

論 說 報 告

第 28 卷 第 12 號 昭和 17 年 12 月

巻き立て無き楕圓形隧道附近に於ける 應力の状態に就いて

正會員 荒 井 利 一 郎*

要 旨 著者は此の小文に於いて、楕圓形隧道附近に生ずべき應力に就き、等方、等質完全弾性體に關する平面歪み問題としての一近似解法を述べた。然る處全く同じき問題に關しては既に東京大學杉原氏に別の解法¹⁾もあるので、之と著者の解法とを比較した。最後には楕圓徑長の種々なる比、ポアソン比の種々なる値に就き割合範圍に適用され得べき計算結果表を附した。

1. 應力函数及び變位函数

1. 平面歪み問題に於ける物體力、應力方程式の直角座標型

問題が平面歪みに關するものなる場合に於いて歪みの面を xy とすると、物體力、應力方程式（即ち物體內 1 點の釣合方程式）は

$$\left. \begin{aligned} (\partial\sigma_x/\partial x) + (\partial\tau_{xy}/\partial y) &= -\gamma X \\ (\partial\tau_{xy}/\partial x) + (\partial\sigma_y/\partial y) &= -\gamma Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (001)$$

但し、 X 及び Y : 單位質量に對して作用する物體力
 γ : 物體の密度

であるが、若し茲に物體力ポテンシャル Ω 即ち

$$X = -(\partial\Omega/\partial x); \quad Y = -(\partial\Omega/\partial y) \dots\dots\dots (002)$$

なる様な Ω を導入するならば式 (001) よりの當然なる結果として σ_x, σ_y 及び τ_{xy} は應力函数 F に依り

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\partial^2 F/\partial y^2) + \gamma\Omega; & \sigma_y &= (\partial^2 F/\partial x^2) + \gamma\Omega; \\ \tau_{xy} &= -(\partial^2 F)/(\partial x \cdot \partial y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (003)$$

で表はされ得る事となる。但し式 (003) は單に式 (001) よりの當然なる結果であるから、應力度が應力函数の仲介で式 (003) の如く表はされ得ると云ふ事實は、物質が弾性物質たると塑性物質なると將又粘性物質たるとに關せず成立すべきものである。

2. 等方等質完全弾性體に於ける應力函数方程式の直角座標型

然る處物質が等方等質完全弾性體であれば、平面歪みの時に於いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda [(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y)] + 2G (\partial u/\partial x) \\ \sigma_y &= \lambda [(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y)] + 2G (\partial v/\partial y) \\ \sigma_z &= \lambda [(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y)] = \mu (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{yz} &= 0; \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{xy} = G [(\partial u/\partial y) + (\partial v/\partial x)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (004)$$

但し、 u 及び v : 物體內の 1 點の夫々軸 x 及び y に平行なる變位成分

* 工學士 哈爾濱工業大學教授

1) 杉原武徳: 楕圓形水平坑道の周圍に於ける地壓, 日本鐵業會誌 49 卷 575 號, 147 頁, 昭. 8. 3,

- λ : 物質のラメ係数
- μ : 物質のポアソン比
- G : 物質の剛性係数 (剪弾性係数)

でなくてはならないものであるから、此の關係に式 (003) を導入すれば

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -\gamma \{ (1-2\mu)/(1-\mu) \} \nabla^2 Q \dots\dots\dots (005)$$

$$\text{但し } \nabla^2 \equiv [(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)]$$

なる式が得られるのであつて、此れが等方等質完全弾性體の平面問題に就き應力函数 F の満足せねばならぬ微分方程式である。特に物體力が重力(又は之と類似の作用を物體に與へる力)のみにして且つ該存在物體力が軸 y に平行であり更に其れが座標 y の増加方向と反對の方向に向つて作用するものなりとしたならば、 $X=0$; $Y=-g$ であるから式 (002) より $(\partial Q/\partial x)=0$; $(\partial Q/\partial y)=g$ となり、従つて $\nabla^2 Q=0$ である事になるから結局式 (005) は

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \dots\dots\dots (006)$$

と簡單になる。そこで結局吾々の問題を解くには

- (a) 與周邊條件を満足し
- (b) 且つ各點の變位を一意的ならしめ
- (c) 更に式 (006) を満足する

様な應力函数を求めればよい事になるのであつて、斯かる F より應力度を求めるには式 (003) を用ふればよい。

3. 等質等方完全弾性體に就き F より變位を算定する事の直角座標型

以上の中で (b) の頂即ち F が變位を一意的ならしむるものなるのを要するといふ項は一般に孔のある平面の問題を解く場合特に強調さるべき性質のものであるから、茲で一應 F より變位を算定して見る方法²⁾に就き述べて置く。今

$$\nabla^2 F + \{ (1-2\mu)/(1-\mu) \} \gamma Q = (\partial^2 \psi)/(\partial x \partial y) \dots\dots\dots (007)$$

と置いて見ると、式 (004) より

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -(\partial F/\partial x) + (1-\mu)(\partial \psi/\partial y) \\ 2Gv &= -(\partial F/\partial y) + (1-\mu)(\partial \psi/\partial x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (008)$$

$$\text{及び } \nabla^2 \psi = 0 \dots\dots\dots (009)$$

なる式が導き出され得る。

従つて F より變位成分 u 及び v を算定するには式 (008) を用ひればよいのであるが、但し此の式 (008) の中、 $\partial \psi/\partial x$ 及び $\partial \psi/\partial y$ は式 (007) 及び (009) の兩者を満足する様な函数 ψ の夫々 x 及び y に關する偏微分係數でなくてはならないのであつて、斯くの如く決定さるべき ψ を變位函数と云ふ。

尙ほ後の便宜のため今少しく進み述べて置かう³⁾。式 (008) に於ける $\partial \psi/\partial x$ 及び $\partial \psi/\partial y$ を規定するものが式 (007) 及び (009) であるから此れ等兩式に就き多少の數學的考察を進めて見ると、結局 $\partial \psi/\partial y$ 及び $\partial \psi/\partial x$ は積分値 $\int F(z) dz$ の夫々實部及び虚部なるべき事がわかる。但し茲に $F(z)$ 即ち $F(x+iy)$ は函数 $\nabla^2 F + \{ (1-2\mu)/(1-\mu) \} \gamma Q$ を實部となす様な一函数である。そこで今 $F(z)$ を $\nabla^2 F + \{ (1-2\mu)/(1-\mu) \} \gamma Q + iR$ で示し上述の關係を式で表はせば次の通りになる。

$$(\partial \psi/\partial y) + i(\partial \psi/\partial x) = \int [\nabla^2 F + \{ (1-2\mu)/(1-\mu) \} \gamma Q + iR] dz \dots\dots\dots (010)$$

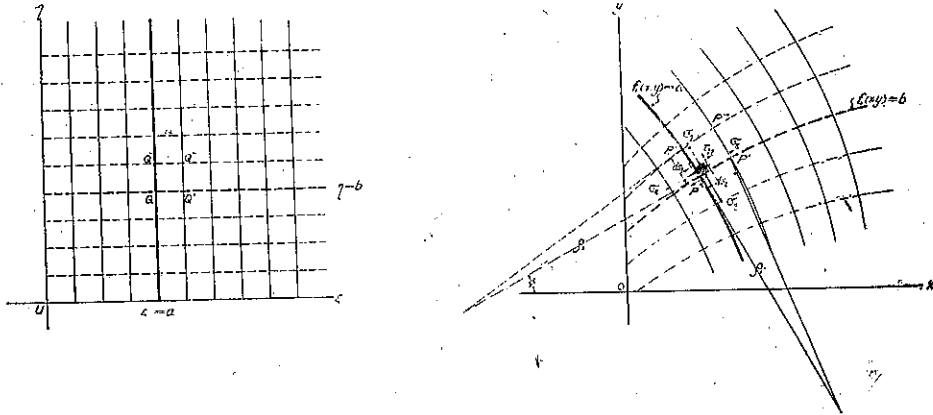
2) Coker & Filon: A Treatise on Photo-Elasticity (1931), 130~131 頁
 3) Coker & Filon: 前掲, 164 頁

式 (010) により $\partial\psi/\partial y$ 及び $\partial\psi/\partial x$ が定められ得たならば, u 及び v は式 (008) より算定され得る。

4. 曲線座標の導入

今歪みの平面 xy の中に

圖-1. 歪みの平面 xy の中に於ける直交曲線網目



$$x+iy=f(\xi+i\eta) \quad \text{即ち} \quad z=f(\zeta) \dots\dots\dots(011)$$

なる関係を有しつゝ ξ =常數; η =常數に對應し行く處の 2 線群

$$\xi=f_1(x, y)=\text{常數}$$

及び $\eta=f_2(x, y)=\text{常數}$

から出来た一種の直交網目 (圖-1 参照) を想像し既出の中で重要な諸公式, 諸關係を斯かる曲線直交網目座標に關聯せしめる事とする。

(A) 應力度を F で表はす事 (式 (003) の曲線座標型)

任意點の應力度を斯かる曲線座標に圖の如く關聯せしめ之を F で表すには材料力學應力度論に於て周知なる式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi + 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi \\ \sigma_\eta &= \sigma_x \sin^2 \phi + \sigma_y \cos^2 \phi - 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi \\ \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \phi \cos \phi + \tau_{xy}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(012)$$

の中に式 (003) の關係を代入すればよい。但し斯くの如き代入を行つた後, 右邊に就いて F に關する項は, 此の種曲線座標の數學的性質を利用する事に依り, 之を多少簡單化し得るのであつて其の運算の結果⁴⁾ は結局次の如き式が作られ得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= (\partial^2 F / \partial s_\eta^2) + (1/\rho_0)(\partial F / \partial s_\xi) + \gamma \Omega \\ \sigma_\eta &= (\partial^2 F / \partial s_\xi^2) - (1/\rho_1)(\partial F / \partial s_\eta) + \gamma \Omega \\ \tau_{\xi\eta} &= -(\partial / \partial s_\xi)(\partial F / \partial s_\eta) - (1/\rho_1)(\partial F / \partial s_\xi) \\ &= -(\partial / \partial s_\eta)(\partial F / \partial s_\xi) + (1/\rho_2)(\partial F / \partial s_\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(013)$$

又は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= (1/J^2)(\partial^2 F / \partial \eta^2) + (1/J^2)[(\partial F / \partial \xi)(\partial J / \partial \xi) - (\partial F / \partial \eta)(\partial J / \partial \eta)] + \gamma \Omega \\ \sigma_\eta &= (1/J^2)(\partial^2 F / \partial \xi^2) + (1/J^2)[(\partial F / \partial \eta)(\partial J / \partial \eta) - (\partial F / \partial \xi)(\partial J / \partial \xi)] + \gamma \Omega \\ \tau_{\xi\eta} &= -(1/J^2)[(\partial^2 F) / (\partial \xi \partial \eta)] + (1/J^2)[(\partial F / \partial \xi)(\partial J / \partial \eta) + (\partial F / \partial \eta)(\partial J / \partial \xi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(014)$$

4) Coker & Filon: 前掲, 162~163 頁

但し以上の諸式 (012)~(014) の中

$$J = (\partial s\xi / \partial \xi) = (\partial s\eta / \partial \eta) = \text{横がりの比}$$

以外の諸量即ち $\phi, ds\xi, ds\eta, \rho_1$ 及び ρ_2 等の意味はすべて圖-1 に依り明かであるが、此れ等の中 J 及び ϕ は

$$J e^{\phi} = f'(\xi + i\eta)^2 = f'(\zeta) = d[f(\zeta)]/d\zeta \dots\dots\dots (015)$$

で與へられ得るし、又 ρ_1 及び ρ_2 と J との間は

$$(1/\rho_1) = (\partial\phi/\partial s\xi) = (1/J)(\partial\phi/\partial \xi) = -(1/J^2)(\partial J/\partial \eta)$$

及び $(1/\rho_2) = (\partial\phi/\partial s\eta) = (1/J)(\partial\phi/\partial \eta) = (1/J^2)(\partial J/\partial \xi)$

で結び付けられ得る。

式 (013) 又は (014) は式 (003) に對應する曲線座標型のものである。尙ほ此れは式 (003) 及び式 (012) から當然に誘導され得るものにして結局應力、物體力釣合式の一形式に過ぎないとも稱せられ得べく、式 (012) より式 (013) 又は式 (014) への誘導途中に多少數學的取扱ありとするも、其れは式 (011) の如き曲線座標に固有なる數學的性質の驅使を超過するものでない。従つて應力度は或る 1 個の應力函数 F に依り式 (014) の如く表はされ得るものだと云ふ事實が物質の粘性物質なると塑性物質なると將又弾性物質なるとを問はず成立すべき事も亦式 (003) に關し述べた處と變りがない。

