

# 論 說 報 告

第 29 卷 第 1 號 昭和 18 年 1 月

## 地盤の耐支力及び内部の應力分布に就て

准會員 大 地 羊 三\*

要旨： 應力函数を用ひて地盤内の應力分布を求め、更に粘着力の無い地盤の耐支力を算出する式を求めたものである。

### 1. 緒 論

地盤内部に於ける應力の擴がり及び分布に關する公式は種々あるが之等はすべて Boussinesq の公式<sup>(1)</sup>を基礎として居る。即ち Strohschneider<sup>(2)</sup> は擴がりの限界角が  $90^\circ$  より小なる値を取るべきものであると云ふ事から Boussinesq の公式を修整し、Fröhlich<sup>(3)</sup> は土が完全な弾性體でないこと云ふ事を基礎として集中係數  $n$  を含む公式を誘導したのである。

しからは擴がりの限界角が  $90^\circ$  より小なる値を取ると云ふ事と Fröhlich が主張する様な壓力分布を示すと云ふ事が同時に成立し且つ地盤内の全應力を求める公式が出来ないであらうか。著者は本問題を二次元的に取扱ひ地盤内部の壓力を求める計算式を出し、更に其れを利用して地盤の耐支力を求めて見たのである。

先づ擴がりの限界角が  $90^\circ$  より小なる値を取ると云ふ事の方に注目する。二次元の問題であるから應力函数を用ひる事が考へられる。そこで地中に生ずる壓力が載荷點  $o$  からの距離に逆比例するとして適當な境界條件（之が限界角に關係あり）を満足する Airy の應力函数を見附けてみた。しかし此の様な境界條件を満足する Airy の應力函数は應力が  $o$  より距離の  $n$  乗に逆比例すると假定する限り見當らぬ事が解つた。故に應力函数を今少し擴張して平衡条件のみを満足し適合條件は満足しなくてもよいものと考へ（土は完全なる弾性體に非ざる故）Fröhlich の集中係數  $n$  に似た一つのパラメーターを含む應力函数を求めた。應力函数が定まれば地盤内部に生ずる應力の分布は解けた譯である。

以上は線荷重に就て述べたのであるが帶狀面荷重に對しても次の如く考へる事に依て線荷重の場合に歸着せしめる事が出来る。即ち帶狀をなす等布荷重に依る地盤内部の應力状態は等布荷重の兩端に於て地表面の鉛直線と  $\varphi$  なる擴がりの限界角をなす 2 つの直線の交點  $o$  に全荷重  $P = pb$  が線荷重として働いた場合の應力状態と全く同じであると考へるのである。かくの如く考へれば從來不明であつた荷重直下の壓力分布を求める事が出来る。

更に地盤の耐支力に就て次の如く考へた。荷重の下に裏を考へる事は從來の方法と變りないが此の地盤の崩壊は楔の頂點に於て土が平衡を保ち得ない時に起るものと考へるのである。即ち頂點に於て 3 つの主應力の比が

\* 工學士

$$(1) \sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^4}$$

$$(2) \sigma_z = \frac{3P \cos \theta - \cot \varphi \sin \theta \cos^4 \theta}{2\pi} \frac{1}{1 - \cos \varphi} \frac{1}{z^2}; \text{ "Elastische Druckverteilung," Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Feb. 1912}$$

$$(3) \sigma_z = \frac{nP}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R}\right)^n; \text{ Fröhlich: "Druckverteilung im Baugrunde." 1934.}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho}$$

となつた時であるとする ( $\sigma_1, \sigma_2$  は荷重に依る應力のみならず土の重量に依る應力をも加算したものである)。最後に擴がりの限界角に就て一言する。安藏教授の説<sup>(4)</sup>に従つて  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$  を取つた。其の理由は次の如くである。荷重  $P$  により荷重の外側の土は押上げられようとして居り土の自重及び内部摩擦が之に抵抗してゐる。之は垂直壁の理論に於ける受動土壓の場合に似てゐる。そして此の垂直壁の場合影響角として地表面が水平な時には  $\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$  が用ひられる。故に今の場合も限界角を  $\frac{\pi}{2} + \frac{\rho}{2}$  に取つたのである。

