \frac{K_3}{3}} - \frac{\Delta_1^2}{x_1 - \frac{K_3}{3}}$$

$$\therefore d_2 = \frac{(0.5951 \times 1.4414 \times 0.0084)^2}{0.2103 - \frac{0.1084}{5}} - \frac{0.0053^2}{0.2050 - \frac{0.0375}{3}} = 0.0001$$

$$\therefore x_3 = 0.2103 + 0.0001 = 0.2104 \qquad \therefore f_3 = \frac{8.4352}{\sqrt{0.2104}} = 18.4 \text{ 回/秒}$$

即ち第二項迄とるも第三項迄とるも f に対して影響は無く 18.4 回/秒が眞の振動数なるを知る。

$\alpha = 120^\circ, \alpha = 240^\circ, \alpha = 300^\circ$ についても同様な計算を行ひ次の結果を得た。

α	第一近似値	第二近似値	第三近似値
120°	17.0	16.8	16.8
240°	14.6	14.3	14.3
300°	14.2	13.8	13.8

圖-17.

之によりいづれの場合にも第二近似値が既に正しき振動数を與へてゐることがわかる。

$\alpha = 180^\circ$ の場合

$$x_1 = 0.2681 + 0.0181 \times 2 \times 1.25 = 0.2908$$

$$\therefore f_1 = \frac{8.4352}{\sqrt{0.2908}} = 15.6 \text{ 回/秒}$$

$$d_1 = \frac{K_2^2}{x_1 - \frac{K_3}{3}} = \frac{0.00285}{0.2908 - \frac{0.0534}{3}} = 0.0104$$

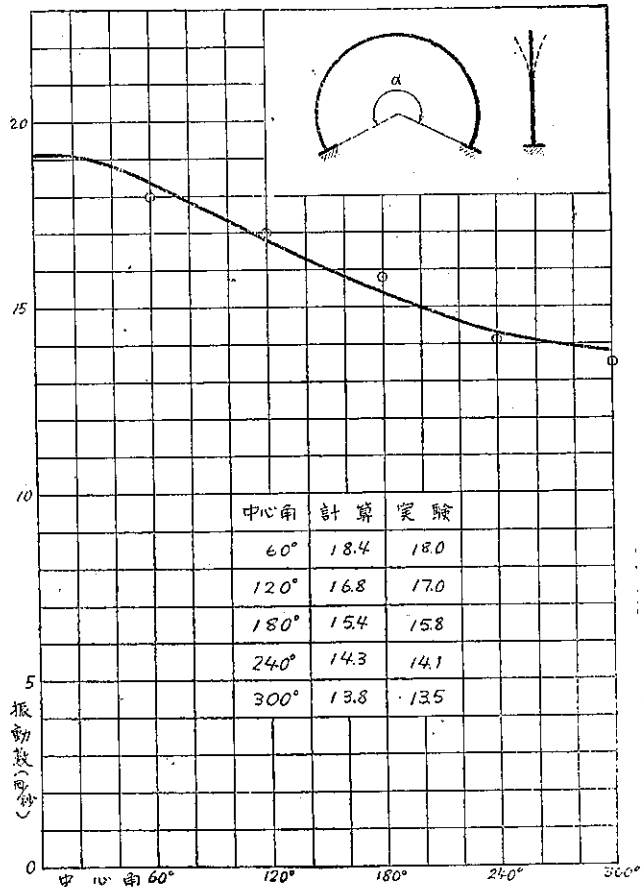
$$\therefore x_2 = 0.2908 + 0.0104 = 0.3012$$

$$\therefore f_2 = \frac{8.4352}{\sqrt{0.3012}} = 15.4 \text{ 回/秒}$$

$$d_2 = \frac{K_3^2}{x_2 - \frac{K_3}{3}} + \frac{K_6^2}{x_2 - \frac{K_5}{5}} - d_1$$

$$= \frac{0.00285}{0.3012 - \frac{0.0534}{3}} + \frac{0.00008}{0.3012 - \frac{0.0091}{5}} - 0.0104 = 0$$

