論　說　報　告

第29卷第1號　昭和18年1月

載荷架構の上下振動週期に對する實用算定公式の提案

（昭和 17 年 10 月 10 日第 4 回年次學術講演會に於て）

正會員　工學博士　酒　井　忠　明*

要　旨　蒸氣タービン，發電機等の架構式臺座の固有振動數を算出するに便する爲め，各種型式の載荷架構の上下振動週期に對する實用算定公式を誘導提案したものである。

1. 緒　　言

蒸氣タービン，發電機其の他廻轉する機械を架構式臺座の上に据付けることが屢々行はれるが，此の場合臺座の固有振動數は其の上に据付けられる機械の廻轉數より 20～25 % 位多いことが望ましいのである。然るに此の載荷架構の固有振動週期を計算することは多くの場合極めて手數を要する仕事である。著者は玆に各種型式の載荷架構の上下の固有振動週期を簡單に計算し得る公式を誘導提案せる次第である。

2. 實用算定公式の誘導理論

載荷架構が固有振動をしてゐる場合を考へるに，架構が最大振幅に達した瞬間に於ては速度は零なるが故に，運動のエネルギーは零にして，架構の有するエネルギーは全部歪のエネルギーとなり歪のエネルギーは最大である。

逆に架構が平衡の位置を通過する瞬間に於ては撓みは零なるが故に歪のエネルギーは零にして架構の有するエネルギーは全部運動のエネルギーとなつて現はれ，運動のエネルギーは最大となる。故に振動體が外部よりエネルギーを受けることなければこの振動體の有するエネルギーは常に一定にして，最大歪のエネルギーは最大運動のエネルギーに相等しきことゝなる。

架構が最大振幅に達した瞬間に於ける任意點の變位を η，曲げモーメントを M とすれば，最大歪エネルギー $E_{p\max}$ は曲げモーメントによるエネルギーのみを考へて

$$E_{p\max}=\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}dx$$

然るに

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$$

なる熟知の關係ある故に

$$E_{p\max}=\frac{1}{2}\int EI\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx \cdots\cdots(1)$$

以上の式に於て E は材料の彈性係數，I は任意點の部材斷面の慣性モーメントを表はす。

又振動中の架構の各部分は同一週期を以て單弦運動

*　北海道帝國大學教授

$$y=\eta\sin pt$$

をなし從つて運動のエネルギー E_k は任意部分に於ける單位長の質を ρ, 其の速度を v とすれば次の如く表はされる。

$$\begin{aligned}E_k&=\frac{1}{2}\int\rho v^2dx\\&=\frac{1}{2}\int\rho\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dx\\&=\frac{1}{2}\int\rho p^2\eta^2\cos^2 pt\,dx\\&=\frac{1}{2}\int\rho p^2\eta^2(1-\sin^2 pt)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int\rho p^2(\eta^2-y^2)\,dx\end{aligned}$$

從つて最大運動のエネルギー $E_{k\max}$ は $y=0$ に於て

$$E_{k\max}=\frac{1}{2}p^2\int\rho\eta^2dx \qquad \cdots\cdots(2)$$

(1) と (2) の兩式を等しと置いて

$$p=\sqrt{\frac{\int EI\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx}{\int\rho\eta^2dx}}$$

然るに又振動週期 T は

$$T=\frac{2\pi}{p} \qquad \cdots\cdots(3)$$

なる關係あるを以て

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\int\rho\eta^2dx}{\int EI\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx}} \qquad \cdots\cdots(4)$$

扨て (4) 式に於て η は未定であり從つて積分方程式の理論に依つてこの正解を得べきも實用的解法として次の近似解法が使用せられてゐる[1]。即ち第一近似計算として各質點に働く加速度が同一であると考へて振動曲線 η を假定するのである。從つて圖-1 の如き 2 徑間梁に於て圖示の如き振動を考へる場合には，荷重による撓み曲線に相似な形をとるものとして η を決め，又同梁に於て圖-2 の如き振動を考へる場合には，曲線の脹れ出る方向に荷重が作用するものとしてその撓み曲線を求め之に相似な形をとるものとして η を決めるのである。

實際問題としてこの第一近似計算のみにて充分精度の高き結果が得られるものである。

然るに又實際の荷重狀態如何に拘はらず部材中央に單一力 P のみが作用する場合の撓み曲線に相似な形をとるものと考へても前近似法同樣の精度の高い結果が得られるものである。

今滿載等布荷重 w を擔ふ徑間 l なる單純梁及び固定梁に於て，原振動曲線を梁の擔ふ等布荷重による撓み曲

1) "Praktische Wege zur angenäherten Schwingungsberechnung elastischer Systeme". von K. Hochenemser. Ingenieur-Archiv, 1930 s. 271.