## 2. 地盤の内部に於ける應力分布

應力函數を求める前にその應力函數が満足せねばならぬ條件に就て考へれば、先づ應力分布が載荷點  $o$  を通る鉛直線に對して對稱でなければならぬ。即ち式で書けば

$$\Phi(r, \theta) = \Phi(r, -\theta) \dots \dots \dots (1)$$

次に  $\theta = \varphi$  (擴がりの限界角) ですべての應力が零になると云ふ境界條件がある。

$$(\sigma_r)_{\theta=\varphi} = (\sigma_\theta)_{\theta=\varphi} = (\tau)_{\theta=\varphi} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

第三に地盤を任意の半徑  $r$  を持つ圓形斷面で切つた時其處に生ずる應力の鉛直方向の成分の和は荷重  $P$  に等しくして  $r$  に無關係でなければならぬ。即ち次の如くなる。

$$P = 2 \int_0^\varphi (\sigma_r \cos \theta - \tau \sin \theta) r d\theta$$

然るに

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}$$

故に

$$P = 2 \int_0^\varphi \left\{ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \cos \theta - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \right\} r d\theta$$

之を變形し積分すれば結局次の如くなる。

$$\frac{P}{2} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cos \varphi \right]_0^\varphi$$

$$\text{又は } \frac{P}{2} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{\theta=\varphi} \sin \varphi + \frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\varphi} \cos \varphi - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

以上 (1), (2) 及び (3) 式が應力函數  $\Phi(r, \theta)$  の満足せねばならぬ條件である。

應力函數を決定するに當つて先づ應力が  $r^{-n}$  に比例するものとする。此の時應力函數は

$$\Phi(r, \theta) = f(\theta) \frac{1}{r^{n-2}}$$

となり、應力は次の如くなる。

(4) Anzo: "Pressure Exerted by Granular or Pulverulent Material." 九大工學部紀要 7-2.

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \theta^2} = \frac{f'' - (n-2)f}{r^n} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} = \frac{(n-2)(n-1)f}{r^n} \\ \tau &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{(n-1)f'}{r^n} \quad \left( \text{但し } f' = \frac{df}{d\theta}, f'' = \frac{d^2f}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right.$$

之を (3) 式に代入すれば

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{r^{n-1}} \left\{ -(n-2)(f)_{\theta=\varphi} \sin \varphi + (f')_{\theta=\varphi} \cos \varphi - (f')_{\theta=0} \right\}$$

となり、 $r$  に無関係なる爲には  $n=1$  でなければならぬ。

では應力が  $r^{-1}$  に比例するものと考へればどうであらうか。此の時は應力函數は次の如くなる。

$$\bar{\Phi}(r, \theta) = g(\theta) \cdot r \quad \dots \dots \dots (4)$$

土が完全な弾性體であるならば應力函數は次の適合條件を満足せねばならぬ。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

之に (4) 式を代入すると結局

$$\frac{d^4 g}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 g}{d\theta^2} + g = 0$$

となる。此の微分方程式の一般解は  $A, B, C$  及び  $D$  を積分常數とすれば次の如くなる。

$$g(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta + C\theta \cos \theta + D\theta \sin \theta$$

こゝに於て  $g(\theta)$  が偶函數なる事及び  $r \cos \theta$  なる應力函數は應力が零となる故現在問題になる  $g(\theta)$  の値は

$$g(\theta) = D \cdot \theta \sin \theta$$

のみとなる。故に任意に定められる常數は應力函數の内に 1 つしかない。然るに満足せねばならぬ條件は (2) 及び (3) 式と 2 つ有る。即ち常數が 1 つ不足である。そこで土が完全な弾性體でないと言ふ理由から次の如き函數

$$B \cdot \cos n\theta$$

を  $g(\theta)$  に附加して常數の不足を補ふ事にする。こゝに  $n$  は Fröhlich が用ひた集中係數の如き作用をなす常數である。結局求むべき應力函數は次の如き形を成してゐる。

$$\bar{\Phi}(r, \theta) = (D\theta \sin \theta + B \cos n\theta)r \quad \dots \dots \dots (4a)$$