よつて $f_2 = 15.4$ 回/秒 が眞の振動数である。

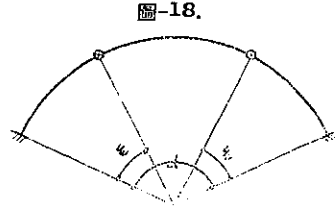


以上の結果に就て見るにその演算は Brown の與へた近似算法より寧ろ簡單である。圖-17 はこの結果を示せる。

ものである。Brown は本例の場合につき實驗を行つたがその結果を○印を以て示した。兩者を比較せば良く一致してゐることがわかるであらう。

4. 逆對稱なる振動

逆對稱なる振動については、第 3 章に述べたる對稱振動の場合にならつて計算することが出来る。圖-18 に示す如き逆對稱荷重を Fourier 級數に展開すれば



$$F_y = \frac{4P}{\alpha r} \sum \sin n\gamma\theta \sin n\gamma\xi, \quad n=2, 4, 6, \dots \quad (82)$$

となる。よつて彈性曲線の微分方程式は

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + 2\frac{d^4v}{d\theta^4} + \frac{d^2v}{d\theta^2} = -\frac{4Pr^3}{\alpha EI} \sum (n^2\gamma^2 + k) \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta \quad (83)$$

(82) の特解 v_0 は

$$v_0 = \frac{4Pr^3}{\alpha EI} \sum \frac{K_n}{n\gamma^4} \sin n\gamma\xi \sin n\gamma\theta \quad (84)$$

にして逆對稱なる餘函數 v_1 は C_1, C_2, C_3 を積分常數とせば

$$v_1 = C_1 \{ \sin \theta - \sin(\alpha - \theta) \} + C_2 \{ (\alpha - \theta) \sin \theta - \theta \sin(\alpha - \theta) \} + C_3(\alpha - 2\theta) \quad (85)$$

である。

茲に

$$K_n = \frac{n^2 + \frac{k}{\gamma^2}}{n \left(n^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^2} \quad n=2, 4, 6, \dots \quad (86)$$

なる常數列であつて n の増大と共に $1/n^3$ の order を以て減少する。種々の α に関する K_n の値は表-11 の如くなる。

表-11.

		α			α
K_2		0.2π	K_0		0.2π
		0.4π			0.4π
		0.6π			0.6π
		0.8π			0.8π
		π			π
K_4		0.2π			
		0.4π			
		0.6π			
		0.8π			
		π			

積分常數を $\theta=0$ 及 $\theta=\alpha$ に於て $v=0, dv/d\theta=0, \beta=0$ なる境界條件より定むれば、前章と同様なる演算を

繰返し次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{2k(1-\cos\alpha)}{\alpha\lambda_e \sin\alpha} \cdot \frac{4Pr^3\pi^2}{\alpha EI} \sum \frac{K_n}{\gamma^6} \sin n\gamma\xi \\ C_2 &= -\frac{1+k}{\alpha\lambda_e} \cdot \frac{4Pr^3\pi^2}{\alpha EI} \sum \frac{K_n}{\gamma^6} \sin n\gamma\xi \\ C_3 &= -\frac{2k(1-\cos\alpha)}{\alpha^2\lambda_e} \cdot \frac{4Pr^3\pi^2}{\alpha EI} \sum \frac{K_n}{\gamma^3} \sin n\gamma\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (87)$$

茲に λ_e は

$$\lambda_e = \pi^2 \left\{ (1+k) - (1-k) \frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{8k}{\alpha^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \dots\dots\dots (88)$$

である。

自由振動の方程式は前章の所論により

$$u(\theta) = \frac{mp^2r}{gP} \int_0^{\alpha/2} v(\theta, \xi) u(\xi) d\xi \dots\dots\dots (89)$$

となりこの式が 0 以外の連続解をもつ爲の必要にして充分なる條件は mp^2r/gP が $v(\theta, \xi)$ の固有値なることであつて、その連続解は各々の固有函数に任意常数を乗じて加へたるものとなる。したがつて固有値を求むることが即ち自由振動週期を求むることになる。

$$\alpha_n = \gamma \int_0^{\alpha/2} u(\xi) \sin n\gamma\xi d\xi \dots\dots\dots (90)$$

とにおいて (89) に代入せば

$$u(\theta) = \frac{4mp^2r^4}{gEI\gamma^2} \left[\frac{1}{\alpha\gamma^3} \sum \frac{K_n\alpha_n}{n} \sin n\gamma\theta - \frac{\sum K_n\alpha_n}{\lambda_e} \left\{ \frac{2k(1-\cos\theta)}{\sin\alpha} (\sin\theta - \sin(\alpha-\theta)) + \frac{\alpha-2\theta}{\alpha} \sin\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - (1+k) ((\alpha-\theta)\sin\theta - \theta\sin(\alpha-\theta)) \right\} \right] \dots\dots\dots (91)$$