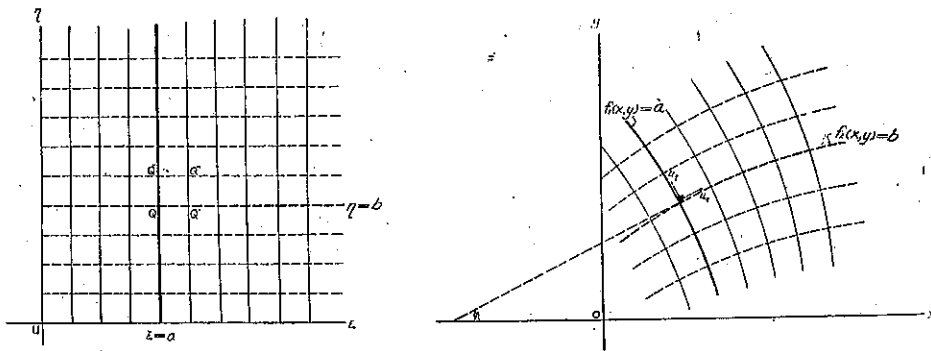
(B) 等方等質完全弾性體に於ける應力函数方程式の曲線座標型

直角座標型の演算子 $[(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)]$ は弾性に關係なく $(1/J^2)[(\partial^2/\partial \xi^2) + (\partial^2/\partial \eta^2)]$ と書き換へられ得る⁷⁾ ので此の關係を式 (006) に適用すれば

$$\{(\partial^2/\partial \xi^2) + (\partial^2/\partial \eta^2)\} [(1/J^2) \{(\partial^2 F/\partial \xi^2) + (\partial^2 F/\partial \eta^2)\}] \dots\dots\dots (017)^8)$$

なる式が作られ得るのであつて、此の式 (017) が式 (006) に對應する曲線座標型に他ならない。尙ほ式 (017) は元來式 (006) から誘われ得たものであるから、之に依つて應力函数が決定され得るのは物質が等方等質完全弾性體なる場合である。

圖-2. 歪みの半面 xy 内に於ける變位成分 u_ξ 及び u_η



5) Coker & Filon: 前掲, 153 頁
 6) Coker & Filon: 前掲, 153 頁
 7) Coker & Filon: 前掲, 164 頁
 8) Mindlin: Stress Distribution around a Tunnel, Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Vol. 65 No. 4, 627 頁, 昭. 14. 4.
 Timpe: Die Airysche Funktion für den Ellipsenring, Mathematische Zeitschrift, 17. Band, 190 頁, 大. 12. [Timpe の形は J として後出式 (024) を入れた形であるが便宜の爲茲に脚註とした]

(C) 等方等質完全弾性體に就き變位を應力函数 F に依り表示する事の曲線座標型⁹⁾

今物質内或る點の變位を圖-2 で示す如く定義すれば u_ξ, u_η, u 及び v の間に

$$2Gu_\xi = 2Gu \cos \phi + 2Gv \sin \phi; \quad 2Gu_\eta = -2Gu \sin \phi + 2Gv \cos \phi \quad \dots\dots\dots(018)$$

なる關係あるべき事勿論であるが、此の式に對し式 (010) 式 (015) 及び其の他多少の數學的關係を適用して行けば、 u_ξ 及び u_η は結局次の如く表はされ得る事になる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_\xi &= -(\partial F / \partial s_\xi) + (1-\mu)\alpha \\ 2Gu_\eta &= -(\partial F / \partial s_\eta) + (1-\mu)\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(019)$$

但し式 (019) 右邊に於ける α 及び β は

$$\alpha + i\beta = e^{-i\phi} \int J e^{i\phi} [\nabla^2 F + \{(1-2\mu)/(1-\mu)\} \gamma Q + iR] d\xi \quad \dots\dots\dots(020)$$

なる式から計算され得る函数であり、更に此の計算を詳述すれば次の通りである。即ち式 (020) 右邊を先づ計算したる上で式 (020) 左、右兩邊の實部及び虚部を夫々等置したならば α 及び β の値を得べく、斯かる α 及び β を式 (019) に代入したならば u_ξ 及び u_η が得られるのである。

式 (019) は式 (008) に對應する曲線座標型であり又式 (020) は式 (007) と (009) との兩式或ひは式 (010) なる單一式に對應する曲線座標型であつて共に物質が等方等質完全弾性體なる場合用ひられ得る。

5. 楕圓座標の導入

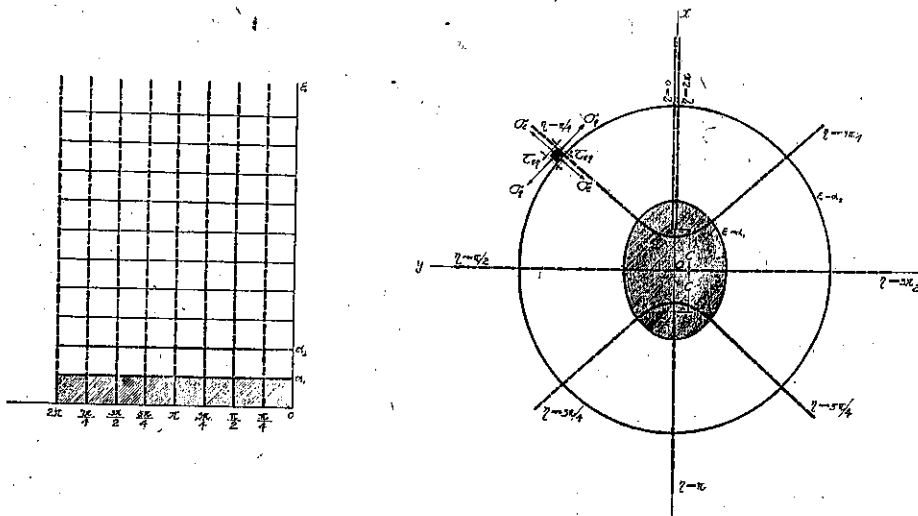
此の項は全體として前項 4 の特別なる場合に關する再説である。即ち今歪みの平面 xy の中に

$$z = c \cdot \cosh \xi \quad \dots\dots\dots(021)$$

なる關係を有しつゝ、 $\xi = \text{常數}$ ； $\eta = \text{常數}$ に對應し行く處の 2 線群から出來た直交網目を想像して見ると、斯かる網目を形成する 2 線群の中の 1 線群即ち $\xi = \text{常數}$ に對應し行く 1 線群は

$$\{x^2 / (c^2 \cosh^2 \xi)\} + \{y^2 / (c^2 \sinh^2 \xi)\} = 1 \quad \dots\dots\dots(022)$$

圖-3. $\xi \geq 0$ なる制限有る場合に於ける平面 z (歪みの平面) 上の網目と平面 ξ 上の網目との對應



9) Coker & Filon: 既掲, 164~166 頁

又は

$$x=c \cdot \cosh \xi \cos \eta \quad \text{及び} \quad y=c \cdot \sinh \xi \sin \eta \dots\dots\dots(023)$$

で表はさるゝ楕圓群であり、他の 1 線群即ち $\eta = \text{常數}$ に對應し行く 1 線群は以上の楕圓群と直交する双曲線群である事になるが、更に今 $\xi \geq 0$ なる範圍で ξ を變へる事に依り該楕圓群をして Σ 平面全體を覆はしむる事とすれば常に $\sinh \xi \geq 0$; $\cosh \xi \geq 1$ なるべきを以て式 (023) より明らかなる如く、 Σ 平面全體を覆ふ爲めに η の變はるべき範圍は $0 \sim 2\pi$ となり圖-3 に示す如き對應をなす事となる。即ち ξ をして $\xi \geq 0$ なる範圍内で變化せしむる事とすれば、 Σ 平面上に於ける幅 2π なる圖示の帯が Σ 平面の全體に對應する事になり尙ほ式 (022) 又は (023) の示す楕圓の焦點は 2 點 $(+c, 0)$ 及び $(-c, 0)$ であり更らに η は丁度離心角に該當する事となる。

次に楕圓座標の場合に就き J 及び ϕ を算出する目的で式 (015) に於ける $f(\xi)$ へ式 (021) 右邊を代入すると結局便利な形としては

$$2J^2 = c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \dots\dots\dots(024)^{10)}$$

及び

$$\tan \phi = \coth \xi \cdot \tan \eta \dots\dots\dots(025)^{11)}$$

が誘導され得る。

楕圓座標の場合に於ける J の表式として式 (024) を用ふる事とするならば、式 (014) は之を

$$\left. \begin{aligned} (2J^2)^2 \sigma_\xi &= (2J^2)(2)(\partial^2 F / \partial \eta^2) + (\partial F / \partial \xi) \{ \partial(2J^2) / \partial \xi \} \\ &\quad - (\partial F / \partial \eta) \{ \partial(2J^2) / \partial \eta \}^{12)} + (2J^2)^2 \gamma \Omega \dots\dots(026, a) \\ (2J^2)^2 \sigma_\eta &= (2J^2)(2)(\partial^2 F / \partial \xi^2) + (\partial F / \partial \eta) \{ \partial(2J^2) / \partial \eta \} \\ &\quad - (\partial F / \partial \xi) \{ \partial(2J^2) / \partial \xi \}^{13)} + (2J^2)^2 \gamma \Omega \dots\dots(026, b) \\ (2J^2)^2 \tau_{\xi\eta} &= -(2J^2)(2) \{ (\partial^2 F) / (\partial \xi \cdot \partial \eta) \} + (\partial F / \partial \xi) \{ \partial(2J^2) / \partial \eta \} \\ &\quad + (\partial F / \partial \eta) \{ \partial(2J^2) / \partial \xi \}^{14)} \dots\dots\dots(026, c) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(026)$$

と書き換へて置く方が便利である。

2. 自然地盤内に於ける應力

自然地盤が等方等質完全弾性物質より成れる半無限體なる場合に就き、歪みの平面 Σ 内に圖-4 に於ける如く軸 x 及び y を取る。而して今、自然の状態に於いて y 方向に變位が許されないものとすれば應力度成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx, I} &= -\gamma \mathcal{N}(x_0 - x) \\ \sigma_{yy, I} &= -\gamma \mathcal{N}(x_0 - x) \{ \mu / (1 - \mu) \} \\ \tau_{xy, I} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(101)$$

であり之に對應する應力函數は

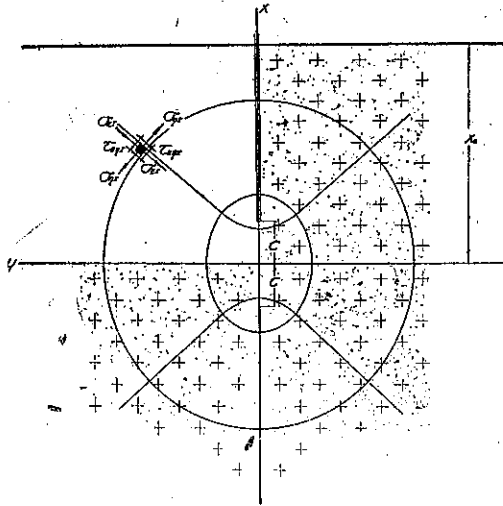
$$F_I = \gamma \mathcal{N} x^2 \{ (1 - 2\mu) / (1 - \mu) \} \{ (x_0/2) - (x/6) \} \dots\dots\dots(102)$$

と表はされ得る。

式 (101) は自然地盤内の應力を xy 座標に關聯せしめたものであるが、今若し斯かる平面 Σ の内に式 (021) の關

10) Coker & Filon: 前掲, 161 頁
 11) Coker & Filon: 前掲, 161 頁
 12) Coker & Filon: 前掲, 538 頁
 13) Coker & Filon: 前掲, 538 頁
 14) Coker & Filhn: 前掲, 538 頁