圖-1.

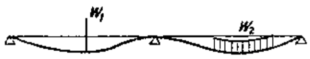
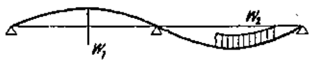


圖-2.



線に相似の形をとるものと假定した場合と，梁の中央に單一力 P のみが働くものと考へた時の，撓み曲線に相似の形をとるものと假定した場合の固有振動週期を算出し之を正解法による結果と比較してみやう。

單　純　梁:

(i)　振動曲線を滿載等布荷重による撓み曲線と相似と假定する場合

撓み曲線　$$\eta=\frac{wx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$$

最大歪エネルギー　$$E_{p\max}=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^l w\eta dx=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{w^2x}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$$

$$=\frac{1}{240}\frac{w^2l^5}{EI}$$

玆に最大歪エネルギーはこの歪を與へた荷重の爲した仕事 $\frac{1}{2}\int_0^l w\eta dx$ に等しと置いて計算したものである。

最大運動エネルギー　$$E_{k\max}=\frac{1}{2}p^2\int_0^l\rho\eta^2dx=\frac{wp^2}{2g}\int_0^l\left\{\frac{wx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)\right\}^2dx$$

$$=\frac{1}{2\cdot21\cdot24\cdot24}\frac{w^3l^9p^2}{gE^2I^2}$$

最大歪エネルギーと最大運動エネルギーを等しと置き更に (3) 式の關係を用ひ,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{5}{504}}\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}}\quad\text{或は}\quad 0.626\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}}\quad\cdots\cdots(5)$$

(ii)　振動曲線を中央單一力 P による撓み曲線と相似と假定する場合

撓み曲線　$$\eta_{x=0\sim l/2}=\frac{P}{48EI}(3l^2x-4x^3)$$

$$\eta_{x=l/2}=\eta_0=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}$$

最大歪エネルギー　$$E_{p\max}=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}P\eta_0$$

$$=\frac{1}{96}\frac{P^2l^3}{EI}$$

最大運動エネルギー　$$E_{k\max}=\frac{1}{2}p^2\int_0^l\rho\eta^2dx=2\cdot\frac{wp^2}{2g}\int_0^{l/2}\eta^2dx$$

$$=\frac{wp^2}{g}\int_0^{l/2}\left\{\frac{P}{48EI}(3l^2x-4x^3)\right\}^2dx$$

$$=\frac{17}{48\cdot48\cdot70}\frac{wP^2l^7p^2}{gE^2I^2}$$

從つて

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{17}{1\,680}}\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}}\quad\text{或は}\quad 0.632\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}}\quad\cdots\cdots(6)$$

(iii)　正　　解

$$T=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \quad 或は \quad 0.637\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \qquad (7)$$

固 定 梁:

(i) 振動曲線を滿載等布荷重による撓み曲線と相似と假定する場合

撓み曲線 $=\frac{wx^2}{24EI}(l^2-2lx+x^2)$

最大歪エネルギー $E_{p\max}=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^l w\eta\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{w^2x^2}{24EI}(l^2-2lx+x^2)dx$

$=\frac{1}{1\,440}\frac{w^2l^5}{EI}$

最大運動エネルギー $E_{k\max}=\frac{1}{2}p^2\int_0^l\rho\eta^2dx=\frac{wp^2}{2g}\int_0^l\left\{\frac{wx^2}{24EI}(l^2-2lx+x^2)\right\}^2dx$

$=\frac{1}{2\cdot24\cdot24\cdot630}\frac{w^3l^9p^2}{gE^2I^2}$

從つて

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{1}{504}}\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \quad 或は \quad 0.280\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \qquad (8)$$

(ii) 振動曲線を中央單一力 P による撓み曲線と相似と假定する場合

撓み曲線 $\eta_{x=0\sim l/2}=\frac{Px^2}{48EI}(3l-4x)$

$\eta_{x=l/2}=\eta_0=\frac{1}{192}\frac{Pl^3}{EI}$

最大歪エネルギー $E_{p\max}=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}P\eta_0=\frac{1}{384}\frac{P^2l^3}{EI}$

最大運動エネルギー $E_{k\max}=\frac{1}{2}p^2\int_0^l\rho\eta^2dx=2\cdot\frac{wp^2}{2g}\int_0^{l/2}\eta^2dx=\frac{wp^2}{g}\int_0^{l/2}\left\{\frac{Px^2}{48EI}(3l-4x)\right\}dx$