(4a) 式を (2) 及び (3) 式に代入して常數  $D, B$  を決定すれば求むる應力函數は次の如くなる。

$$\bar{\Phi}(r, \theta) = \kappa \left( \frac{\theta \sin \theta}{2} - \lambda \frac{\cos n\theta}{1-n^2} \right) r \cdot P \quad \dots \dots \dots (4b)$$

$$\text{但し } \frac{1}{\kappa} = \varphi + \frac{n-1}{n+1} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2n}{n^2-1} \lambda \sin(n-1)\varphi, \quad \lambda = \frac{\cos \varphi}{\cos n\varphi}$$

(4b) 式を用ひると地盤内部の應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \kappa (\cos \theta - \lambda \cos n\theta) \frac{P}{r} \\ \sigma_\theta &= \tau = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

最後に  $n$  の値を決定する。此の  $n$  の値は實驗に依つて定めるのが至當であるが著者は載荷點眞下の鉛直應力  $\sigma_z$  が Fröhlich の公式より求めた  $\sigma_z$  と一致する様に  $n$  を定めた。

此の Fröhlich 公式中の集中係数  $n_1$  は Cummings<sup>(5)</sup> が歐米各地で行はれた是迄の實驗の結果を綜合して6と定めたものである。従つて著者の採つた  $n$  の決定法は間接ではあるが實驗に依つて定めたものと言ふて差支ないと思ふ。

そこで集中荷重  $P_1$  に対する Fröhlich の公式は

$$\sigma_z = \frac{n_1 P_1}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R}\right)^{n_1} \quad (R^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

である。之れを線荷重  $P$  に対する公式に書き換へれば

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{n_1}{2\pi r} \left(\frac{z}{r}\right)^{n_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P dx}{\left[1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]^{\frac{n_1+2}{2}}} \quad (r^2 = y^2 + z^2) \\ &= \left(\frac{n_1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{n_1 \theta} d\theta\right) \cos^{n_1 \theta} \frac{P}{r} \end{aligned}$$

Cummings の研究に依り  $n=6$  とすれば載荷點真下の鉛直壓力は次の如くなる。

$$\sigma_z = 0.938 \frac{P}{r} \dots\dots\dots (b)$$

著者の計算式 (5) より載荷點真下の鉛直壓力は

$$\sigma_z = (\sigma_r)_{\theta=0} = \kappa(1-\lambda) \frac{P}{r}$$

今假りに  $n$  を 2 及び 3 として  $\kappa(1-\lambda)$  の値を計算すれば 表-1 の如くなる。

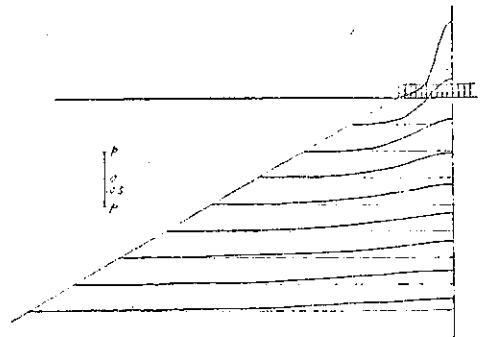
表-1. 摩擦角  $\rho$  と 常數  $\kappa, \lambda$  の關係

$\rho$	$n=2$			$n=3$		
	$\kappa$	$\lambda$	$\kappa(1-\lambda)$	$\kappa$	$\lambda$	$\kappa(1-\lambda)$
35°	0.459	-0.805	0.828	0.633	-0.466	0.929
30	0.426	-1.000	0.852	0.629	-0.500	0.943
25	0.386	-1.271	0.876	0.625	-0.543	0.965
20	0.339	-1.677	0.906	0.621	-0.593	0.990
15	0.273	-2.350	0.915	0.610	-0.659	1.011
10	0.207	-3.695	0.971	0.599	-0.742	1.043
5	0.116	-7.79	1.020	0.581	-0.854	1.079
0	—	— $\infty$	—	0.559	-1.000	1.118