圖-4. 自然地盤内の應力度成分



係で表はさる△網目を考へ、該自然地盤内の應力度成分を此の網目に對し圖-4の如く關聯せしめ、之を表はす事とすれば式(102)は直ちに用ひられ得べく其の結果は次の通りになる。

$$\begin{aligned}
 & (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_{\xi\eta} \\
 & = (W/4) \{ -(1+\nu) \cosh 4\xi + 3(1-\nu) \cosh 2\xi - 2(1+\nu) \} \\
 & \quad + (V/16) \{ (3+\nu) \cosh 5\xi - (7-3\nu) \cosh 3\xi + 4(1+\nu) \cosh \xi \} \cos \eta \\
 & \quad + (W/4) \{ -(1-\nu) \cosh 4\xi + 4(1+\nu) \cosh 2\xi - 3(1-\nu) \} \cos 2\eta \\
 & \quad + (V/16) \{ (1-\nu) \cosh 5\xi - 4(1+\nu) \cosh 3\xi + (3-7\nu) \cosh \xi \} \cos 3\eta \\
 & \quad + (W/4) \{ (1-\nu) \cosh 2\xi - (1+\nu) \} \cos 4\eta \\
 & \quad + (V/16) \{ -(1-\nu) \cosh 3\xi + (1+3\nu) \cosh \xi \} \cos 5\eta \dots\dots (103, a) \\
 & (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_{\eta\eta} \\
 & = (W/4) \{ -(1+\nu) \cosh 4\xi - 3(1-\nu) \cosh 2\xi - 2(1+\nu) \} \\
 & \quad + (V/16) \{ (1+3\nu) \cosh 5\xi + (3-7\nu) \cosh 3\xi + 4(1+\nu) \cosh \xi \} \cos \eta \\
 & \quad + (W/4) \{ (1-\nu) \cosh 4\xi + 4(1+\nu) \cosh 2\xi + 3(1-\nu) \} \cos 2\eta \\
 & \quad + (V/16) \{ -(1-\nu) \cosh 5\xi - 4(1+\nu) \cosh 3\xi - (7-3\nu) \cosh \xi \} \cos 3\eta \\
 & \quad + (W/4) \{ -(1-\nu) \cosh 2\xi - (1+\nu) \} \cos 4\eta \\
 & \quad + (V/16) \{ (1-\nu) \cosh 3\xi + (3+\nu) \cosh \xi \} \cos 5\eta \dots\dots (103, b) \\
 & (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta} \\
 & = -(1-\nu) \{ (V/16) (\sinh 5\xi + \sinh 3\xi) \sin \eta - (W/4) \sinh 4\xi \sin 2\eta \\
 & \quad + (V/16) (\sinh 5\xi - \sinh \xi) \sin 3\eta + (W/4) \sinh 2\xi \sin 4\eta \\
 & \quad - (V/16) (\sinh 3\xi + \sinh \xi) \sin 5\eta \} \dots\dots (103, c)
 \end{aligned}$$

但し、

$$V = g\gamma c ; \quad W = g\gamma x_0 ; \quad \nu = u/(1-u) \dots\dots (104)$$

3. 等方等質完全弾性物質より成る無限體が、 $\xi = \alpha$ に對應する様な楕圓孔を有し、

此の楕圓孔の周邊に沿うて烈度 $[-\sigma_{\xi}]_{\xi=\alpha}$ なる垂直面力と烈度 $[-\tau_{\xi\eta}]_{\xi=\alpha}$ なる剪斷面力とを受けて居る場合に於ける應力

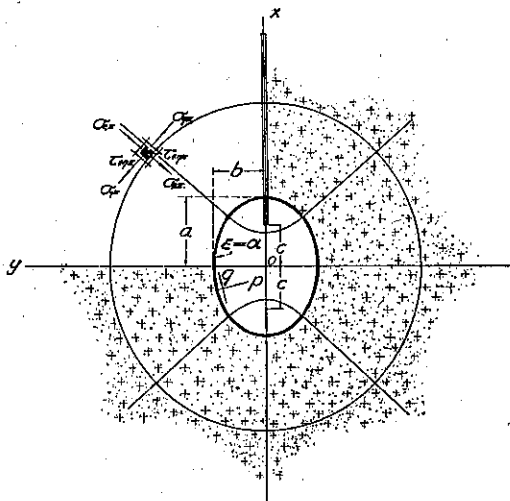
圖-5. 楕圓孔周邊に於いて $p = [-\sigma_{\xi}]_{\xi=\alpha}$ 及び $q = [-\tau_{\xi\eta}]_{\xi=\alpha}$ なる 2 種の面力を受けて居る無限體

本節では圖-5 の示す如く無限體の中に $\xi = \alpha$ なる楕圓形孔を考へ此の楕圓周邊に

$$p = [-\sigma_{\xi}]_{\xi=\alpha} \quad \text{及び}$$

$$q = [-\tau_{\xi\eta}]_{\xi=\alpha} \quad \text{なる 2 種の面力が}$$

分布作用して居る場合に就き、該無限體内に生ずべき應力 $\sigma_{\xi\eta}$ 、 $\sigma_{\eta\xi}$ 及び $\tau_{\xi\eta}$ を考へるのであるが、先づ便宜の爲め p 及び q を書き表はし置く事とすれば、其れ等は要するに η のみの函数であつて、式 (103) より直ちに次の如く示され得る。



$$\begin{aligned} & (\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)^2 p \\ &= (W/4) \{ (1+\nu) \cosh 4\alpha - 3(1-\nu) \cosh 2\alpha + 2(1+\nu) \} \\ & \quad + (V/16) \{ -(3+\nu) \cosh 5\alpha + (7-3\nu) \cosh 3\alpha - 4(1+\nu) \cosh \alpha \} \cos \eta \\ & \quad + (W/4) \{ (1-\nu) \cosh 4\alpha - 4(1+\nu) \cosh 2\alpha + 3(1-\nu) \} \cos 2\eta \\ & \quad + (V/16) \{ -(1-\nu) \cosh 5\alpha + 4(1+\nu) \cosh 3\alpha - (3-7\nu) \cosh \alpha \} \cos 3\eta \\ & \quad + (W/4) \{ -(1-\nu) \cosh 2\alpha + (1+\nu) \} \cos 4\eta \\ & \quad + (V/16) \{ (1-\nu) \cosh 3\alpha - (1+3\nu) \cosh \alpha \} \cos 5\eta \dots \dots \dots (201, a) \\ & (\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)^2 q \\ &= (1-\nu) \{ (V/16) (\sinh 5\alpha + \sinh 3\alpha) \sin \eta - (W/4) \sinh 4\alpha \sin 2\eta \\ & \quad + (V/16) (\sinh 5\alpha - \sinh \alpha) \sin 3\eta + (W/4) \sinh 2\alpha \sin 4\eta \\ & \quad - (V/16) (\sinh 3\alpha + \sinh \alpha) \sin 5\eta \} \dots \dots \dots (201, b) \end{aligned}$$

諸應力の點のみから云つて斯かる周邊條件に適合する、式 (017) の各 1 つの解たり得る應力函数は

$$\begin{aligned} F_0 &= \xi \dots \dots \dots [\text{極座標の時に於ける } \log r \text{ に相當する}] \\ F_1' &= \xi \cosh \xi \cos \eta \dots \dots \dots [\text{極座標の時に於ける } r \log r \cos \theta \text{ に相當する}] \\ F_1'' &= \eta \sinh \xi \sin \eta \dots \dots \dots [\text{極座標の時に於ける } r\theta \sin \theta \text{ に相當する}] \\ F_m &= e^{-m\xi} \cos m\eta \end{aligned}$$

及び

$$F_n = e^{-(n+1)\xi} \cos (n-1)\eta + e^{-(n-1)\xi} \cos (n+1)\eta \dots \dots \dots$$

[所謂第 n 類の解]

であつて即ち此れ等に對應する應力成分は式(014)により夫々表-1の如く計算され得べく、正整数 m 及び n に對し適當なる制限を置くならば其等は悉く $\xi = \alpha$ なる周邊に於いて當面の周邊應力條件に適合し $\xi = \alpha$ に於いて零となる。

表-1. 應力函数と之に對應する應力度成分

函 数	應 力 度 成 分
F_0 15)	$c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\xi^{(0)} = 2 \sinh 2\xi$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\eta^{(0)} = -2 \sinh 2\xi$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta}^{(0)} = 2 \sin 2\eta$
F_2' 16)	$c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\xi^{(1')} = (\sinh 3\xi + \sinh \xi) \cos \eta$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\eta^{(1')} = (\sinh 3\xi - 5 \sinh \xi) \cos \eta - 2 \sinh \xi \cos 3\eta$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta}^{(1')} = (3 \cosh \xi + \cosh 3\xi) \sin \eta$
F_4'' 17)	$c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\xi^{(1'')} = (2 \sinh 3\xi - 5 \sinh \xi) \cos \eta - \sinh \xi \cos 3\eta$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\eta^{(1'')} = \sinh \xi (\cos \eta - \cos 3\eta)$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta}^{(1'')} = \cosh \xi (\sin 3\eta - 3 \sin \eta)$
F_m 18)	$c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\xi^{(m)} = \cos (m+2) \eta \cdot m(m-1) e^{-m\xi}$ $\quad - \cos m\eta \cdot m \{ (m-1) e^{-(m+2)\xi} + (m+1) e^{-(m-2)\xi} \}$ $\quad + \cos (m-2) \eta \cdot m(m+1) e^{-m\xi}$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\eta^{(m)} = -\cos (m+2) \eta \cdot m(m-1) e^{-m\xi}$ $\quad + \cos m\eta \cdot m \{ (m-1) e^{-(m+2)\xi} + (m+1) e^{-(m-2)\xi} \}$ $\quad - \cos (m-2) \eta \cdot m(m+1) e^{-m\xi}$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta}^{(m)} = \sin (n+2) \eta \cdot m(m-1) e^{-m\xi}$ $\quad - \sin m\eta \cdot m \{ (m-1) e^{-(m+2)\xi} + (m+1) e^{-(m-2)\xi} \}$ $\quad + \sin (m-2) \eta \cdot m(m+1) e^{-m\xi}$
F_n 19)	$c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\xi^{(n)} = \cos (n+3) \eta \cdot n(n+1) e^{-(n-1)\xi}$ $\quad - \cos (n+1) \eta \cdot n \{ 4e^{-(n+1)\xi} + (n+3) e^{-(n-3)\xi} \}$ $\quad + \cos (n-1) \eta \cdot n \{ 4e^{-(n-1)\xi} - (n-3) e^{-(n+3)\xi} \}$ $\quad + \cos (n-3) \eta \cdot n(n-1) e^{-(n+1)\xi}$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_\eta^{(n)} = -\cos (n+3) \eta \cdot n(n-3) e^{-(n-1)\xi}$ $\quad - \cos (n+1) \eta \cdot n \{ 4e^{-(n+1)\xi} - (n+1) e^{-(n-3)\xi} \}$ $\quad + \cos (n-1) \eta \cdot n \{ 4e^{-(n-1)\xi} + (n+1) e^{-(n+3)\xi} \}$ $\quad - \cos (n-3) \eta \cdot n(n+3) e^{-(n+1)\xi}$ $c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta}^{(n)} = \sin (n+3) \eta \cdot n(n-1) e^{-(n-1)\xi}$ $\quad - \sin (n+1) \eta \cdot n(n+1) e^{-(n-3)\xi}$ $\quad - \sin (n-1) \eta \cdot n(n-1) e^{-(n+3)\xi}$ $\quad + \sin (n-3) \eta \cdot n(n+1) e^{-(n+1)\xi}$

次に此れ等應力函数に對應する變位を計算するには式 (020) 及び (019) を用ひればよく、而かも此の第 2 節に關する限り式 (020) 中の Ω が零なのであるから計算は多少簡單となり結果として表-2 が得られる。

- 15) Coker & Filon: 前掲, 540 頁. Timpe, 既掲, 195 頁
- 16) Timpe: 前掲, 195 頁
- 17) Timpe: 前掲, 195 頁
- 18) Coker & Filon: 既掲, 540 頁
- 19) Coker & Filon: 前掲, 539 頁

表-2 に依つて明らかな通り、 F_0, F_m 及び F_n は ξ の任意なる値に對應する楕圓網線上に於いて η の 2π なる周期毎には復原する變位を與へる函数であつて表-1 の示す處と相俟ち當面の問題に對して各獨立で適合する解