(90) に代入して

$$\alpha_n = 4\phi^4 \left[\frac{K_n\alpha_n}{4n} - \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(n^2 + \frac{k}{\gamma^2} \right)}{n\lambda_e \left(n^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^2} \sum K_n\alpha_n \right]$$

$$\therefore \left(1 - \phi^4 \frac{K_n}{n} \right) \alpha_n + \frac{16}{\lambda_e} \phi^4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot K_n \sum K_n\alpha_n = 0 \quad n=2, 4, 6, \dots\dots\dots (92)$$

上記の聯立方程式の各式に K_j を乗じて加算せば

$$\left\{ 1 + \frac{16 \phi^4}{\lambda_e} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{K_j^2}{1 - \phi^4 \frac{K_j}{j}} \right\} \sum K_n\alpha_n = 0$$

よつて振動判別式は

$$\sum \frac{K_j^2}{x - \frac{K_j}{j}} = -\frac{\lambda_e}{16} \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} \quad j=2, 4, 6, \dots\dots\dots (93)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\phi^4} \\ \frac{1}{b} &= \frac{\lambda_e}{16} \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (94)$$

と略記すれば上式は

$$\sum \frac{K_j^2}{x - \frac{L_j}{j}} = -\frac{1}{b} \quad j=2, 4, 6, \dots \dots \dots (95)$$

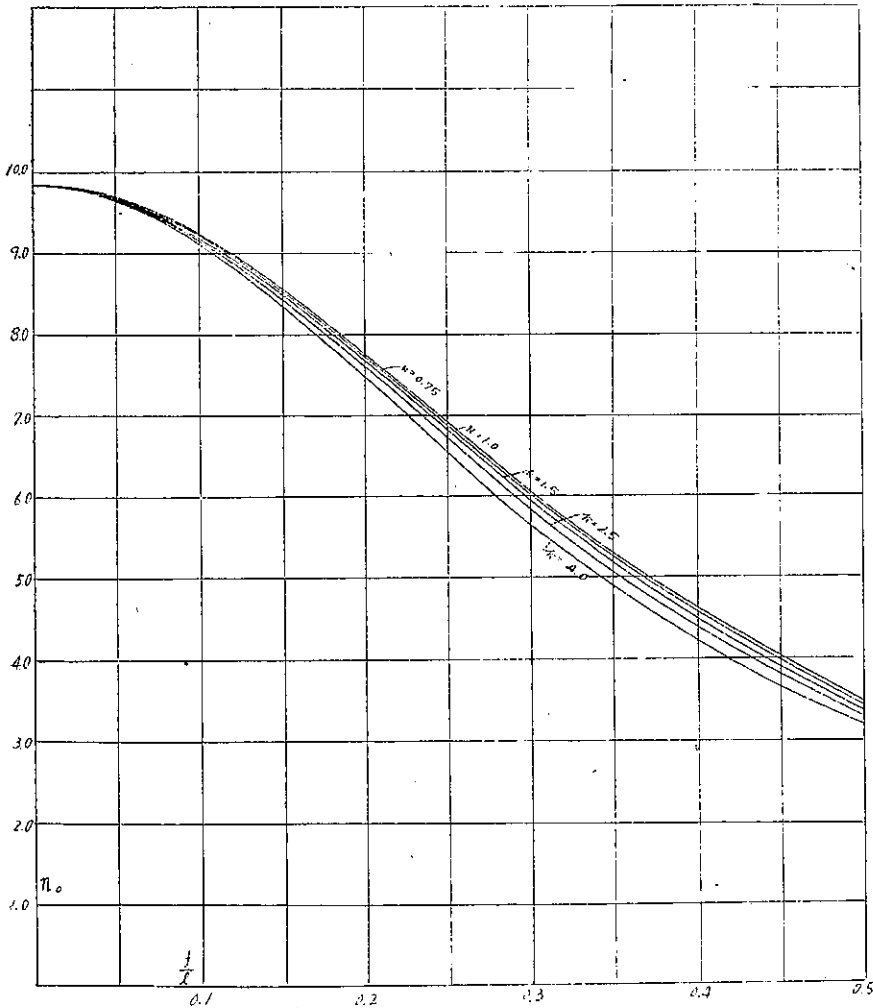
となる。左邊の各項は夫々双曲線となるから級数は多くの無限分枝をもち、無限分枝と $y = -1/b$ なる直線との交点は $j=2, 4, \dots$ に對應する振動数を與へる。かくの如き x_j に対してのみ (92) が成立し

$$\alpha_n = -\frac{16}{\lambda_e} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{K_n}{x_j - \frac{K_n}{n}} \sum K_n \alpha_n \dots \dots \dots (96)$$