上表中の  $\kappa(1-\lambda)$  は Fröhlich 公式から導いた (b) 式の係數 0.938 に相當するもので是等兩者を比較すれば  $\rho$  が 30° 附近では  $n=3$  とするのが至當である。然し  $\rho$  が 15° より小さくなれば  $n=2$  とした方が良い。

圖-1~3 は  $\rho=30^\circ, n=3$  とした時の地盤内部の應力  $\sigma_z, \sigma_x$  及び  $\tau_{xy}$  の分布圖である。

圖-1.  $\sigma_z$  の 分布圖



(5) Cummings: "Distribution of Stresses under a Foundation." Proc. A. S. C. E. 1935.

圖-2.  $\sigma_x$  の分布圖

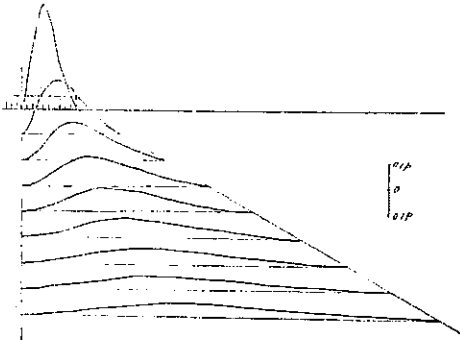
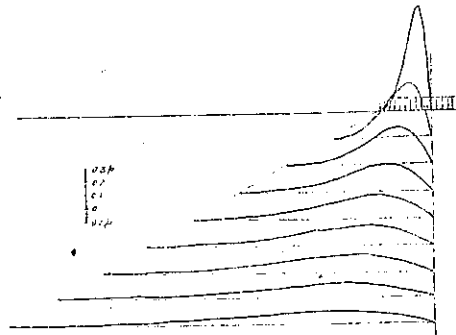


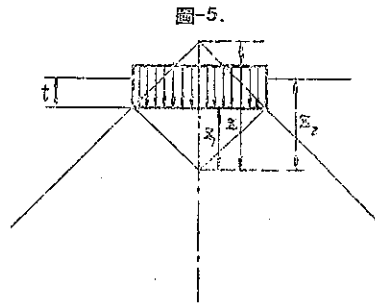
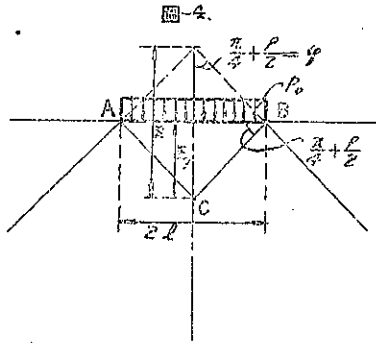
圖-3.  $\tau_{xy}$  の分布圖



### 3. 地盤の耐支力

地盤の耐支力が地表面に載荷せられた荷重の幅の影響を受ける事は明らかである。然るに現在一般に用ひられて居る Rankine の式<sup>(4)</sup>及び Reissner の式<sup>(7)</sup>は荷重の幅には無関係である。Terzaghi の式<sup>(8)</sup>は荷重の幅を考へて居るが、この式は實驗に重きを置きすぎて居る爲理論的には不十分な點が有る様に思はれる。