表-2. 應力函数と之に對應する變位成分

面 數	變 位 成 分
F_0 20)	$2GJu_{\xi}^{(0)} = -1$ $2GJu_{\eta}^{(0)} = 0$
F_1' 21)	$2GJu_{\xi}^{(1')} = (1-2\mu)\xi \sinh \xi \cos \eta + 2(1-\mu)\eta \cosh \xi \sin \eta - \cosh \xi \cos \eta$ $2GJu_{\eta}^{(1')} = 2(1-\mu)\eta \sinh \xi \cos \eta - (1-2\mu)\xi \cosh \xi \sin \eta$
F_1'' 22)	$2GJu_{\xi}^{(1'')} = (1-2\mu)\eta \cosh \xi \sin \eta + 2(1-\mu)\xi \sinh \xi \cos \eta$ $2GJu_{\eta}^{(1'')} = (1-2\mu)\eta \sinh \xi \cos \eta - 2(1-\mu)\xi \cosh \xi \sin \eta - \sinh \xi \sin \eta$
F_m	$2GJu_{\xi}^{(m)} = me^{-m\xi} \cos m\eta$ $2GJu_{\eta}^{(m)} = me^{-m\xi} \sin m\eta$
F_n	$2GJu_{\xi}^{(n)} = (n-3+4\mu)e^{-(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta + (n+3-4\mu)e^{-(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta$ $2GJu_{\eta}^{(n)} = (n+3-4\mu)e^{-(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta + (n-3+4\mu)e^{-(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta$

たり得る。之に反し F_1' 及び F_1'' は夫々表-2 の示す如く ξ の任意なる値に對應する楕圓上に於いて η の 2π なる増加毎に原こゝ異つた變位を與ふべき函数である。即ち表-2 の示す處に依れば此れ等 2 つの應力函数 F_1' 及び F_1'' が各獨立しては、當面の問題に於いて必要なる變位の一意性を有し得ないのであるが、若し此れ等 2 つの函数を組み合せ、函数 $(1/2)(1-\nu)F_1' - F_1''$ を 1 つの應力函数として採るならば之に對應する變位式中より η の掛かる項が自動的に消去され $\sin \eta$ 又は $\cos \eta$ の掛かる項のみが残り、必要なる變位一位性を充足するに至るべき事亦表-2 の觀察に依り明らかである。

以上を綜合するに、式 (202) で示す F_0, F_1', F_1'', F_m 及び F_n は應力のみを點から云ふと悉く獨立で各 1 つの解たり得るのであるが變位の點から云へば此れ等の中 F_1' と F_1'' とだけは両者が $(1/2)(1-\nu)F_1' - F_1''$ なる形に組み合はされて始めて 1 つの解たり得ると云ふ事になるので、結局式 (202) を式 (203) の如く組み合はせた F_{II} が、式 (017) に對する解の中當面求むるものである事となり、更に此の F_{II} に對應する應力は式 (204) の如く書かれ得る。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{II} &= A_0 F_0 + A_1 \{ (1/2)(1-\nu)F_1' - F_1'' \} + \sum_{m=1}^3 B_m F_m + \sum_{n=1}^2 C_n F_n \\
 &= A_0 \xi + A_1 \{ (1/2)(1-\nu)\xi \cosh \xi \cos \eta - \eta \sinh \xi \sin \eta \} \\
 &\quad + \sum_{m=1}^3 B_m e^{-m\xi} \cos m\eta + \sum_{n=1}^2 C_n \{ e^{-(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta + e^{-(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta \}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (203)$$

式 (204) に於ける $A_0, A_1, B_1, B_2, B_3, C_1$ 及び C_2 を決定する爲めには式 (204, a) 及び (204, c) に $\xi = \alpha$ と置き且つ $[\sigma_{\xi\xi}]_{\xi=\alpha} = p$; $[\tau_{\eta\xi}]_{\xi=\alpha} = q$ と表はして得らるべき 2 式を夫々式 (201, a) 及び (201, b) と比較すればよく、斯かる計算の結果は式 (205) の通りであり、更に此の式 (205) の示す $A_0, A_1, B_1, B_2, B_3, C_1$ 及び C_2 の値を式 (204)

20) Timpe: 既掲, 197 頁
 21) Timpe: 前掲, 199 頁
 22) Timpe: 前掲, 200 頁

$$\begin{aligned}
 & c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_{\xi\eta} \\
 = & 2[A_0 \sinh 2\xi + 3B_2 e^{-2\xi} + 2C_1 + C_1 e^{-4\xi}] \\
 & + [(A_1/2) \{-3 \sinh 3\xi + 11 \sinh \xi - \nu (\sinh 3\xi + \sinh \xi)\} \\
 & - 4B_1 \sinh \xi + 12B_2 e^{-3\xi} + 2C_2 (4e^{-\xi} + e^{-3\xi} + e^{-5\xi})] \cos \eta \\
 & + [-2B_2 (e^{-4\xi} + 3) - 8C_1 \cosh 2\xi] \cos 2\eta + [A_1 \sinh \xi \\
 & - 6B_2 (e^{-5\xi} + 2e^{-\xi}) - 2C_2 (4e^{-3\xi} + 5e^\xi)] \cos 3\eta + 2[B_2 e^{-2\xi} + C_1] \cos 4\eta \\
 & + 6[B_2 e^{-3\xi} + C_2 e^{-\xi}] \cos 5\eta \dots\dots\dots (204, a) \\
 & c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_{\eta\eta} \\
 = & 2[-A_0 \sinh 2\xi - 3B_2 e^{-2\xi} + 2C_1 + C_1 e^{-4\xi}] \\
 & + [(A_1/2) \{\sinh 3\xi - 7 \sinh \xi - \nu (\sinh 3\xi - 5 \sinh \xi)\} \\
 & + 4B_1 \sinh \xi - 12B_2 e^{-3\xi} + 2C_2 (4e^{-\xi} - 5e^{-3\xi} + 3e^{-5\xi})] \cos \eta \\
 & + [2B_2 (e^{-4\xi} + 3) - 8C_1 e^{-2\xi}] \cos 2\eta + [\nu A_1 \sinh \xi + 6B_2 (e^{-5\xi} + 2e^{-\xi}) \\
 & - 2C_2 (4e^{-3\xi} - e^\xi)] \cos 3\eta + 2[-B_2 e^{-2\xi} + C_1] \cos 4\eta \\
 & + 2[-3B_2 e^{-3\xi} + C_2 e^{-\xi}] \cos 5\eta \dots\dots\dots (204, b) \\
 & c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta} \\
 = & [(A_1/2) \{9 \cosh \xi + \cosh 3\xi - \nu (3 \cosh \xi + \cosh 3\xi)\} \\
 & - 4B_1 \cosh \xi + 12B_2 e^{-3\xi} - 2C_2 (3e^{-3\xi} + e^{-5\xi})] \sin \eta \\
 & + 2[A_0 - B_2 (e^{-4\xi} + 3) - 2C_1 \cosh 2\xi] \sin 2\eta + [-A_1 \cosh \xi \\
 & - 6B_2 (e^{-5\xi} + 2e^{-\xi}) - 6C_2 e^\xi] \sin 3\eta + 2B_2 e^{-2\xi} \sin 4\eta \\
 & + 2[3B_2 e^{-3\xi} + C_2 e^{-\xi}] \sin 5\eta \dots\dots\dots (204, c)
 \end{aligned}$$

に代入すれば本第 2 節の求むる應力が得られるのであつて、該結果は式 (206) の如くである。

$$\begin{aligned}
 A_0 &= (Wc^2/4) \{(1+\nu) \cosh 2\alpha - (1-\nu)\} \\
 A_1 &= (Vc^2/4) \sinh 2\alpha \\
 B_1 &= (Vc^2/128) \operatorname{sech} \alpha \{2(2+\nu) e^{3\alpha} + (3+7\nu) e^\alpha - (5-9\nu) e^{-\alpha} \\
 & \quad - (3-5\nu) e^{-3\alpha} + (1+\nu) e^{-5\alpha}\} \\
 B_2 &= (Wc^2/16)(1-\nu)(e^{4\alpha} - 1) \\
 B_3 &= -(Vc^2/192) \{2(1-\nu) e^{6\alpha} + (1-3\nu) e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - (1-\nu)\} \\
 C_1 &= (Wc^2/8) \{-(1-\nu) e^{2\alpha} + (1+\nu)\} \\
 C_2 &= (Vc^2/64) \{(1-\nu) e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu)\} \\
 & (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_{\xi\eta} \\
 = & (W/8) [4 \{(1+\nu) \cosh 2\alpha - (1-\nu)\} \sinh 2\xi \\
 & \quad + 3(1-\nu)(e^\alpha - 1) e^{-2\xi} - 2 \{(1-\nu) e^{2\alpha} - (1+\nu)\} (2 + e^{-4\xi})] \\
 & - (V/32) [4 \sinh 2\alpha \cdot \{(3+\nu) \sinh 3\xi - (11-\nu) \sinh \xi\} \\
 & \quad + \operatorname{sech} \alpha \cdot \{2(2+\nu) e^{3\alpha} + (3+7\nu) e^\alpha - (5-9\nu) e^{-\alpha} - (3-5\nu) e^{-3\alpha} \\
 & \quad + (1+\nu) e^{-5\alpha}\} \sinh \xi + 2 \{2(1-\nu) e^{6\alpha} + (1-3\nu) e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - (1-\nu)\} e^{-3\xi} \\
 & \quad - \{(1-\nu) e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu)\} (4e^{-\xi} + e^{-3\xi} + e^{-5\xi})] \cos \eta \\
 & - (W/8) [(1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)(e^{-4\xi} + 3)]
 \end{aligned}$$

.....(205)

$$\begin{aligned}
 & -8 \{ (1-\nu)e^{2\alpha} - (1+\nu) \} \cosh 2\xi \cos 2\eta \\
 & + (V/32) [8 \sinh 2\alpha \sinh \xi + \{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} \\
 & \quad - (1-\nu) \} (e^{-5\xi} + 2e^{-\xi}) - \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} (4e^{-3\xi} \\
 & \quad + 5e^\xi)] \cos 3\eta + (W/8) [(1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)e^{-2\xi} - 2 \{ (1-\nu)e^{2\alpha} \\
 & \quad - (1+\nu) \}] \cos 4\eta - (V/32) [\{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} \\
 & \quad - (1-\nu) \} e^{-3\xi} - 3 \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} e^{-\xi}] \cos 5\eta \dots (206, a) \\
 & (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \sigma_{\eta II} \\
 & = -(W/8) [4 \{ (1+\nu) \cosh 2\alpha - (1-\nu) \} \sinh 2\xi \\
 & \quad + 3(1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)e^{-2\xi} + 2 \{ (1-\nu)e^{2\alpha} - (1+\nu) \} (2 + e^{-4\xi})] \\
 & + (V/32) [4 \sinh 2\alpha \{ (1-\nu) \sinh 3\xi - (7-5\nu) \sinh \xi \} \\
 & \quad + \sinh \xi \operatorname{sech} \alpha \{ 2(2+\nu)e^{3\alpha} + (3+7\nu)e^\alpha - (5-9\nu)e^{-\alpha} - (3-5\nu)e^{-3\alpha} \\
 & \quad + (1+\nu)e^{-5\alpha} \} + 2 \{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - (1-\nu) \} e^{-3\xi} \\
 & \quad + \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} (4e^{-\xi} - 5e^{-3\xi} + 3e^{-5\xi})] \cos \eta \\
 & + (W/8) [(1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)(e^{-4\xi} + 3) + 8 \{ (1-\nu)e^{2\alpha} - (1+\nu) \} e^{-2\xi}] \cos 2\eta \\
 & + (V/32) [8\nu \sinh 2\alpha \sinh \xi - \{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} \\
 & \quad - (1-\nu) \} (e^{-5\xi} + 2e^{-\xi}) - \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} (4e^{-3\xi} \\
 & \quad - e^{-\xi})] \cos 3\eta \\
 & - (W/8) [(1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)e^{-2\xi} + 2 \{ (1-\nu)e^{2\alpha} - (1+\nu) \}] \cos 4\eta \\
 & + (V/32) [\{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - (1-\nu) \} e^{-3\xi} \\
 & \quad + \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} e^{-\xi}] \cos 5\eta \dots (206, b) \\
 & (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \tau_{\xi\eta II} \\
 & = (V/32) [4 \sinh 2\alpha \cdot \{ 3(3-\nu) \cosh \xi + (1-\nu) \cosh 3\xi \} \\
 & \quad - \cosh \xi \operatorname{sech} \alpha \cdot \{ 2(2+\nu)e^{3\alpha} + (3+7\nu)e^\alpha - (5-9\nu)e^{-\alpha} - (3-5\nu)e^{-3\alpha} \\
 & \quad + (1+\nu)e^{-5\alpha} \} - 2 \{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - (1-\nu) \} e^{-3\xi} \\
 & \quad - \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} (3e^{-3\xi} + e^{-5\xi})] \sin \eta \\
 & + (W/8) [4 \{ (1+\nu) \cosh 2\alpha - (1-\nu) \} - (1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)(e^{-4\xi} + 3) \\
 & \quad + 4 \{ (1-\nu)e^{2\alpha} - (1+\nu) \} \cosh 2\xi] \sin 2\eta \\
 & - (V/32) [8 \sinh 2\alpha \cosh \xi - \{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} \\
 & \quad - 2e^{2\alpha} - (1-\nu) \} (e^{-5\xi} + 2e^{-\xi}) \\
 & \quad + 3 \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} e^\xi] \sin 3\eta \\
 & + (W/8) (1-\nu)(e^{4\alpha} - 1)e^{-2\xi} \sin 4\eta \\
 & - (V/32) [\{ 2(1-\nu)e^{6\alpha} + (1-3\nu)e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - (1-\nu) \} e^{-3\xi} \\
 & \quad - \{ (1-\nu)e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - (1+\nu) \} e^{-\xi}] \sin 5\eta \dots (206, c)
 \end{aligned}$$