であるから之を (91) に代入し、且自由振動にては常係数は無意味であるから、之を省略すれば、振動曲線は

$$u(\theta) = 2k \tan \frac{\alpha}{2} \left\{ \sin \theta - \sin(\alpha - \theta) + \left(1 - 2 \frac{\theta}{\alpha}\right) \sin \alpha \right\}$$

圖-19.



$$+(1+k)\{(\alpha-\theta)\sin\theta-\theta\sin(\alpha-\theta)\} + \frac{16}{\pi^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sum \frac{K_n^2}{n \left(x_j - \frac{K_n}{n}\right)} \sin n\theta$$

$n=2, 4, 6, \dots$ (97)

となる。第 1 第 2 兩項は n 及 x_j に關係なく第 3 項は j が小なる限りは數項をとるのみで充分精密なる値を與へる。

種々の α に対する $1/b$ の値は表-12 の如くなる。

表-11 に示す如く K_2 は K_4 以下の K に比してかなり大であるから 2 次振動を求むるには x の第 1 次近似値として第 1 項のみをとれば

$$x_1 = \frac{K_2}{2} - bK_1^2$$

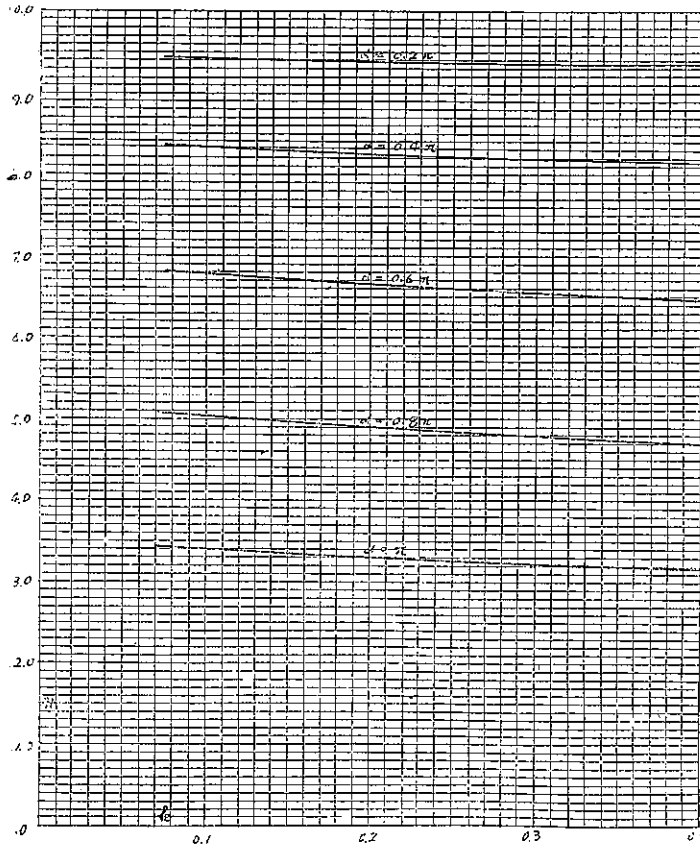
第 2 項迄とりたる場合の第 2 近似値を x_2 とし $x_2 - x_1 = \Delta$ を補正項とすれば

$$\Delta = \frac{b^2 K_2^2 K_1^2}{x_1 - \frac{K_2}{4}}$$

表-12.

$\alpha = 0.2\pi$	$\frac{1}{b} = 0.4167 + 0.00278k$
$\alpha = 0.4\pi$	$\frac{1}{b} = 0.4842 + 0.01170k$
$\alpha = 0.6\pi$	$\frac{1}{b} = 0.4669 + 0.02910k$
$\alpha = 0.8\pi$	$\frac{1}{b} = 0.5225 + 0.06022k$
$\alpha = \pi$	$\frac{1}{b} = 0.6169 + 0.11454k$

圖-20.