著者は 圖-4 の如く荷重の下に楔 ABC を考へ C 點附近の土が平衡を保ち得なくなつた時に地盤が崩壊するものとした。



今土の自重のみに依る土壓として Rankine の受動土壓を取り之を  $(\sigma_r)_R$ ,  $(\sigma_\theta)_R$ ,  $(\tau)R$  で表はす事にする。又荷重のみに依る應力を  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau$  で表はす事にする。と C 點に於ける 2 つの主應力は  $\sigma_r + (\sigma_r)_R$  及び  $(\sigma_\theta)_R$  である。故に平衡の極限において

$$\frac{\sigma_r + (\sigma_r)_R}{(\sigma_\theta)_R} = \frac{\kappa(1-\lambda) \frac{P_0}{r} + wv_1}{wv_1 \tan^2 \varphi} = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} = \tan^2 \varphi$$

$$(6) \quad p = \left( \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 wv$$

$$(7) \quad p = wt \left( \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \right) e^{\sigma \tan \rho}; \quad \text{Proc. 1st International Congress for Applied Mechanics, 1924.}$$

$$(8) \quad p = wt \left( \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \left[ 1 + \frac{t}{l} + c \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore P_0 &= \frac{(\tan^2 \varphi + 1)^2 (\tan^2 \varphi - 1)}{\kappa(1-\lambda)} \gamma^2 w \\ \text{又は } P_0 &= \frac{(\tan^2 \varphi + 1)^2 (\tan^2 \varphi - 1)}{2\kappa(1-\lambda)} \omega l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

但し  $w$  は土の単位容積の重量又  $P_0 = 2l p_0$  は根入れの無い場合の地盤の耐支力を表はす。

根入れの有る場合には 圖-5 より

$$\frac{\sigma_r + (\sigma_r)_R}{(\sigma_\theta)_R} = \frac{\kappa(1-\lambda) \frac{P}{r} + \gamma r_2}{\gamma r_2 \tan^2 \varphi} = \tan^2 \varphi$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore P &= P_0 \left( 1 + \frac{1}{\tan \varphi} \frac{t}{l} \right) \\ \text{又は } P &= p_0 \left( 1 + \frac{1}{\tan \varphi} \frac{t}{l} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6')$$

例題  $\rho = 30^\circ$  とすれば  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} = 60^\circ$  又 表-1 より

$$\kappa(1-\lambda) = \begin{cases} 0.852 & (n=2) \\ 0.943 & (n=3) \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{(3+1)^2(3-1)}{2 \times 0.852} \omega l = 18.8 \omega l \quad (n=2)$$

$$= \frac{(3+1)^2(3-1)}{2 \times 0.943} \omega l = 17.0 \omega l \quad (n=3)$$

圖-6. 摩擦角  $\rho$  と耐支力との關係 (根入れの無い場合)

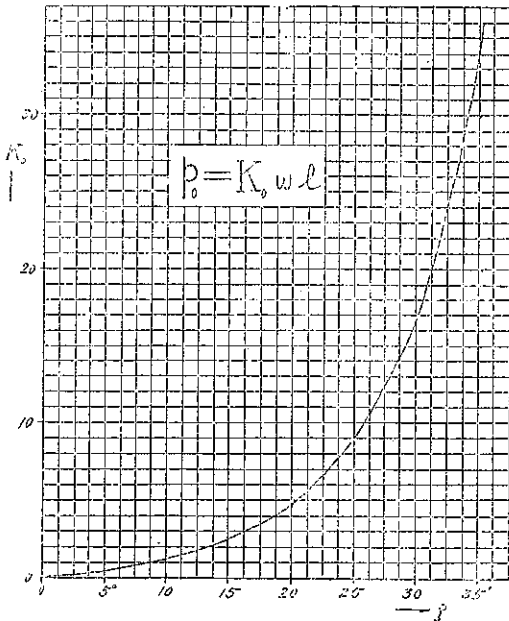


圖-7. 摩擦角  $\rho$  と耐支力との關係 (根入れの有る場合)