4. 巻き立て無き楕圓形隧道附近に於ける應力

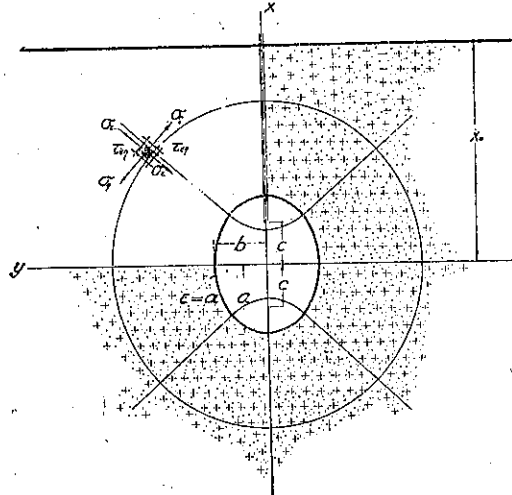
1. 求むる應力

【式 (103) 及び (206) を用ひ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \sigma_{\xi I} + \sigma_{\xi II} \\ \sigma_{\eta} &= \sigma_{\eta I} + \sigma_{\eta II} \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\xi\eta I} + \tau_{\xi\eta II} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (301)$$

圖-6. 自然地盤中に於ける巻き立て無き隧道

なる様な重疊を行へば圖-4 の状態と圖-5 の状態との重つた状態換言すれば近似的に、圖-6 の状態に於ける應力度 σ_{ξ} 、 σ_{η} 及び $\tau_{\xi\eta}$ が得られるのであつて、之が本文の求むる結果に他ならない。即ち圖-6 の如く巻き立て無き楕圓形隧道が自然地盤内に在る場合、其れの所在位置が相當深く x_0/a なる比が相當に大(圓に近き楕圓に於いて此の比が大約 5 以上)であるならば、任意點の應力は近似的に式 (302) の如く表はされ得るのである。



$$\sigma_{\xi} = k_1(\xi, \eta) \cdot W + k_2(\xi, \eta) \cdot U \dots\dots\dots (302, a)$$

$$\sigma_{\eta} = l_1(\xi, \eta) \cdot W + l_2(\xi, \eta) \cdot U \dots\dots\dots (302, b)$$

$$\tau_{\xi\eta} = m_1(\xi, \eta) \cdot W + m_2(\xi, \eta) \cdot U \dots\dots\dots (302, c)$$

但し、 $W = g\gamma x_0$; $U = g\gamma a \dots\dots\dots (302, d)$

$$\begin{aligned} k_1(\xi, \eta) = & -(1/8) \{ 1/(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \} [\{ (1+\nu)e^{4\xi} - \overline{(1+\nu \cdot e^{2a} + 1 - \nu} } \\ & + \overline{1 + \nu \cdot e^{-2a}} \} e^{2\xi} + 4(1-\nu)e^{2a} - (3 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{4a}} - \overline{1 + \nu \cdot e^{2a}} \\ & + 2 \cdot \overline{1 - \nu} - \overline{1 + \nu \cdot e^{-2a}}) e^{-2\xi} + (2 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{2a}} - \overline{1 + \nu}) e^{-4\xi} \} \\ & + \{ (1-\nu)e^{4\xi} - 4(1-\nu)e^{2a}e^{2\xi} + 3(1-\nu)(e^{4a} + 1) - 4(1-\nu)e^{2a}e^{-2\xi} \\ & + (1-\nu)e^{4a}e^{-4\xi} \} \cos 2\eta - \{ (1-\nu)e^{2\xi} - 2(1-\nu)e^{2a} \\ & + (1-\nu)e^{4a}e^{-2\xi} \} \cos 4\eta] \dots\dots\dots (302, e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(\xi, \eta) = & (1/32) \{ (\operatorname{sech} \alpha) / (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \} [\{ (3+\nu)e^{6\xi} \\ & - \overline{(3+\nu e^{2a} + 7 - 3\nu - 3 + \nu \cdot e^{-2a})} \} e^{3\xi} \\ & + (1/2) \cdot \operatorname{sech} \alpha \cdot (7 - 3\nu \cdot e^{3a} + 4 \cdot 3 - \nu \cdot e^a - 2 \cdot \overline{1 + 2\nu \cdot e^{-a}} \\ & - 4 \cdot \overline{2 + \nu \cdot e^{-3a} - 1 + \nu \cdot e^{-5a}}) e^{\xi} \\ & + (1/2) \cdot \operatorname{sech} \alpha \cdot (4 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{5a}} - 3 \cdot \overline{1 + 3\nu \cdot e^{3a}} - 8e^a \\ & + 2 \cdot \overline{3 + 4\nu \cdot e^{-1a}} + 4 \cdot \overline{2 + \nu \cdot e^{-3a} + 1 + \nu \cdot e^{-5a}}) e^{-\xi} \\ & - (4 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{6a} + 1 - 5\nu \cdot e^{4a} - 7 - \nu \cdot e^{2a} + 6 + 3 + \nu \cdot e^{-2a}}) e^{-3\xi} \\ & + (\overline{1 - \nu \cdot e^{4a} - 2\nu e^{2a} + 2}) e^{-5\xi} \} \cos \eta + \{ (1-\nu)e^{5\xi} - 4(1+\nu)e^{3\xi} \\ & - (5 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{4a} - 2 \cdot 1 + 5\nu \cdot e^{2a} - 2 \cdot 4 - \nu + 2e^{-2a}}) e^{\xi} \\ & + (4 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{6a} + 2 \cdot 1 - 3\nu \cdot e^{4a} - 6e^{2a} + 1 - 5\nu + 2e^{-2a}}) e^{-\xi} \\ & - 4(\overline{1 - \nu \cdot e^{4a} - 2\nu e^{2a}}) e^{-3\xi} + (2 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{6a} + 1 - 3\nu \cdot e^{4a}} \\ & - 2e^{2a}) e^{-5\xi} \} \cos 3\eta - \{ (1-\nu)e^{3\xi} - (1+3\nu)e^{\xi} \\ & - (3 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{4a} - 6\nu e^{2a} - 2}) e^{-\xi} + (2 \cdot \overline{1 - \nu \cdot e^{6a} + 1 - 3\nu \cdot e^{4a}} \end{aligned}$$

$$-2e^{2\alpha}e^{-3\xi}\} \cos 5\eta] \dots\dots\dots(302, f)$$

$$l_1(\xi, \eta) = -(1/8) \{1/(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2\} [\{(1+\nu)e^{4\xi} + (\overline{1+\nu} \cdot e^{2\alpha} + \overline{1-\nu} + \overline{1+\nu} \cdot e^{-2\alpha})e^{2\xi} + 4(1-\nu)e^{2\alpha} + (3 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - \overline{1+\nu} \cdot e^{2\alpha} + 2 \cdot \overline{1-\nu} - \overline{1+\nu} \cdot e^{-2\alpha})e^{-2\xi} + (2 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{2\alpha} - \overline{1+\nu})e^{-4\xi}\} - \{(1-\nu)e^{4\xi} + 4(1+\nu)e^{2\xi} + 3(1-\nu)(e^{4\alpha} + 1) + 4(2 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{2\alpha} - \overline{1+\nu})e^{-2\xi} + (1-\nu)e^{4\alpha}e^{-4\xi}\} \cos 2\eta + (1-\nu)(e^{2\xi} + 2e^{2\alpha} + e^{4\alpha}e^{-2\xi}) \cos 4\eta] \dots\dots\dots(302)$$

$$\dots\dots\dots(302, g)$$

$$l_2(\xi, \eta) = (1/32) \{ \operatorname{sech} \alpha / (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \} [\{(1+3\nu)e^{5\xi} + (\overline{1-\nu} \cdot e^{2\alpha} + \overline{3-7\nu} - \overline{1-\nu} \cdot e^{-2\alpha})e^{3\xi} - (1/2) \operatorname{sech} \alpha \cdot (\overline{3-7\nu} \cdot e^{3\alpha} - 16\nu e^\alpha - 2 \cdot \overline{3+4\nu} \cdot e^{-\alpha} - 4e^{-3\alpha} - \overline{1+\nu} \cdot e^{-5\alpha})e^\xi + (1/2) \operatorname{sech} \alpha \cdot (4 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{5\alpha} + \overline{7-19\nu} \cdot e^{3\alpha} + 4 \cdot \overline{1-5\nu} \cdot e^\alpha - 2 \cdot \overline{1+2\nu} \cdot e^{-\alpha} - 4e^{-3\alpha} - \overline{1+\nu} \cdot e^{-5\alpha})e^{-\xi} + (4 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} - \overline{3+\nu} \cdot e^{4\alpha} - \overline{5-11\nu} \cdot e^{2\alpha} + 6 + \overline{1-\nu} \cdot e^{-2\alpha})e^{-3\xi} + (3 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 6\nu e^{2\alpha} - 2)e^{-5\xi}\} \cos \eta - \{(1-\nu)e^{5\xi} + 4(1+\nu)e^{3\xi} - (\overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2 \cdot \overline{4-\nu} - 2\nu e^{-2\alpha})e^\xi + (4 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + 2 \cdot \overline{1-3\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2 \cdot \overline{2-\nu} \cdot e^{2\alpha} + \overline{5-\nu} - 2\nu e^{-2\alpha})e^{-\xi} + 4(\overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha})e^{-3\xi} + (2 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + \overline{1-3\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha})e^{-5\xi}\} \cos 3\eta + \{(1-\nu)e^{3\xi} + (3+\nu)e^\xi + (\overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} + 2)e^{-\xi} + (2 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + \overline{1-3\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha})e^{-3\xi}\} \cos 5\eta] \dots\dots\dots(302, h)$$

$$m_1(\xi, \eta) = (1/8) \{1/(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2\} [\{(1-\nu)e^{4\xi} + 2(\overline{1-\nu} \cdot e^{2\alpha} - \overline{1+\nu})e^{2\xi} - (3 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2 \cdot \overline{1+\nu} \cdot e^{2\alpha} + \overline{1-\nu} - 2 \cdot \overline{1+\nu} \cdot e^{-2\alpha}) + 2(\overline{1-\nu} \cdot e^{2\alpha} - \overline{1+\nu})e^{-2\xi} - (1-\nu)e^{4\alpha}e^{-4\xi}\} \sin 2\eta - (1-\nu)(e^{2\xi} - e^{4\alpha}e^{-2\xi}) \sin 4\eta] \dots\dots\dots(302, i)$$

$$m_2(\xi, \eta) = -(1/32) \{ (\operatorname{sech} \alpha) / (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2 \} [\{(1-\nu)e^{5\xi} - (1-\nu)(e^{2\alpha} - 1 - e^{-2\alpha})e^{3\xi} - \operatorname{sech} \alpha (5 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{3\alpha} + 2 \cdot \overline{3-5\nu} \cdot e^\alpha - 2 \cdot \overline{2+3\nu} \cdot e^{-\alpha} - 2 \cdot \overline{3+\nu} \cdot e^{-3\alpha} - \overline{1+\nu} \cdot e^{-5\alpha}) \cosh \xi + (4 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + \overline{5-9\nu} \cdot e^{4\alpha} - 5 \cdot \overline{1+\nu} \cdot e^{2\alpha} - 6 + \overline{1-\nu} \cdot e^{-2\alpha})e^{-3\xi} + (\overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - 2)e^{-5\xi}\} \sin \eta + \{(1-\nu)e^{5\xi} + (3 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} + 2 \cdot \overline{1-3\nu} \cdot e^{2\alpha} - 2 \cdot \overline{2+\nu} - 2e^{-2\alpha})e^\xi - (4 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + 2 \cdot \overline{1-3\nu} \cdot e^{4\alpha} - 6e^{2\alpha} - 3 \cdot \overline{1-\nu} + 2e^{-2\alpha})e^{-\xi} - (2 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + \overline{1-3\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha})e^{-5\xi}\} \sin 3\eta - \{(1-\nu)e^{3\xi} + (1-\nu)e^\xi + (\overline{1-\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2\nu e^{2\alpha} - 2)e^{-\xi} - (2 \cdot \overline{1-\nu} \cdot e^{6\alpha} + \overline{1-3\nu} \cdot e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha})e^{-3\xi}\} \sin 5\eta] \dots\dots\dots(302, j)$$