$=\frac{13}{36\cdot71\,680}\frac{wP^2l^7p^2}{gE^2I^2}$

從つて

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{13}{6\,720}}\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \quad 或は \quad 0.276\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \qquad (9)$$

(iii) 正 解

$$T=\frac{2\pi}{(ml)^2}\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \quad 或は \quad 0.281\sqrt{\frac{wl^4}{gEI}} \qquad (10)$$

玆に $ml=4.7300\,4$

以上の結果を綜合するに振動曲線を假定する近似計算の正解に對する誤差は極めて小であり表-1 に示すが如く何れも 2 % には達しない。

架構に於ては各部材の兩端は固定と單純支承の間にあり從つて架構の梁の上下振動を考へる場合，振動曲線を單一力の作用する場合の撓み曲線を使用するも良き結果を期待し得ることゝなる。

本論文に於ては載荷架構の上下振動週期を求むるにあたり，單一荷重を考へ之による撓み曲線を以て振動曲線に相似のものと假定し之が實用算定公式を誘導せんとするものである。

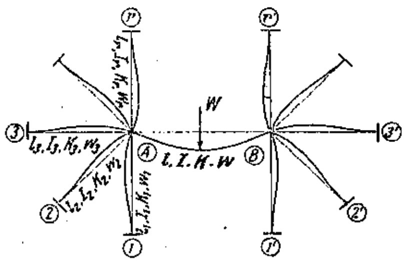
表-1. 近似値と正解値との誤差

梁の種類	等布荷重による撓み曲線を用ふる場合 (%)	單一荷重による撓み曲線を用ふる場合 (%)
單純梁	−1.7	−0.8
固定梁	−0.35	−1.8

3. 固定脚を有する載荷架構に對する固有振動週期算定公式の誘導

諸機械の臺座として用ひられる架構の一般形の一つとして W なる中央荷重を有する A~B なる梁の兩端が夫夫 r 個の固定脚を有する場合を考へる（圖-3 參照)。

圖-3.



圖中 l_i は A—i 部材の長さ, I_i は同部材斷面の慣性モーメント, K_i は I_i/l_i 即ち同部材の剛度, w_i は同部材の單位長の重量とする。又 A−B 部材に對しては是等を l, I, K, w を以て表はすものとする。

かゝる載荷架構の原振動曲線を A—B 梁の中央に P なる單一力のみ作用する場合の撓み曲線と相似なものと考へ先づ撓み曲線を次の如く計算する。

材端に働く曲げモーメントを M, 節點の廻轉角を θ とすれば, 熟知の撓角撓度式から

$$M_{AB}=2EK(\theta_A)-C_{AB},\qquad M_{A1}=2EK_1(2\theta_A)$$

$$M_{A2}=2EK_2(2\theta_A),\qquad M_{A3}=2EK_3(2\theta_A)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad M_{Ar}=2EK_r(2\theta_A)$$

玆に $\qquad C_{AB}=\dfrac{1}{8}Pl$

又

$$M_{1A}=2EK_1(\theta_A),\qquad M_{2A}=2EK_2(\theta_A)$$

$$M_{3A}=2EK_3(\theta_A),\ \cdots\cdots,\ M_{rA}=2EK_r(\theta_A)$$

是等の關係を節點 A に於ける平衡條件式

$$M_{AB}+M_{A1}+M_{A2}+M_{A3}+\cdots\cdot+M_{Ar}=0$$

に代入して

$$\theta_A=\frac{1}{2\{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)\}}\frac{C_{AB}}{E}$$

從つて

$$M_{AB}=-\frac{2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)}{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)}C_{AB},\qquad M_{A1}=\frac{2K_1}{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)}C_{AB}$$

$$M_{A3}=\frac{2K_2}{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)}C_{AB},\qquad M_{A3}=\frac{2K_3}{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)}C_{AB}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad M_{Ar}=\frac{2K_r}{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdot+K_r)}C_{AB}$$

今

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{K_1}{K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r}=\alpha_1, \quad \dfrac{K_2}{K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r}=\alpha_2, \\ \dfrac{K_3}{K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r}=\alpha_3,\ \cdots\cdots,\ \dfrac{K_r}{K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r}=\alpha_r \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}{K+2(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}=k \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

と置けば

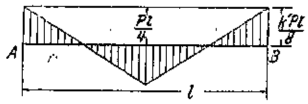
$$\left.\begin{array}{l} M_{AB}=-kC_{AB}, \quad M_{A1}=\alpha_1 kC_{AB}, \quad M_{A2}=\alpha_2 kC_{AB} \\ M_{A3}=\alpha_3 kC_{AB}, \quad \cdots\cdots\cdots, \quad M_{Ar}=\alpha_r kC_{AB} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