となる。

α 及 k が振動数に及ぶ影響を見る爲に $k=0.75, k=1.00, k=1.50, k=2.50, k=4.00$ に就て α が夫々 $0.2\pi, 0.4\pi, 0.6\pi, 0.8\pi, \pi$ なる場合に於ける 2 次振動数を計算せる結果は表-8 及圖-19, 20 の如くである。

この結果によつて次の如き性質を知る事が出来る。

1) EI, m, l が同一なる時は k の増大即ち μK の減少は振動を緩ならしめる。その程度は f/l_1 が小なる時は殆んど影響ないけれども、拱矢が増すと共に大となり半圓に於ては相當大きな影響をあたへる。

2) EI の増大は振動数を増大する。

3) k が一定なる時は f/l の増加は振動を緩ならしめ、半圓の場合の振動数は直線梁の場合 ($n_0=9.816^{18}$) の約 30% に過ぎない。極めて概算的には f/l が 0.1~0.4 の範囲では $n_0=a-b\frac{f}{l}$ なる直線的關係を假定する事が出来る。

之等の性質は 1 次振動における性質と全く同一である。

5. 1 次振動の近似解法

Brown¹⁹⁾ は 1 次固有週期を求むる爲に Rayleigh の方法に準じて次の如き近似解法を得、實驗の結果とよく一致する事を確めた。即ち圓梁の中央に單位集中荷重を作用せしめ中央點の撓 δ を求むれば、之により梁内に含まる 1 歪エネルギー W は $\delta^2/2$ となる。次に 1 次振動を

$$v = \frac{\delta}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\alpha}\right) \sin pt \dots\dots\dots(98)$$

なる單弦運動と假定し、之による最大運動エネルギー T を求むれば

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{m}{g} v^2 r d\theta = \frac{3mrc\alpha}{16g} \delta^2 p^2$$

Rayleigh の方法に準じて $T=W$ とおくと

$$p^2 = \frac{8g}{3mrc\alpha\delta} \dots\dots\dots(99)$$

彼はこの式の形に表はしてゐる。

$$N = \frac{1}{2\pi} \psi \left(\alpha, \frac{EI}{\mu K} \right) \sqrt{\frac{gEI}{m(\alpha r)^4}}$$

但
$$\psi \left(\alpha, \frac{EI}{\mu K} \right) = \sqrt{\frac{8B\alpha^3}{3(BF-2A^2)}}$$

にして B, F, A は

$$B = \frac{k+1}{4} \alpha - \frac{k-1}{4} \sin \alpha$$

$$A = \frac{k-1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$F = \frac{1+3k}{8} \alpha - k \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{k-1}{8} \sin \alpha$$

Brown は種々の k に對する ψ を求め圖-21 を與へてゐる。

$k=1$ なる場合に種々の α について著者が計算せる n_0 は表-13 に示す如くであつて之を先に得た結果 (表-8)

と比較すれば非常によく一致してゐることを知るであらう。Brownの解法はかくの如く良好なる結果を示すけれども、拱頂に集中荷重を加へたる時の歪エネルギーと、任意に假定せる振動曲線に基づき計算せる運動エネルギー

表-13.

α	\bar{h}_0
0.2π	3.43
0.4π	2.93
0.6π	2.38
0.8π	1.74
π	1.16

一を相等しとおく事には理論的根據を見出し難い。Rayleighの方法によるならば、假定せる撓曲線によつて歪エネルギーを計算すべき所を、計算を簡単にする爲に拱頂に集中荷重を加へたる時の撓曲線が、假定の撓曲線と同形であるとみなしたのである。之は荷重分布がかなり異なるも、撓曲線に於ては大差ないと云ふ経験から着

想されたものと思はれるが、撓量が近似するも歪エネルギー量にはかなりの相違もあり得るのであるから、この方法がかくの如き良い結果を得たことについてはかなり好運であつたと云ふより他はない。著者の導ける嚴密解を通じてこの解法を見直す時は Brownの方法の意義は次の如くなる。即ち M を梁の全重量として (99) 式を書き變へると

$$p^2 = \frac{2\eta}{\frac{3}{4}M\delta} \dots\dots\dots (100)$$

となる。しかるに中央點に唯 1 個の集中荷重 M をもつ、重量なき梁の對稱なる振動の基本式は (78) によつて

$$u(\theta) = \frac{Mp^2}{2gP} v\left(\theta, \frac{\alpha}{2}\right) u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