なほ、以上の式 (302) に關し、 $\mu=0\sim 0.5$; $\alpha=0.3\sim\infty$ なる範圍に於ける 2-3 の場合に就き隧道附近を目標

として k, l 及び m なる數値數個を計算し結果をまとめたものが表-3 であり、表-3 に於ける數値中で實用上多少有用と考へられ得るものは隧道周邊に關しての係數 l1(α, γ) 及び l2(α, γ) であるから、多少の補ひを爲して之を圖表としたものが圖-7 である。隧道周邊に於ける σE 及び τEγ が零なるべき事は勿論である。

2. 杉原氏の解法²³⁾と本文との關係

隧道の形が若し圓であるならば 2 極座標を利用して正確解が追求され得る²⁴⁾のであるけれども其れが橢圓になると容易でなくなるので、本文に於いては、ずつと以前山口博士が圓形隧道に關して行はれた²⁵⁾のと同系統の

表-3. (A) 係數 k, l 及び m の値 (α=0.3 即ち隧道

Table with 18 columns for coefficients k1, k2, l1, l2, m1, m2, l3, l4, m3, m4, k5, k6, l5, l6, m5, m6, l7, l8. Includes a header for '隧道周辺に於ける楕圓及び其の外側(側)に便' and a note for α=0.3.

表-3. (B) 係數 k, l 及び m の値 (α=0.5 即ち隧道

Table with 18 columns for coefficients k1, k2, l1, l2, m1, m2, l3, l4, m3, m4, k5, k6, l5, l6, m5, m6, l7, l8. Includes a header for '隧道周辺に於ける楕圓及び其の外側(側)に便' and a note for α=0.5.

23) 杉原: 既掲
24) 安藏善之輔: 水平頂面を有つ重力體中に圓孔を穿つた時の應力分布, 土木學會第 1 回年次學術講演會講演集, 15 頁, 昭. 12. 5. (昭. 12. 4. 於京都講演)
Mindlin: 既掲
25) 山口 昇: On the Stresses around a horizontal circular Hole in gravitating elastic solid, 土木學會誌 15 卷 4 號 291 頁, 昭. 4. 4.

重疊法を用ひて近似解を追求し、其の結果として式(302)、表-3及び表-7を得た。即ち著者は此の小文に於いて

(a) 自然地盤内の應力度を楕圓座標に關聯せしむる迄重力體としての取り扱ひを續け(第1節)

(b) 然る後楕圓周邊に於いて σ_{Er} 及び $\tau_{E\theta,r}$ を打ち消すに足り且つ無限遠で零應力を與へる様な解を作り(第2節)

たる上、此れ等2つの場合の重疊として本問題を解いたのである。然る處同じ問題に就いては既に杉原氏の解法(周邊の形が $a/b = 3.443$ なる楕圓を成してある場合)

表-9を得たる楕圓の寸法、形状

表-9												ホ ア、 ソ、 ビ ム
楕圓の形が $a/b = 3.443$ なる楕圓を成してある場合				楕圓の形が $a/b = 3.04$ なる楕圓を成してある場合				楕圓の形が $a/b = 3.73$ なる楕圓を成してある場合				
L_1	m_1	m_2	σ_{Er}	L_1	m_1	m_2	σ_{Er}	L_1	m_1	m_2	σ_{Er}	
±0.019	0	0	-0.983 ± 4.954	-0.002 ± 0.015	0	0	-0.996 ± 9.997	-0.000 ± 0.007	0	0	-0.999 ± 19.936	
±0.016	0	0	-0.960 ± 4.962	-0.257 ± 1.264	0	0	-0.998 ± 9.999	-0.252 ± 2.512	0	0	-0.999 ± 19.934	
±0.044	0	0	-0.996 ± 4.961	-0.410 ± 2.014	0	0	-0.999 ± 9.999	-0.402 ± 4.013	0	0	-1.000 ± 19.934	
±0.006	0	0	-1.015 ± 4.953	-1.022 ± 5.012	0	0	-1.004 ± 9.992	-1.005 ± 10.021	0	0	-1.001 ± 19.932	
±0.921 ± 0.014	-1.519	-0.734	± 3.186	-0.259 ± 1.128	± 0.443	-1.893	-0.744 ± 6.475	-0.252 ± 2.191	± 0.436	-3.765	-0.749 ± 12.938	
±0.155	± 0.337	-1.736	-0.799 ± 3.462	-0.444 ± 1.933	± 0.327	-1.417	-0.809 ± 7.020	-0.440 ± 3.813	± 0.326	-2.822	-0.812 ± 14.609	
±0.190	± 0.260	-0.708	-0.839 ± 3.627	-0.564 ± 2.413	± 0.260	-1.133	-0.847 ± 7.347	-0.553 ± 4.786	± 0.260	-2.258	-0.849 ± 14.667	
±0.469 ± 0.025	-0.002	-0.996	± 4.288	-1.022 ± 4.347	± 0.016	-0.999	± 8.653	-1.005 ± 8.799	± 0.014	-0.000	-1.000 ± 17.261	
±0.153 ± 0.043	-0.884	-0.249	± 0.589	-0.759 ± 1.693	± 0.436	-1.067	-0.250 ± 1.233	-0.752 ± 3.770	± 0.434	-2.161	-0.250 ± 2.484	
±0.164	± 0.321	-0.628	-0.427 ± 1.060	-0.830 ± 2.054	± 0.323	-0.796	-0.435 ± 2.194	-0.815 ± 4.081	± 0.324	-1.619	-0.437 ± 4.354	
±0.172	± 0.232	-0.503	-0.533 ± 1.354	-0.864 ± 2.445	± 0.255	-0.637	-0.546 ± 2.739	-0.853 ± 4.267	± 0.257	-1.295	-0.549 ± 5.579	
±0.204	-0.001	-0.960	± 2.473	-1.021 ± 2.554	-0.001	-0.990	± 4.996	-1.005 ± 5.011	± 0.014	-0.000	-0.997 ± 9.966	
0	0	+0.013	-0.013	0	0	+0.010	-0.003	0	0	+0.004	-0.001	
0	0	+0.014	-0.245	0	0	+0.011	-0.249	0	0	+0.006	-0.250	
0	0	+0.010	-0.385	0	0	+0.008	-0.396	0	0	+0.004	-0.399	
0	0	-0.004	-0.743	0	0	-0.002	-0.988	0	0	-0.000	-0.996	

周邊の形が $a/b = 2.164$ なる楕圓を成してある場合

表-10を得たる楕圓の寸法、形状

表-10												ホ ア、 ソ、 ビ ム
楕圓の形が $a/b = 2.164$ なる楕圓を成してある場合				楕圓の形が $a/b = 2.11$ なる楕圓を成してある場合				楕圓の形が $a/b = 3.81$ なる楕圓を成してある場合				
L_1	m_1	m_2	σ_{Er}	L_1	m_1	m_2	σ_{Er}	L_1	m_1	m_2	σ_{Er}	
±0.030	0	0	-0.918 ± 4.954	-0.004 ± 0.024	0	0	-0.992 ± 9.926	-0.001 ± 0.012	0	0	-0.998 ± 20.014	
±0.026	0	0	-0.978 ± 4.954	-0.259 ± 1.275	0	0	-0.995 ± 9.924	-0.252 ± 2.499	0	0	-0.999 ± 20.012	
±0.124	0	0	-0.984 ± 4.948	-0.412 ± 2.025	0	0	-0.996 ± 9.922	-0.403 ± 3.991	0	0	-0.999 ± 20.008	
±0.016	0	0	-1.007 ± 4.973	-1.025 ± 5.027	0	0	-1.002 ± 9.915	-1.006 ± 9.961	0	0	-1.000 ± 20.008	
±0.926 ± 0.046	-1.511	-0.726	± 3.179	-0.260 ± 1.134	± 0.448	-1.889	-0.744 ± 6.472	-0.253 ± 2.180	± 0.437	-3.757	-0.748 ± 12.935	
±0.154	± 0.337	-1.733	-0.793 ± 3.452	-0.441 ± 1.939	± 0.323	-1.417	-0.809 ± 7.017	-0.441 ± 3.792	± 0.327	-2.803	-0.811 ± 14.602	
±0.194	± 0.260	-0.705	-0.832 ± 3.616	-0.566 ± 2.422	± 0.263	-1.134	-0.844 ± 7.271	-0.554 ± 4.785	± 0.261	-2.242	-0.849 ± 14.720	
±0.467 ± 0.021	-0.002	-0.997	± 4.271	-1.025 ± 4.354	± 0.014	-0.999	± 8.648	-1.006 ± 8.797	± 0.013	-0.000	-0.999 ± 17.235	
±0.153 ± 0.044	-0.887	-0.253	± 0.582	-0.761 ± 1.690	± 0.441	-1.059	-0.251 ± 1.221	-0.753 ± 3.769	± 0.435	-2.162	-0.250 ± 2.492	
±0.164	± 0.322	-0.626	-0.430 ± 1.053	-0.826 ± 2.041	± 0.327	-0.794	-0.436 ± 2.155	-0.816 ± 4.079	± 0.325	-1.607	-0.437 ± 4.370	
±0.174	± 0.237	-0.498	-0.536 ± 1.335	-0.866 ± 2.452	± 0.257	-0.637	-0.546 ± 2.715	-0.854 ± 4.242	± 0.260	-1.285	-0.549 ± 5.575	
±0.204	-0.001	-0.960	± 2.474	-1.024 ± 2.554	± 0.013	-0.990	± 4.970	-1.006 ± 4.978	± 0.013	-0.000	-0.997 ± 9.963	
0	0	+0.013	-0.022	0	0	+0.025	-0.006	0	0	+0.012	-0.001	
0	0	+0.024	-0.253	0	0	+0.018	-0.251	0	0	+0.009	-0.250	
0	0	+0.018	-0.391	0	0	+0.013	-0.398	0	0	+0.007	-0.399	
0	0	-0.004	-0.743	0	0	-0.002	-0.986	0	0	-0.000	-0.996	