又

$$\left.\begin{array}{l} M_{1A}=\dfrac{1}{2}M_{A1}, \quad M_{2A}=\dfrac{1}{2}M_{A2}, \quad M_{3A}=\dfrac{1}{2}M_{A3} \\ \cdots\cdots\cdots, \quad M_{rA}=\dfrac{1}{2}M_{Ar} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

從つて A—B 部材の曲げモーメント圖は圖-4 の如くなり，A—B 部材の撓み曲線は撓みに關する Mohr の定理を用ひ

圖-4.



$$\eta_{AB}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{P}{48}(3l^2x-4x^3)-\frac{1}{2}\frac{kPl}{8}(lx-x^2)\right\}$$

$$=\frac{P}{48EI}\{3l^2(1-k)x+3klx^2-4x^3\}$$

$$\eta_{x=l/2}=\eta_0=\frac{(4-3k)Pl^3}{192EI} \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

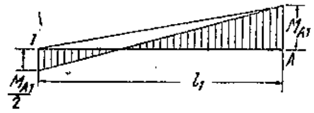
從つて又

$$\eta^2_{AB}=\left(\frac{P}{48EI}\right)^2\{9(1-k)^2l^4x^2+18k(1-k)l^3x^3-3(8-8k-3k^2)l^2x^4-24klx^5+16x^6\}$$

$$\int_0^{l/2}\eta^2_{AB}dx=\frac{(168k^2-427k+272)P^2l^7}{28\cdot40\cdot48\cdot48E^2I^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

又 A—1 部材の曲げモーメント圖は圖-5 の如くなり從つてこの部材の撓み曲線は

圖-5.



$$\eta_1=-\frac{1}{4El_1I_1}M_{A1}(l_1x^2-x^3)=-\frac{Plk\alpha_1}{32El_1I_1}(l_1x^2-x^3)$$

從つて

$$\int_0^{l_1}\eta_1^2dx=\frac{P^2l^2k^2\alpha_1^2l_1^5}{16\cdot64\cdot105\,E^2I_1^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

同様に A—2 部材に對しては

$$\eta_2=-\frac{Plk\alpha_2}{32El_2I_2}(l_2x^2-x^3), \quad \int_0^{l_2}\eta_2dx=\frac{P^2l^2k^2\alpha_2^2l_2^5}{16\cdot64\cdot105\,E^2I_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

A—3 部材に對しては

$$\eta_3=-\frac{Plk\alpha_3}{32El_3I_3}(l_3x^2-x^3), \quad \int_0^{l_3}\eta_3dx=\frac{P^2l^2k^2\alpha_3^2l_3^5}{16\cdot64\cdot105\,E^2I_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

A—r 部材に對しては

$$\eta_r=-\frac{Plk\alpha_r}{32El_rI_r}(l_rx^2-x^3),\qquad \int_0^{l_r}\eta_r dx=\frac{P^2l^2k^2\alpha_r^2l_r^5}{16\cdot 64\cdot 105\,E^2I_r^2}\quad\cdots\cdots(20)$$

從つて (4) 式に於て

$$\int\rho\eta^2dx=\frac{W}{g}\eta_0^2+2\int_0^{l/2}\frac{W}{g}\eta_{AB}^2dx+2\int_0^{l_1}\frac{w_1}{g}\eta_1^2dx+2\int_0^{l_2}\frac{w_2}{g}\eta_2^2dx$$

$$+2\int_0^{l_3}\frac{w_3}{g}\eta_3^2d\boldsymbol{x}+\cdots\cdots+2\int_0^{l_r}\frac{w_r}{g}\eta_r^2dx$$

$$=\frac{W}{g}\left\{\frac{(4-3k)Pl^3}{192EI}\right\}^2+\frac{2w(168k^2-427k+272)P^2l^7}{28\cdot 40\cdot 48\cdot 48gE^2I^2}+\frac{2P^2l^2k^2}{16\cdot 64\cdot 105gE^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i^2l_i^5w_i}{I_i^2}$$

又 (1) 式の最大歪エネルギーは外力 P により與へられるエネルギー $\frac{1}{2}P\eta_0$ に等しきを以て

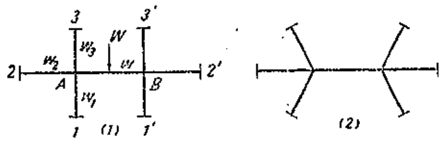
$$\int EI\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx=P\eta_0=\frac{(4-3k)P^2l^3}{192EI}$$