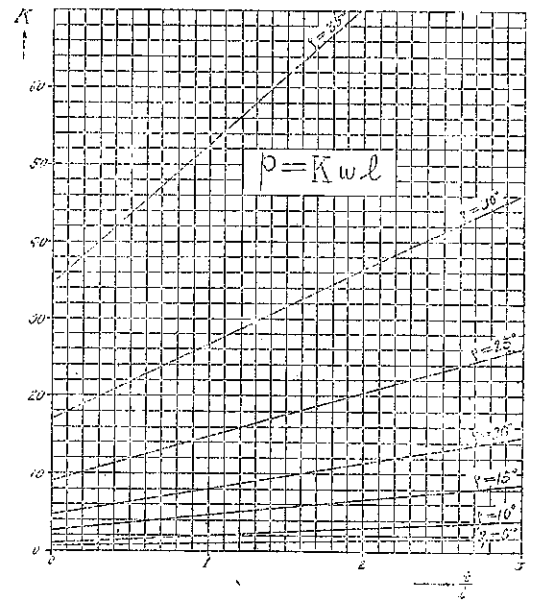


圖-6 及び 圖-7 は摩擦角  $\rho$  の變化に伴ふ耐支力  $P_0$  及び  $P$  の變化を圖示したものである。又 圖-8, 9 は (6) 式と他の公式を比較したものである。

圖-8. 新公式と Terzaghi の式との比較  
( $\rho = 30^\circ$ )

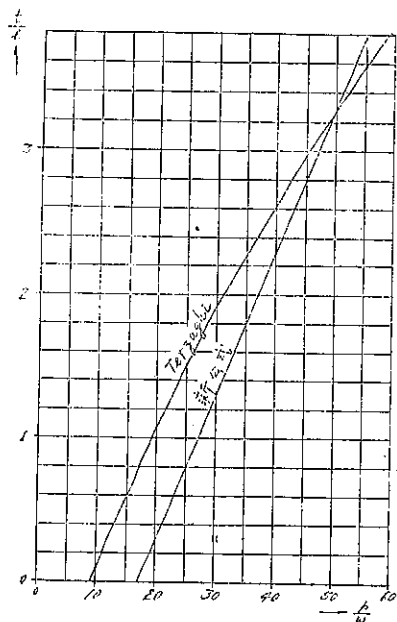
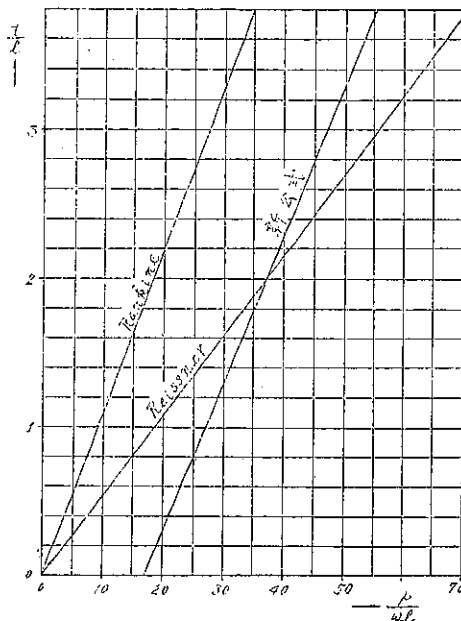


圖-9. 新公式と Rankine 及び Reissner の式との比較  
( $\rho = 30^\circ$ )



#### 4. 結 論

上述の理論より次の如き事項が明かになつた。

- (1) 集中荷重及び等布荷重に依る地盤内部の應力の分布状態
- (2) 等布荷重の載荷面に於ける壓力の分布状態
- (3) 地盤の耐支力

尙是等の結果を用ひて崩壊面を出して見れば面白い結果が得られた事と思ふ。更に實驗をなして理論と比較すべきであつたが時間が無くて出来なかつた。後日もつと完全なものとして發表したいと思つて居る。

附記： 本論文は九州帝國大學工學部土木科卒業に際し安藏教授の御指導の下に作製した卒業論文を簡單に纏めたものである。本原稿は卒業後入管までの僅か數日の短期間に書き上げたものであるから十分推敲の餘地なく未熟なものである事を密に恥る次第である。先輩諸氏の御教示を得ば幸甚である。

尙本稿を終るに當り懇切なる御指導を賜つた安藏教授に謝意を表す。