が有り、其處に於いて杉原氏は本問題を次ぎの如き無限遠條件有る4場合の重疊として取り扱つて居り、勿論此れ等4場合の各々に就き楕圓周邊に關しては常に

$$[\sigma_r]_{\infty} = 0 ; \quad [\tau_{\theta r}]_{\infty} = 0$$

表-3. (C) 係数 k, l 及び m の値 ($\alpha = 1.0$ 即ち橢

離 心 角 η		隧道周辺を楕圓形及び橢圓形に割																							
		$\beta = 1.0$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 1.0$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 1.0$ (隧道周辺を楕圓形に割る)						$\beta = 1.79$ ($\beta = 1.79$ を楕圓形に割る) $\beta = 1.79$ ($\beta = 1.79$ を楕圓形に割る) $\beta = 1.79$ ($\beta = 1.79$ を楕圓形に割る)						$\beta = 2.2$ ($\beta = 2.2$ を楕圓形に割る) $\beta = 2.2$ ($\beta = 2.2$ を楕圓形に割る) $\beta = 2.2$ ($\beta = 2.2$ を楕圓形に割る)						$\beta = 2.51$ ($\beta = 2.51$ を楕圓形に割る) $\beta = 2.51$ ($\beta = 2.51$ を楕圓形に割る) $\beta = 2.51$ ($\beta = 2.51$ を楕圓形に割る)					
η		k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2	k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2	k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2	k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2
0° 180°	0	0	+0.991	±0.500	0	0	0	-0.599	±1.603	-0.035	±0.107	0	0	-0.819	±2.766	-0.026	±0.069	0	0	-0.897	±3.858	-0.016	±0.087	0	0
	0	0	+0.793	±0.011	0	0	0	-0.670	±1.574	-0.334	±0.582	0	0	-0.853	±2.785	-0.293	±0.800	0	0	-0.918	±3.848	-0.275	±0.793	0	0
	0	0	-0.460	±0.225	0	0	0	-0.713	±1.603	-0.513	±0.848	0	0	-0.893	±2.753	-0.463	±1.239	0	0	-0.930	±3.843	-0.450	±1.239	0	0
	0	0	-0.827	±1.313	0	0	0	-0.835	±1.603	-1.230	±2.049	0	0	-0.955	±2.732	-1.044	±2.993	0	0	-0.976	±3.823	-1.051	±2.993	0	0
30° 150°	0	0	-0.273	±0.674	0	0	0	-0.498	±1.007	-0.349	±0.553	-0.555	-0.760	-0.635	±1.757	-0.289	±0.726	±0.497	-1.116	-0.686	±2.466	-0.272	±0.686	±0.497	-1.116
	0	0	-0.770	±0.704	0	0	0	-0.582	±1.099	-0.551	±0.849	±0.406	-0.568	-0.709	±1.904	-0.490	±1.193	±0.368	-0.836	-0.755	±2.476	-0.467	±0.755	±0.368	-0.836
	0	0	-1.061	±0.754	0	0	0	-0.693	±1.155	-0.685	±1.027	±0.317	-0.452	-0.754	±1.996	-0.610	±1.472	±0.290	-0.668	-0.797	±2.802	-0.583	±0.797	±0.290	-0.668
	0	0	-2.223	±0.962	0	0	0	-0.835	±1.377	-1.219	±1.737	±0.040	+0.010	-0.932	±2.362	-1.092	±2.572	±0.019	+0.003	-0.963	±3.309	-1.050	±2.572	±0.019	+0.003
60° 120°	0	0	-1.963	±1.145	0	0	0	-0.302	±0.974	-0.891	±0.810	±0.518	-0.328	-0.299	±0.293	-0.799	±1.161	±0.894	-0.581	-0.267	±0.433	-0.795	±1.161	±0.894	-0.581
	0	0	-1.887	±0.939	0	0	0	-0.413	±0.351	-0.760	±0.658	±0.382	-0.246	-0.431	±0.553	-0.877	±1.245	±0.358	-0.436	-0.435	±0.785	-0.844	±1.245	±0.358	-0.436
	0	0	-1.852	±0.853	0	0	0	-0.640	±0.448	-1.007	±0.887	±0.297	-0.197	-0.523	±0.720	-0.914	±1.295	±0.283	-0.349	-0.534	±1.023	-0.885	±1.295	±0.283	-0.349
	0	0	-1.702	±0.825	0	0	0	-0.277	±0.783	-1.196	±1.001	±0.036	+0.001	-0.808	±1.360	-1.088	±1.496	±0.019	-0.000	-0.938	±1.609	-1.049	±1.496	±0.019	-0.000
90°	0	0	-2.527	0	0	0	0	-0.206	0	-1.141	0	0	0	+0.144	-0.106	0	-1.046	0	0	+0.081	-0.062	0	-1.022	0	0
	0	0	-2.275	0	0	0	0	-0.331	0	-1.151	0	0	0	+0.111	-0.296	0	-1.056	0	0	+0.060	-0.278	0	-1.027	0	0
	0	0	-2.123	0	0	0	0	-0.407	0	-1.158	0	0	0	+0.082	-0.411	0	-1.062	0	0	+0.047	-0.407	0	-1.023	0	0
	0	0	-1.523	0	0	0	0	-0.708	0	-1.184	0	0	0	+0.011	-0.867	0	-1.086	0	0	-0.004	-0.926	0	-1.048	0	0

表-3. (D) 係数 k, l 及び m の値 ($\alpha =$

離 心 角 η		隧道周辺を楕圓形及び橢圓形に割																							
		$\beta = 2$ (隧道周辺を楕圓形に割る)						$\beta = 2.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 2.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 2.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る)						$\beta = 3.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 3.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 3.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る)						$\beta = 4.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 4.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る) $\beta = 4.2$ (隧道周辺を楕圓形に割る)					
η		k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2	k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2	k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2	k_1	k_2	l_1	l_2	m_1	m_2
0° 180°	0	0	+1.000	±0.500	0	0	0	-0.449	±1.500	-0.031	±0.125	0	0	-0.741	±2.764	-0.037	±0.088	0	0	-0.850	±3.794	-0.026	±0.088	0	0
	0	0	+0.250	±0.125	0	0	0	-0.539	±1.500	-0.336	±0.594	0	0	-0.778	±2.698	-0.306	±0.816	0	0	-0.872	±3.783	-0.285	±0.778	0	0
	0	0	-0.200	±0.100	0	0	0	-0.591	±1.500	-0.519	±0.875	0	0	-0.800	±2.691	-0.467	±1.253	0	0	-0.885	±3.776	-0.440	±1.253	0	0
	0	0	-2.000	±1.000	0	0	0	-0.750	±1.500	-1.250	±2.000	0	0	-0.887	±2.647	-1.111	±3.000	0	0	-0.938	±3.750	-1.043	±3.000	0	0
30° 150°	0	0	0	±0.433	0	0	0	-0.421	±0.974	-0.328	±0.581	±0.550	-0.750	-0.593	±1.732	-0.296	±0.722	±0.573	-1.107	-0.659	±2.436	-0.278	±0.659	±0.573	-1.107
	0	0	-0.500	±0.541	0	0	0	-0.450	±1.056	-0.559	±0.839	±0.426	-0.563	-0.667	±1.876	-0.500	±1.191	±0.385	-0.530	-0.729	±2.639	-0.474	±1.191	±0.385	-0.530
	0	0	-0.800	±0.404	0	0	0	-0.553	±1.104	-0.697	±1.018	±0.361	-0.450	-0.711	±1.913	-0.622	±1.472	±0.308	-0.464	-0.772	±2.760	-0.572	±1.472	±0.308	-0.464
	0	0	-2.000	±0.866	0	0	0	-0.750	±1.099	-1.250	±1.732	0	0	-0.887	±2.309	-1.111	±2.578	0	0	-0.938	±3.245	-1.043	±2.578	0	0
60° 120°	0	0	-2.000	±1.250	0	0	0	-0.328	±0.877	-0.922	±0.813	±0.550	-0.325	-0.776	±2.276	-0.615	±1.163	±0.513	-0.577	-0.278	±0.425	-0.784	±1.163	±0.513	-0.577
	0	0	-2.000	±1.060	0	0	0	-0.434	±0.328	-1.005	±0.859	±0.426	-0.264	-0.445	±0.553	-0.887	±1.246	±0.385	-0.433	-0.443	±0.787	-0.854	±1.246	±0.385	-0.433
	0	0	-2.000	±0.950	0	0	0	-0.497	±0.413	-1.053	±0.889	±0.361	-0.195	-0.533	±0.709	-0.933	±1.297	±0.308	-0.346	-0.542	±1.005	-0.876	±1.297	±0.308	-0.346
	0	0	-2.000	±0.500	0	0	0	-0.750	±0.933	-1.250	±1.000	0	0	-0.887	±1.333	-1.111	±1.500	0	0	-0.938	±1.875	-1.043	±1.500	0	0
90°	0	0	-3.000	0	0	0	0	-0.281	0	-1.219	0	0	0	+0.198	-0.148	0	-1.047	0	0	+0.107	-0.088	0	-1.037	0	0
	0	0	-2.750	0	0	0	0	-0.399	0	-1.227	0	0	0	+0.141	-0.333	0	-1.083	0	0	+0.080	-0.300	0	-1.044	0	0
	0	0	-2.600	0	0	0	0	-0.469	0	-1.231	0	0	0	+0.113	-0.444	0	-1.089	0	0	+0.044	-0.428	0	-1.047	0	0
	0	0	-2.000	0	0	0	0	-0.750	0	-1.250	0	0	0	+0.000	-0.887	0	-1.111	0	0	-0.000	-0.938	0	-1.043	0	0

なる条件が與へられてゐる。

- (a) $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = -\{\mu/(1-\mu)\} g y x_0$; $\tau_{xy} = 0$
- (b) $\sigma_x = -g y x_0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$
- (c) $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = \{\mu/(1-\mu)\} g y x$; $\tau_{xy} = 0$
- (d) $\sigma_x = g y x$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$

〔これ等 2 解法は精度全く同じき近似解であつて、例へば式 (302, b) に就き、 $\xi = \alpha$ とすれば楕圓形隧道周辺に於ける應力度 $[\sigma_y]_{\xi=\alpha}$ の式が得られるが、其れは結果に於いて、杉原氏の式 (22)+(37)+(45) を整理したものと一致する。

道周邊の形が $a/b=1.313$ なる楕圓を成してある場合

に便宜考へられ得る表内の形が寸法

Table with 18 columns (m1, m2, R1, R2, L1, L2, m1, m2, R1, R2, L1, L2, m1, m2, R1, R2, L1, L2) and 18 rows of numerical data. Includes a vertical label 'ホアソソ' on the right.

00即ち隧道周邊が半径 a なる圓の場合)

外側は考へられ得る同心圓の寸法

Table with 18 columns (m1, m2, R1, R2, L1, L2, m1, m2, R1, R2, L1, L2, m1, m2, R1, R2, L1, L2) and 18 rows of numerical data. Includes a vertical label 'ホアソソ' on the right.

3. 隧道周邊の形が半径 a なる圓である場合

式 (302) に於いて $\alpha \rightarrow \infty$, 従つて ξ に就いても $\xi \rightarrow \infty$ なる場合を考へれば隧道周邊の形が半径 a なる圓である場合の應力度表式が得られ得る。即ち斯かる場合

(cosh 2\xi - cos 2\eta) \to (e^{2\xi}/2); (ca/e\xi) \to (a/r)

但し, r: 應力度が求められ居る問題の點と圓の中心との距離

と考へられ得べきが故にこれ等關係を用ひて式 (302) を整理すれば, 圓の中心より即ち ce\xi/2 だけ離れた點の應力度は

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi} &= (W/2)(1+\nu) \{(a/r)^2 - 1\} + (U/4)(3+\nu) \{(r/a) - (a/r)\} \cos \eta \\
 &\quad - (W/2)(1-\nu) \{1 - 4(a/r)^2 + 3(a/r)^4\} \cos 2\eta \\
 &\quad + (U/4)(1-\nu) \{(r/a) - 5(a/r)^3 + 4(a/r)^5\} \cos 3\eta \dots\dots\dots (303, a) \\
 \sigma_{\eta} &= -(W/2)(1+\nu) \{1 + (a/r)^2\} + (U/4) \{(1+3\nu)(r/a) \\
 &\quad + (1-\nu)(a/r)\} \cos \eta + (W/2)(1-\nu) \{1 + 3(a/r)^4\} \cos 2\eta \\
 &\quad - (U/4)(1-\nu) \{(r/a) - (a/r)^3 + 4(a/r)^5\} \cos 3\eta \dots\dots\dots (303, b) \\
 \tau_{\xi\eta} &= -(U/4)(1-\nu) \{(r/a) - (a/r)\} \sin \eta \\
 &\quad + (W/2)(1-\nu) \{1 + 2(a/r)^2 - 3(a/r)^4\} \sin 2\eta \\
 &\quad - (U/4)(1-\nu) \{(r/a) + 3(a/r)^3 - 4(a/r)^5\} \sin 3\eta \dots\dots\dots (303, c)
 \end{aligned}$$

及び

で表はされ得べき事となり、此の式 (303) は山口博士の式 (17)²⁶⁾ と一致すべきものである。

5. 結 語

本小文に於いて著者が追求した處の要點に關しては便宜上既に第 3 節特に第 3 節 (2) に記した。従つて本節では此れ等以外なる 1~2 の事項に就いて述べ、本小文の結語としたい。

1. 本文に於ける解の精度に就いて

(A) 精度の尺度

本小文の近似解は 隧道所在位置の深さが或る限度より小になると高次的に其れの精度を失つて行く。第 3 節 (1) には假りに此の限度を “ $x_0/a = \text{大約 } 5$ ” なる表式で示して置いたが、實は此れは極めて大膽且つ概略的な表現たるに過ぎず、詳しく言へば