從つて

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(4-3k)Wl^3}{192gEI}+\frac{(168k^2-427k+272)wl^4}{6\,720(4-3k)gEI}+\frac{k^2}{280gE}\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i\alpha_i^2w_il_i^4}{I_i}}\quad\cdots\cdots(21)$$

表-2、 固定脚を有する載荷架構の上下振動週期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(4-3k)Wl^3}{192gEI}+\frac{(168k^2-427k+272)wl^4}{6720(4-3k)gEI}+\frac{k^2}{280gE}\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i\alpha_i^2w_il_i^4}{I_i}}$$



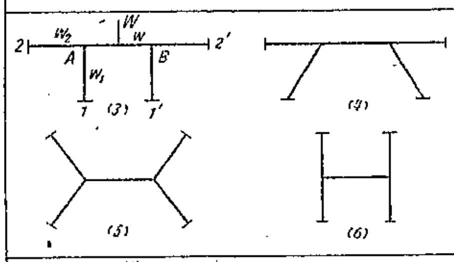
$r=3$

$k=\frac{2(K_1+K_2+K_3)}{K+2(K_1+K_2+K_3)}$

$\alpha_1=\frac{K_1}{K_1+K_2+K_3}$　　$m_1=\frac{K}{K_1}$

$\alpha_2=\frac{K_2}{K_1+K_2+K_3}$　　$m_2=\frac{K}{K_2}$

$\alpha_3=\frac{K_3}{K_1+K_2+K_3}$　　$m_3=\frac{K}{K_3}$

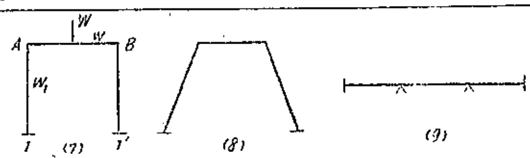


$r=2$

$k=\frac{2(K_1+K_2)}{K+2(K_1+K_2)}$

$\alpha_1=\frac{K_1}{K_1+K_2}$　　$m_1=\frac{K}{K_1}$

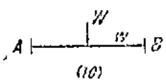
$\alpha_2=\frac{K_2}{K_1+K_2}$　　$m_2=\frac{K}{K_2}$



$r=1$

$k=\frac{2K_1}{K+2K_1}$

$\alpha_1=1$　　$m_1=\frac{K}{K_1}$



$r=0$

$k=1$

茲に　$m_i = K/K_i$

之が固定脚を有する載荷架構の固有上下振動週期を求むる一般式である。

$r=3$ なる架構は**表-2** 中の (1) 及び (2) の如き型のものでありこの場合の k, α 及び m は

$$k=\frac{2(K_1+K_2+K_3)}{K+2(K_1+K_2+K_3)}$$

$$\alpha_1=\frac{K_1}{K_1+K_2+K_3},\quad \alpha_2=\frac{K_2}{K_1+K_2+K_3},\quad \alpha_3=\frac{K_3}{K_1+K_2+K_3}$$

$$m_1=\frac{K}{K_1},\quad m_2=\frac{K}{K_2},\quad m_3=\frac{K}{K_3}$$

である。

又 $r=2$ なる架構は同表中に示す (3), (4), (5) 及 (6) の如き型のものであり, この場合の k, α 及 m は

$$k=\frac{2(K_1+K_2)}{K+2(K_1+K_2)}$$

$$\alpha_1=\frac{K_1}{K_1+K_2},\quad \alpha_2=\frac{K_2}{K_1+K_2},\quad m_1=\frac{K}{K_1},\quad m_2=\frac{K}{K_2}$$

である。

$r=1$ なる架構は**表-2** 中に示す (7), (8) 及 (9) の如き型のものでこの場合は

$$k=\frac{2K_1}{K+2K_1},\quad \alpha_1=1,\quad m_1=\frac{K}{K_1}$$

$r=0$ なる場合は同表中に示す (10) の如き型即ち單徑間の固定梁の場合でこの場合は

$$k=1$$

である。

以上を一括して表示したものが**表-2** である。

4. 鉸脚を有する載荷架構に對する固有振動週期算定公式の誘導

圖-3 に於て材端 1, 2, 3, ‥‥, r が鉸端なる場合には

$$M_{AB}=2EK(\theta_A)-C_{AB},\quad M_{A1}=2EK_1(1.5\,\theta_A)$$

$$M_{A2}=2EK_2(1.5\,\theta_A),\quad M_{A3}=2EK_3(1.5\,\theta_A)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad M_{Ar}=2EK_r(1.5\,\theta_A)$$