上式に於て $\theta = \alpha/2$ とおけば

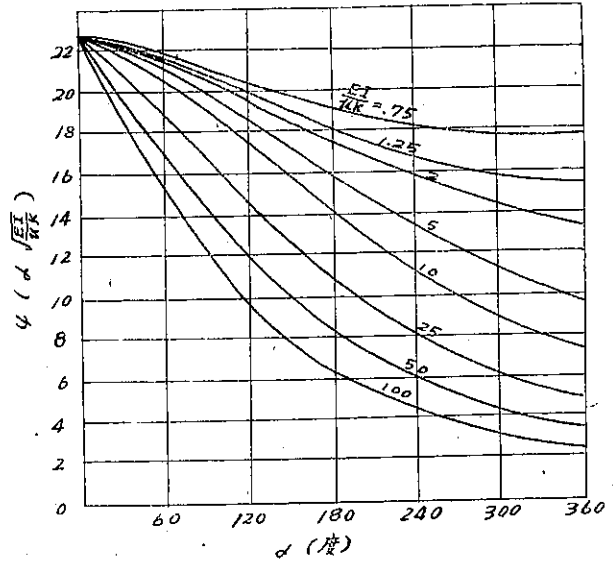
$$u\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Mp^2}{2gP} v\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

しかるに $\frac{v\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)}{P}$ は δ であるから

$$p^2 = \frac{2\eta}{M\delta} \dots\dots\dots (101)$$

之は中央點に集中荷重 M を有する質量なき圓梁の cyclic frequency を與へる式である。この式と (100) とを比較せば Brownの式は次の如く言ひ表はすことが出来る。「断面一樣なる圓形曲り梁の第1次自由振動週期はその全質量の 3/4 が梁の中央に集中せるものとみなしたる時の週期に等し」かく書き改めるならば Brownの方法の推論の過程は簡單且明瞭となる。即ち全質量が中央に在りとみなす事が無理なる事は明であるが、しかし、

圖-21.

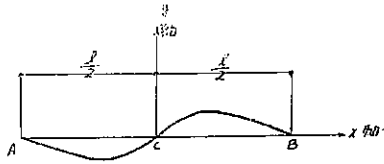


中央點が撓み兩端は固定されてゐるのであるから、單に全質量を中央と固定端に 1/2 づつ配合する事も妥當でない。依つてきわめて常識的ではあるがその平均をとりて 3/4 を中央に 1/4 を固定端に配合せる場合が即ち Brown の方法と考へられるのである。

6. 2 次振動の近似解法

Rayleigh の方法は一般に最低振動についてのみ成立つことが證明されてゐる爲か、如何なる振動問題に於ても高次振動の近似解は餘り試みられない様である。圓梁の高次振動については先に解法を得たのでその値を求むる事は困難ではないが、嚴密解が正確に圓形軸線をもつ曲り梁についてのみ可能なるに反し、近似解はその性質上軸線が完全に圓形ではない場合にも擴張して用ひ得ると豫想されるので、近似解について研究する事も必要であると思はれる。一般には高次振動に對しては Rayleigh の方法は用ひ得ないのであるが、節點の位置と彈性條件とが推定し得られる時は、固定端と節點との間の部材を單獨なる梁であるとみなし、その梁の 1 次固有週期を Rayleigh の方法を以て近似的に求むれば之即ち高次振動週期の近似値であつて、このことは Brown の方法についても同様に言ひ得るのである。著者はこの考のもとに圓梁の 2 次

圖-22.



振動數を表はす近似式を得たが、先づこの方法を説明する爲に兩端を固定せられたる直線梁の 2 次振動數を近似的に求め嚴密解との比較を試みよう。兩端固定梁 AB の 2 次振動形は圖-22 に示す様に中央に節點を有し左右逆對稱なる曲線であることは容易に推定されるであらう。この時曲線は A, B 兩端にて固定の條件、即ち $y=0$ 及 $y'=0$ を、中央 C にて $y=0, y''=0$ を満足する。よつて AB 梁を C に於て切斷し CB 部分を C 點を鉸、B 點を固定されたる單獨なる梁 CB と考へる時は、CB 梁の 1 次振動に於ける境界條件と AB 梁の 2 次振動に於ける C 及 B 點における彈性條件とは同一である。したがつて兩者は同じ振動をなさねばならぬ。しかるに第 1 次振動數の計算には Rayleigh の方法を用ひ得るのであるから、之によつて CB 梁の 1 次振動數を求むれば、之即ち AB 梁の 2 次振動數に他ならない。それ故に CB 梁の振動曲線を適當に假定し得れば 2 次振動に對する充分なる近似値が得られるであらう。