隧道の周邊を爲す楕圓の長徑 a と短徑 b との比 a/b

及び

地盤を構成する物質のポアッソン比 ρ

が共に此の限度に對し著しき關與を爲すものである。

今、

隧道中心を通る鉛直線上地表面に於いて本解法の示す σ_{ξ} が零となるか否かの問題だけを取り上げ之を以て本解法近似度測定尺度の略近的なる基準と見做し得ると假定すれば、式 (302, a) より直ちに得られ能ふ處の式

$$k_1(\xi_s, 0) x_0 + k_2(\xi_s, 0) a \doteq 0$$

即ち、

$$(x_0/a) \doteq - \{k_2(\xi_s, 0)/k_1(\xi_s, 0)\} \dots\dots\dots (401)$$

の充分に成立する様な深さを以て本解法是認の限度なりと一應稱し得る事になるであらうし、又

$$P = [(x_0/a) + \{k_2(\xi_s, 0)/k_1(\xi_s, 0)\}] / (x_0/a) \dots\dots\dots (402)$$

で示さる ν 値 P に對し適當に小なる數値を設定、附與する事に依り本近似解法適用可能の限度を規定し得る事もなるであらう。但し茲に $k_1(\xi_s, 0)$ 及び $k_2(\xi_s, 0)$ としては表-3 中 $\eta=0$ に對應する k_1 及び k_2 を夫々利用す

26) 山口：前掲，296 頁

れば宜い。例へば隧道の形が圓にして $\mu=0.5$ なる場合に就き $(x_0/a)=2$ なる時に本近似解が是認され得るや否やを檢するには、表-3 (D) 中 $\eta=0$; $r=2a$ の欄より k_1 及び k_2 を求め比 $\{-k_2(\xi_0, 0)/k_1(\xi_0, 0)\}$ を作つて見る。今の場合此の比が $(-1.500)/(-0.750)=2$ となつて丁度現在照査中に係る x_0/a の値に等しいから、

隧道の形が圓で $\mu=0.5$ なる場合には $(x_0/a)=2$ なる場合既に既に本近似解法が是認され得ると云ふ結論を一應立て、宜い事になる。

(B) μ の値が本解法是認の限度に及ぼす影響

茲では便宜のため、一例として隧道周邊の形が圓なる場合を引き續き考へて見る事とする。

既述の如く $\mu=0.5$ なる場合に就いては x_0/a が僅か 2 にして既に本解法が是認され得るのであるけれども、之は本解法に取つて是も好都合なる場合の一なりと實は稱せざるを得ず、此の種限度に對しては μ の値が著しき關與を爲すのが事の真相であり、即ち μ が順次小となるに従ひ是認の限度たる x_0/a が順次相當大なるを要するに至る。即ち假りに今 $(x_0/a)=5$ なる場合に就き P を式 (402) に依つて計算して見ると結果は表-4 の如くであり、茲に $\mu=0.5$ に對し $P=0$

表-4. 圓形周邊を有する隧道で $(x_0/a)=5$ なる場合の P の値

x_0/a	μ	k_1	k_2	k_2/k_1	P
5	0	-0.902	4.840	-5.365	-0.073
5	0.2	-0.917	4.830	-5.267	-0.053
5	0.286	-0.925	4.824	-5.215	-0.043
5	0.5	-0.960	4.800	-5.000	0

となつて居るのは本節 [I] (A) 末尾に述べたる處より當然であるが、 μ の $\mu=0.286$; $\mu=0.2$; $\mu=0$ と順次減少して行くに對しては P が 4%; 5%; 7% と順次増加の一途を辿り以て本解法是認の限度たるべき x_0/a を漸次増加する事の必要を示して居る。

尙ほ隧道周邊の形が圓なる場合丈けに關しては、式 (303, b) に就いて $\eta=0$; $r=a$ とした時の σ_η の値を算出し該結果を例へば、Mindlin の圖-6 (a)²⁷⁾ に比しても本解法是認の限度が知られ得るが、斯かる直接的にして確實な精度測定手段に依つた結果と、以上の如く P を用ひて試みた結果とは可なり類似なる傾向を示す。

(C) 隧道周邊楕圓長徑 a の同短徑 b に對する比 (即ち a/b) が本解法是認の限度に及ぼす影響

以上に依つて明白な通り、隧道周邊の形が圓又は之に近き楕圓なる場合に於ては本近似解法是認の限度たる x_0/a が必ずしも小でなく、殊に $\mu=0.286\sim 0.2$ と云ふ様な可なり實在的な場合に就き此の是認限度 x_0/a が餘り小でないのは遺憾である。

然る處隧道周邊の形が $(a/b)=2$ 及び $(a/b)=3.5$ に相當する様な楕圓なる場合だと、假りに $(x_0/a)=4$ に對して

P を計算しても結果は夫々表-5 及び表-6 に示す如くであり P は決して約 4% を超過せず殊に $\mu=0.286\sim 0.2$ 程度なる時 P の値が極めて小さい。

是に依つて見るに、隧道周邊たる楕圓が適當なる細長さを有

表-5. $(a/b)=2.164\approx 2$ なる楕圓を周邊とする隧道で $(x_0/a)=4.011\approx 4$ なる場合の P の値

x_0/a	μ	k_1	k_2	k_2/k_1	P
4.011	0	-0.950	3.918	-4.124	-0.028
4.011	0.2	-0.965	3.913	-4.055	-0.011
4.011	0.286	-0.974	3.907	-4.011	0
4.011	0.5	-1.011	3.896	-3.854	+0.039

27) Mindlin: 既掲, 636 頁

圖-7. $i_1(\alpha, \eta)$ 及び $i_2(\alpha, \eta)$ の圖表

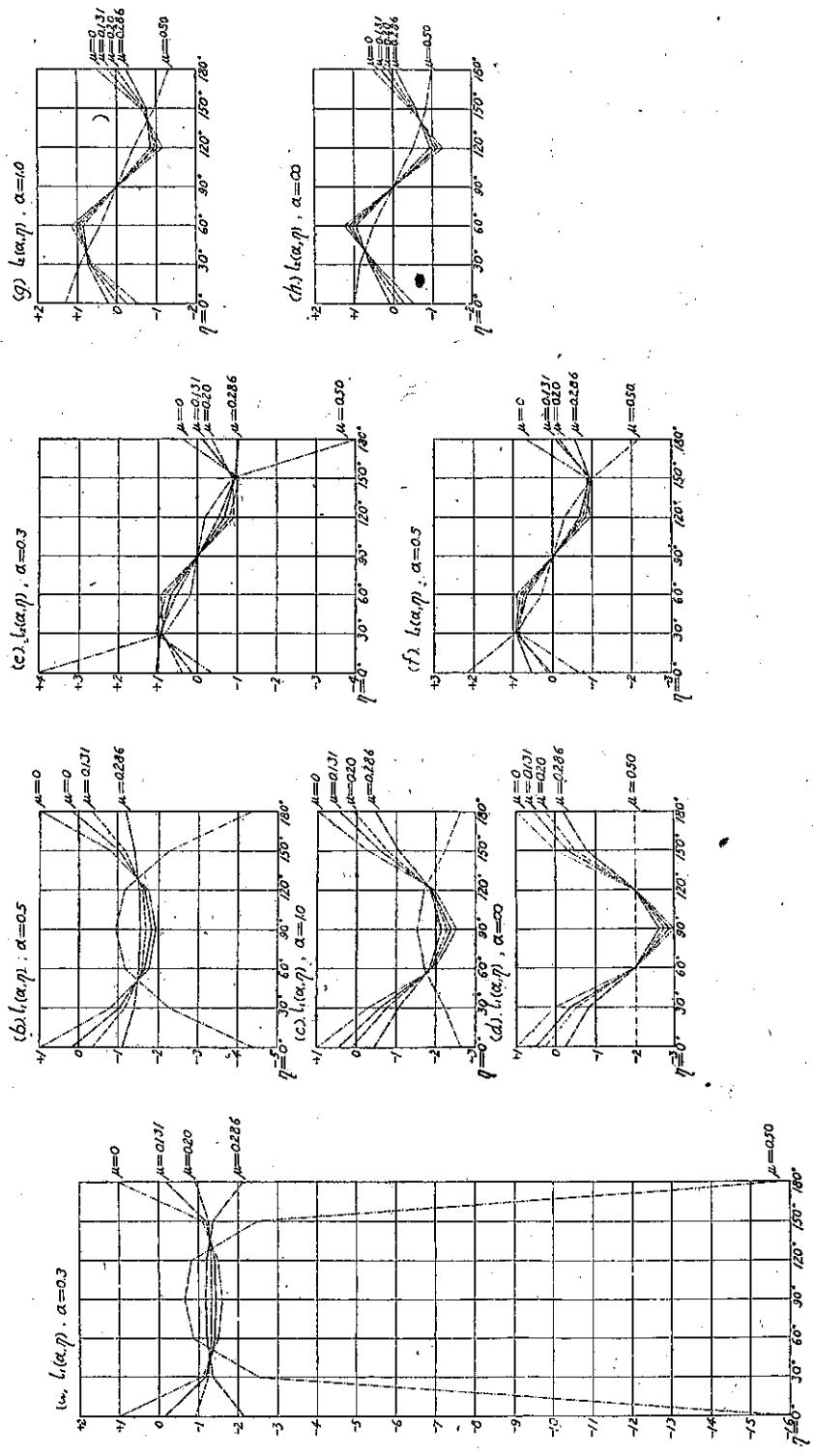


表-6. $(a/b)=3.433 \approx 3.5$ なる楕圓を周邊とする隧道で $(x_0/a) = 4.005 \approx 4$ なる場合の P の値

x_0/a	μ	k_1	k_2	k_2/k_1	P
4.005	0	-0.973	3.945	-4.054	-0.012
4.005	0.2	-0.986	3.942	-3.998	+0.002
4.005	0.286	-0.993	3.939	-3.963	+0.010
4.005	0.5	-1.024	3.931	-3.839	+0.041

する場合の中には本解法是認の限度たるべき x_0/a を可なり小ならしめ得る時が相當多く存在するものゝ様である。

2. 楕圓隧道周邊に於ける應力度に就いて

圖-7 に依れば楕圓隧道周邊に於ける應力 $[\sigma_\eta]_{\xi=a}$ に關して種々なる觀察を爲し得べく、例へば x_0 が a に比し充分に大なる時に就いて考へると、

(a) $[\sigma_\eta]_{\xi=a}$ は μ 、 α 及び η の如何により引張り應力と成る場合もあるが、壓縮應力たる場合の方が遙かに多い事。

(b) 壓縮應力たる $[\sigma_\eta]_{\xi=a}$ が其れの最大値を取る位置としては $\eta=90^\circ$ 及び $\eta=180^\circ$ なる兩者を挙げねばならない。れども大體の傾向としては μ が小にして α が大 (即ち楕圓離心率が小) なる場合は $\eta=90^\circ$ に對應する位置が之に該當し、 μ が大にして α が小 (即ち楕圓離心率が大) なる場合には $\eta=180^\circ$ に對應する位置が之に該當して居ること。

(c) μ が小なる程そして α が大なる程隧道周邊の上端及び下端には引張り應力たる $[\sigma_\eta]_{\xi=a}$ の生ずる傾向が稍々著明になる事。そして斯くの如く隧道周邊上、下端に引張り應力の生ずる場合でも其れ等應力の烈度絶對値は下端に於いて稍々大なる事。

(d) μ が大にして α が小なる場合 $\eta=180^\circ$ に對應する位置に生ずべき壓縮應力たる $[\sigma_\eta]_{\xi=a}$ の烈度は μ の特に大なる場合高次的に大なる事。

等の結論は直ちに得られ能ふであらう。而して著者は以上列擧の諸事項中で事項 (d) を特に重視したく思ふものであつて、其の理由は當面の問題に於いて比 a/b 以外に μ が種々の點で可なり重要な役割を爲して居り以上の (d) も其れ等の中の 1 つだからである。

元來通常の應力周邊問題では理論上 μ の介入を必要とする時でも μ の値が數値上應力分布に及ぼす影響は僅少だと云はれて²⁸⁾居るのに、本問題では μ の値の影響が著しいのであつて、其れの原因としては本問題が通常の周邊應力條件問題でなく、

(a) 周邊應力條件其のものゝ中に既に μ が入つて來て居り (式 201 參照)

(b) 而かも通常の有孔體問題の如く、應力及び變位の一意性を要求される事に依つても亦 μ の導入が必要となつて居る。

と云ふ事實を挙げ得るのであらう。果して然らば此の種問題に於いて解の適用は μ の値其他地盤性質の正しき認識に先行さるべきである。

28) Coker & Filon: 既掲, 501 頁