又　$M_{1A}=M_{2A}=M_{3A}=\cdots\cdots=M_{rA}=0$

茲に　$C_{AB}=\frac{1}{8}Pl$

是等を節點 A に於ける平衡條件式

$$M_{AB}+M_{A1}+M_{A2}+M_{A3}+\cdots\cdots+M_{Ar}=0$$

に代入して

$$\theta_A=\frac{1}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}\frac{C_{AB}}{E}$$

從つて

$$M_{AB}=-\frac{3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}C_{AB},\quad M_{A1}=\frac{3K_1}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}C_{AB}$$

$$M_{A2}=\frac{3K_2}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}C_{AB},\qquad M_{A3}=\frac{3K_3}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}C_{AB}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad,\qquad M_{Ar}=\frac{3K_r}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}C_{AB}$$

今

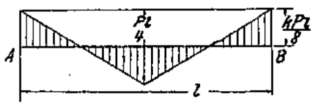
$$\frac{3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}{2K+3(K_1+K_2+K_3+\cdots\cdots+K_r)}=k' \qquad\cdots\cdots(22)$$

と置き，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_r$ を前と同じく (11) 式の如きものを表はすとすれば

$$\left.\begin{array}{lll} M_{AB}=-k'C_{AB}, & M_{A1}=\alpha_1 k'C_{AB}, & M_{A2}=\alpha_2 k'C_{AB} \\ M_{AB}=\alpha_3 k'C_{AB}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, & M_{Ar}=\alpha_r k'C_{AB} \end{array}\right\} \qquad\cdots\cdots(23)$$

從つて A—B 部材の曲げモーメント圖は圖-6 の如くなり A—B 部材の撓み曲線は

圖-6.



$$\eta_{AB}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{P}{48}(3l^2x-4x^3)-\frac{1}{2}\frac{k'Pl}{8}(lx-x^2)\right\}$$

$$=\frac{P}{48EI}\{3l^2(1-k')x+3k'lx^2-4x^3\}$$

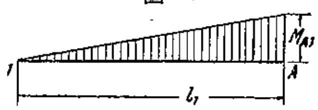
$$\eta_{x=l/2}=\eta_0=\frac{(4-3k')Pl^3}{192EI} \qquad\cdots\cdots(24)$$

從つて又

$$\int_0^{l/2}\eta^2_{AB}dx=\frac{(168k'^2-427k'+272)P^2l^7}{28\cdot40\cdot48\cdot48\cdot E^2I^2} \qquad\cdots\cdots(25)$$

又 A—1 部材の曲げモーメント圖は圖-7 の如くなりこの部材の撓み曲線は

圖-7.



$$\eta_1=-\frac{1}{6El_1I_1}M_{A1}(l_1^2x-x^3)=\frac{Plk'\alpha_1}{48El_1I_1}(l_1^2x-x^3)$$

從つて

$$\int_0^{l_1}\eta_1^2dx=\frac{P^2l^2k'^2\alpha_1^2l_1^5}{9\cdot32\cdot105E^2I_1^2} \qquad\cdots\cdots(26)$$

同様に A—2 部材に對しては

$$\eta_2=-\frac{Plk'\alpha_2}{48El_2I_2}(l_2^2x-x^3),\qquad \int_0^{l_2}\eta_2dx=\frac{P^2l^2k'^2\alpha_2^2l_2^5}{9\cdot32\cdot105E^2I_2^2} \qquad\cdots\cdots(27)$$

A—3 部材に對しては

$$\eta_3=-\frac{Plk'\alpha_3}{48El_3I_3}(l_3^2x-x^3),\qquad \int_0^{l_3}\eta_3dx=\frac{P^2l^2k'^2\alpha_3^2l_3^5}{9\cdot32\cdot105E^2I_3^2} \qquad\cdots\cdots(28)$$

A—r 部材に對しては

$$\eta_r=-\frac{Plk'\alpha_r}{48El_rI_r}(l_r^2x-x^3),\qquad \int_0^{l_r}\eta_rdx=\frac{P^2l^2k'^2\alpha_r^2l_r^5}{9\cdot32\cdot105E^2I_r^2} \qquad\cdots\cdots(29)$$

從つて (9) 式に於て

$$\int\rho\eta^2dx=\frac{W}{g}\eta_0^2+2\int_0^{l/2}\frac{w}{g}\eta^2_{AB}dx+2\int_0^{l_1}\frac{w_1}{g}\eta_1^2dx+2\int_0^{l_2}\frac{w_2}{g}\eta_2^2dx$$

$$+2\int_0^{l_3}\frac{w_3}{g}\eta_3^2dx+\cdots\cdots+2\int_0^{l_r}\frac{w_r}{g}\eta_r^2dx$$

$$=\frac{W}{g}\left\{\frac{(4-3k')Pl^3}{192EI}\right\}^2+\frac{2w(168k'^2-427k'+272)P^2l^7}{28\cdot40\cdot48\cdot48\,gE^2I^2}$$
$$+\frac{2P^2l^2k'^2}{9\cdot32\cdot105\,gE^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i^2l_i^5w_i}{I_i^2}$$