CB 梁の振動曲線形を次の如く假定する。

$$y = \sin \frac{2\theta_0 x}{l} - \frac{2x}{l} \sin \theta_0$$

但 $\theta_0 = 4.4934 = 257^{\circ}27'$

茲に $l/2$ は CB の長さであり θ_0 は三角方程式 $\tan \theta_0 = \theta_0, \pi < \theta_0 < \frac{3}{2}\pi$ の解である。この曲線は $x_0 = 0.3882 \times \frac{l}{2} = v \cdot \frac{l}{2}$ に於て極大値 $y_0 = 1.3551$ となり CB 兩點にて境界條件を満足する事は容易に驗證される。m を梁の單位長當り重量、EI を剛性率、p を cyclic frequency とせば Rayleigh の方法により

$$p^2 = \frac{\int_0^{l/2} EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^{l/2} \frac{m}{g} y^2 dx}$$

上式の y を代入せば $\int_0^{l/2} y^2 dx = \frac{5}{12} l \sin^2 \theta_0$ 、及 $\int_0^{l/2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{4\theta_0^4}{l^2} \sin^2 \theta_0$ なるを以て

$$p = 62.56 \sqrt{\frac{gEI}{ml^4}}$$

となる。

之は前述の理由により AB 梁の 2 次振動の cyclic frequency と考へる事が出来るが從來よく知られてゐる
厳密解

$$\delta = 61.67 \sqrt{\frac{gEI}{ml^2}}$$

に比較せば誤差は 1.44% であつて豫期の如く良好なる一致を示してゐる。

次に Brown の考へ方を擴張して適用して見やう。C 點より $vl/2$ なる位置に P なる荷重がある時載荷點の
撓み δ は公式により

$$\delta = \frac{(1-\nu)^{3/2} P}{96EI} \{4 - 9(1-\nu) + 6(1-\nu)^2 - (1-\nu)^3\} = 0.001218 \frac{l^3 P}{EI}$$

である。

従つて梁内に含まるゝ歪エネルギーは

$$W = \frac{P}{2} \delta$$

となる。振動曲線を

$$y = \left\{ \sin \frac{2\theta_0 x}{l} - \frac{3x}{l} \sin \theta_0 \right\} \frac{\delta}{y_0} \dots \dots \dots (102)$$

と假定せば運動エネルギー T は

$$T = \frac{m}{2g} p^2 \int_0^{l/2} y^2 dx = \frac{5m\delta^2 p^2 l \sin^2 \theta_0}{24gy_0^2}$$

となる。

よつて

$$W = T \quad \text{とおけば}$$

$$p = \sqrt{\frac{24 y_0^2 g EI}{2 \times 5 \times 0.001218 \sin^2 \theta_0 ml^4}} = 61.63 \sqrt{\frac{g EI}{ml^2}}$$

之を厳密解と比較するとその誤差は 0.07% 弱となり良好なる結果を示してゐる。

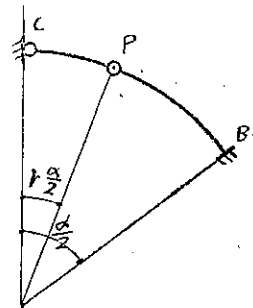
之と同様な推論を圓梁に對して擴張する事が出来る。圓梁 ACB の 2 次振動における中央點 C の彈性條件は $v_c = 0, \beta_c = 0, M_c = 0$ にして、固定端 B における條件は $v_B = 0, \beta_B = 0, \varphi_B = 0$ である。よつて BC 部分のみを單獨に考へれば、之は一端を固定され他端を絞（但振れに對しては固定）にて固着せられたる圓梁と考へる事が出来るから、CB 梁の 1 次振動は即ち AB 梁の 2 次振動に相當する。CB 梁の C 點より $v\alpha/2$ だけ距離の點 P に單位集中荷重を荷し（圖-23）その點の撓みを δ とすれば梁内に含まれる歪エネルギーは $W = \delta/2$ である。CB の振動曲線を

$$v = \frac{\delta}{y_0} \left(\sin \frac{2\theta_0 \varphi}{\alpha} - \frac{2\varphi}{\alpha} \sin \theta_0 \right) \dots \dots \dots (103)$$

と假定せば、曲線は P 點にて撓み δ を有し兩端に於て撓みに關する境界條件を満足する。振動を振幅 v , cyclic frequency p なる單弦運動と假定せば運動エネルギーの極大値 T は

$$T = \frac{rmp^2}{2g} \int_0^{\alpha/2} v^2 d\varphi = \frac{5mr\alpha\delta^2 \sin^2 \theta_0}{24gy_0^2} p^2$$

圖-23.