又

$$\int EI\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2dx=P\eta_0=\frac{(4-3k')P^2l^3}{192EI}$$

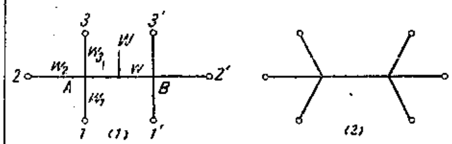
從つて

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(4-3k')Wl^3}{192\,gEI}+\frac{(168k'^2-427k'+272)wl^4}{6\,720(4-3k')gEI}+\frac{4k'^2}{315gE}\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i\alpha_i^2w_il_i^4}{I_i}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

玆に　　$m_i=\dfrac{K}{K_i}$

表-3. 鉸脚を有する載荷架構の上下振動週期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(4-3k')Wl^3}{192gEI}+\frac{(168k'^2-427k'+272)wl^4}{6720(4-3k')gEI}+\frac{4k'^2}{315gE}\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i\alpha_i^2w_il_i^4}{I_i}}$$


(1)　(2)

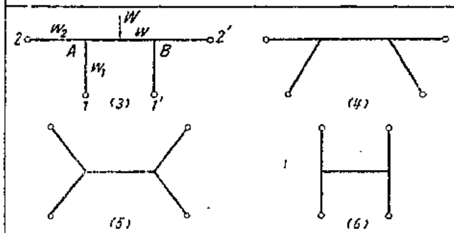
$r=3$

$k'=\dfrac{3(K_1+K_2+K_3)}{2K+3(K_1+K_2+K_3)}$

$\alpha_1=\dfrac{K_1}{K_1+K_2+K_3}$　　$m_1=\dfrac{K}{K_1}$

$\alpha_2=\dfrac{K_2}{K_1+K_2+K_3}$　　$m_2=\dfrac{K}{K_2}$

$\alpha_3=\dfrac{K_3}{K_1+K_2+K_3}$　　$m_3=\dfrac{K}{K_3}$

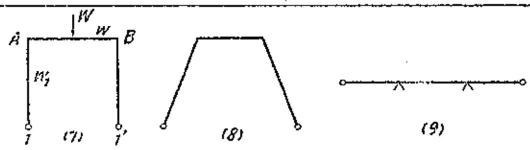

(3)　(4)　(5)　(6)

$r=2$

$k'=\dfrac{3(K_1+K_2)}{2K+3(K_1+K_2)}$

$\alpha_1=\dfrac{K_1}{K_1+K_2}$　　$m_1=\dfrac{K}{K_1}$

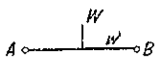
$\alpha_2=\dfrac{K_2}{K_1+K_2}$　　$m_2=\dfrac{K}{K_2}$


(7)　(8)　(9)

$r=1$

$k'=\dfrac{3K_1}{2K+3K_1}$

$\alpha_1=1$　　$m_1=\dfrac{K}{K_1}$


(10)

$r=0$

$k'=0$

之が鉸脚を有する載荷架構の固有上下振動週期を求むる一般式である。

$r=3$ なる架構は表-3 中の (1) 及び (2) の如き型のものでありこの場合の k', α 及 m は

$$k'=\frac{3(K_1+K_2+K_3)}{2K+3(K_1+K_2+K_3)}$$

$$\alpha_1=\frac{K_1}{K_1+K_2+K_3},\quad \alpha_2=\frac{K_2}{K_1+K_2+K_3},\quad \alpha_3=\frac{K_3}{K_1+K_2+K_3}$$

$$m_1=\frac{K}{K_1},\qquad m_2=\frac{K}{K_2},\qquad m_3=\frac{K}{K_3}$$

である。

又 $r=2$ なる架構は同表中の (3)～(6) に示すが如き型のものでありこの場合の k', α 及 m は

$$k'=\frac{3(K_1+K_2)}{2K+3(K_1+K_2)}$$

$$\alpha_1=\frac{K_1}{K_1+K_2},\quad \alpha_2=\frac{K_2}{K_1+K_2},\quad m_1=\frac{K}{K_1},\quad m_2=\frac{K}{K_2}$$

である。

$r=1$ なる架構は表-3 中の (7)～(9) の如き型のものでありこの場合は

$$k'=\frac{3K_1}{2K+3K_1},\qquad \alpha_1=1,\qquad m_1=\frac{K}{K_1}$$

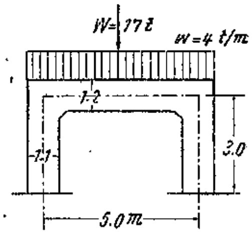
$r=0$ なる場合は同表中に示す (10) の如き型即ち兩端鉸なる單純梁の場合でこの場合には

$$k=0$$

である。

以上を一括して表示したものが表-3 である。

圖-8.