となる。

$T=W$ とおきて

$$p^2 = 4.6256 \frac{g}{m\alpha\delta} \dots\dots\dots(104)$$

この式は前述の理由により AB 梁の 2 次振動の cyclic frequency を與へる近似式である。 δ の値は撓角法を用ふれば簡単に求める事が出来る。それによれば A 点における曲げモーメント M_A , 捩モーメント T_A , 剪断力 S_A 及載荷點の曲げモーメント M_P は

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{GL_2 + \frac{H}{2}L_4}{A-B} \\ T_A &= \left(\cot \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) M_A + \frac{L_3}{\alpha} \\ S_A &= \frac{1}{\alpha\gamma} (L_6 - 2M_A) \\ M_P &= M_A \cos \xi + (rS_A - T_A) \sin \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(105)$$

となり撓みは (40) により

$$\delta = G \left(1 - \frac{\sin \xi}{\xi} \right) (\xi^2 S_A + M_A - M_P) - A' M_A - B' M_P \dots\dots\dots(106)$$

茲に A, B は夾角 α に関する A, B であつて (34), (35) によつて與へられ A', B' は夾角 ξ に関する A, B であつて

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{H}{2} \left\{ \frac{\xi}{\sin \xi} - \cos \xi - i \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi \right) \right\} \\ B' &= \frac{H}{2} \left\{ 1 - \xi \cot \xi - i \left(1 - \frac{\sin \xi}{\xi} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(107)$$

を以て與へらる。

(104) の近似式によれば振動数は δ に逆比例し、 P 點に集中荷重を加へたる時の載荷點の撓みが大なる程振動はおそいことがわかる。之によれば 靜力學上の研究の結果から 2 次振動に及ぶ斷面の剛度、夾角 α 等の影響を推定する事が出来るし、且靜的撓みを測定する事によつて振動数を推定する事も出来るのである。

この解法を嚴密解法を通じて見直して見ると次の如く考へる事も出来る。即ち P 點に集中重量 M をもつ重さなき圓梁の 2 次振動の基本式は (89) によつて

$$u(\theta) = \frac{Mp^2}{gP} v(\theta, \xi) u(\xi)$$

この式にて $\theta = \xi$ とおき且 $\frac{v(\xi, \xi)}{P} = \delta$ なる事を考慮すれば

$$p^2 = \frac{g}{M\delta}$$

しかるに (104) 式に於て $m\alpha$ は梁の全重量 M であるから之を書き變へて

$$p^2 = \frac{g}{0.2162 M\delta}$$

と表はし、上式と比較する事によつて著者の近似解法は又次の如く表現する事も出来る。「斷面一なる圓梁の 2 次

自由振動週期は、中央點より左右に夫々 $0.3883 \cdot \frac{\alpha}{2}$ なる偏角の位置 (圖-24) に全質量の 21.62% 宛が集中してゐる如き重さなき圓梁の 2 次振動週期に等しい。

この結果は嚴密解による結果と比較されねばならない。一例として半径 a なる圓形断面をもつ鋼製圓梁に於て $\alpha=120^\circ$ なる場合について比較した結果は次の如くである。

1) 近似解

$$\alpha = 120^\circ = 2.0944, \quad \xi = 36^\circ 42' = 0.6406$$

$$M_A = -0.1975 r, \quad T_A = 0.0060 r$$

$$S_A = 0.5769 r, \quad M_P = 0.1828 r$$

$$\delta = 0.01345 \frac{r^3}{EI}$$

$$\therefore p^2 = \frac{4.6256}{2.0944 \times 0.01345} \frac{qEI}{mr^4}$$

$$\therefore p = 12.81 \sqrt{\frac{qEI}{mr^4}}$$

2) 嚴密解

$$K_3 = 0.1810, \quad K_4 = 0.01713$$

$$\lambda_e = 6.3748, \quad \frac{1}{b} = 0.5313$$

$$\therefore x = 0.0302, \quad p = 12.95 \sqrt{\frac{qEI}{mr^4}}$$

兩者の誤差は 1.8% にして豫期の如く良好なる一致を示し、2 次振動の近似値算定に關する著者の推論が妥當なることを示してゐる。(昭. 17. 12. 2. 受付)