5. 計 算 例 題

計算例題 1. 圖-8 の如き集中荷重と等布荷重を擔ふ鐵筋コンクリートの架構式臺座の固有振動週期を計算してみる。

鐵筋コンクリートの重量は 2.4 t/m³, 彈性係數は鋼の 1/10 の 2 100 000 t/m², 又 g は 9.81 m/sec² とする。然る時は

$$I=\frac{1.0\times1.2^3}{12}=0.144\ \mathrm{m}^4,\quad I_1=\frac{1.0\times1.1^3}{12}=0.114\ \mathrm{m}^4$$

$$K=\frac{0.144}{5}=0.0288\ \mathrm{m}^3,\quad K_1=\frac{0.144}{3}=0.038\ \mathrm{m}^3$$

$$k=\frac{2\times0.038}{0.0288+2\times0.038}=0.7252,\qquad m_1=\frac{0.0288}{0.038}=0.7578$$

$$W=17\ \mathrm{t}$$

$$w=2.4\times1.0\times1.2+4=6.88\ \mathrm{t/m}$$

$$w_1=2.4\times1.0\times1.1\quad=2.64\ \mathrm{t/m}$$

以上の數値を表-2 の公式に代入して計算すれば

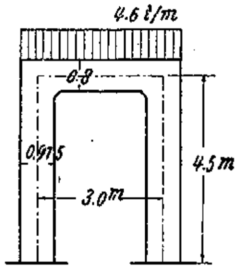
$$T=0.022575\ \mathrm{sec}$$

從つて又 1 分間の振動數は

$$N=\frac{60}{T}=2657$$

となる。同問題に對し Dr. Prager[2] は正解法によりて $N=2\,640$ と算出してゐる。之と比較し著者提案の式による結果の誤差は 0.65 % にすぎない。

圖-9.



計算例題 2. 圖-9 の如き等布荷重のみを擔ふ場合を取扱つてみる。鐵筋コンクリートの重量，及弾性係數は前例題と同じとする。

本例題に於ては

$$I=\frac{0.8\times0.8^3}{12}=0.0341\,3\ \mathrm{m}^4$$

$$I_1=\frac{0.8\times0.915^3}{12}=0.0510\,6\ \mathrm{m}^4$$

$$K=\frac{0.0341\,3}{3}=0.0113\,77\ \mathrm{m}^3,\qquad K_1=\frac{0.0510\,6}{4.5}=0.0113\,46\ \mathrm{m}^3$$

$K\doteqdot K_1$ にして $k=\frac{2}{3}$，又 $m_1=1$ である。

次に

$$w=2.4\times0.8\times0.8+4.6=6.136\ \mathrm{t/m}$$

$$w_1=2.4\times0.8\times0.915\quad=1.771\ \mathrm{t/m}$$

以上の値を表-2 の公式に代入して計算すれば

$$T=0.0131\,13\ \mathrm{sec}$$

從つて又 1 分間の振動數 N は

$$N=\frac{60}{T}=4\,576$$

となる。同じ問題に對し Dr. Prager[3] は正解法によりて $N=4\,600$ と算出してゐる。之と比較し著者提案の式による結果の誤差は 0.52 % にすぎない。

6. 結　　語

固定脚を有する載荷架構並に鉸脚を有する載荷架構に對し表-2 及び表-3 に示すが如き上下固有振動週期公式を誘導提案せるもので同表中に示せるが如き幾多の架構に應用せられるものである。載荷による撓み等を豫め計算することなしに簡單に振動週期を計算し得るものである。

共の精度も高く正解法に比較して 1 % 前後の誤差を有するにすぎない。但し本公式は直接應力による部材の伸縮及剪斷力の影響は之を考慮せざる場合に適用すべきものである。

---

2) "Die Berechnung der Eigenschwingung von Rahmenfundamenten von" W. Prager. Der Bauingenier, 1927 Heft 8, s. 129.

3) "Die Eigenschwingungen von Rahmenfundamenten von" W. Prager. ZSf. Techn. Physik, 1928. 6, s. 223.