

論 說 報 告

第 28 卷 第 9 號 昭和 17 年 9 月

吊橋の振り振動に對する安定性に就て

正會員 平 井 敦*

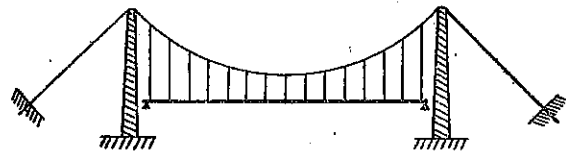
要 旨 吊橋に對して、水平方向の風力が橋軸に垂直に作用せる場合の補剛桁の振り振動の安定性を論じたものである。先づ振り振動の基本微分方程式が Mathieu の微分方程式になる事を述べ、振動の安定性を調べ、安定の極限としての限界風速を與へる式を導き、通常の場合には動力學的不安定性の主要なる項が寧ろ所謂“振れ挫屈”(Kipping)と考へられる事を指摘し、長徑間の吊橋設計上注意すべき諸性質を明らかにせるものである。

1. 緒 言

昭和 15 年 11 月、米國に於る一吊橋の慘事は痛く我々の注意を引いた所であるが、其破壊の原因については未だ満足すべき説明が無い様である。單に“空氣力學的不安定、なる語は屢々耳にせる所であり、又之の線に沿ふ二、三の實驗も米國に於て行はれて居るが、其等が何を意味するかはあまり明瞭でない様である。唯 E. N. R., May 8, 1941 には比較的具體的な事項が述べられて居るが、現在に於ては解析的に取扱ふ事は不可能であるとして、他の比較的安全と見做される吊橋との比較を行ふと云ふ間接的な手段に依り、空氣力學的不安定性が振り振動にあると推論し、振りに對する剛性及び補剛桁の幅員等が安定條件を支配する重要な因子である事を述べてはゐるが、解析的取扱ひでは無い爲設計上必要なる之等の限界値を定める事は今の所可能では無いと斷つてゐる。又米國に於る之等諸種の記述には所謂空氣力學的な力 (Aerodynamic force) を非常に神經質に考へて居る反面、後述の風壓の項を——之も Aerodynamic force の一であるが——あまり意識して居ない様に感ぜられる。

筆者は圖-1 の如き吊橋に對し水平方向の風力が橋軸に垂直に作用せる場合の補剛桁の振り振動を取扱つた所、次の如き結果が得られたので、一應其を御報告する次第である。問題を簡單にする爲に單徑間の吊橋とし且風力は水平にして橋軸に垂直なるものと假定したが之等を更に一般化する事は比較的容易の事と信ぜられる。又塔の影響等も本文では考へない事とする。尙本文に於ては補剛桁なる語は補剛桁全體を意味し、主桁と稱する場合は補剛桁を構成する構或は鈹桁を意味するものとするが、本文に於ては大體に於て鈹桁の場合を考察の主なる對照とする。

圖-1.



2. 主なる記號

E 彈性係數

G 剛性係數

K 補剛桁全斷面の振り係數

I 補剛桁全斷面の慣性モーメント

H 死荷重に基く索條の水平張力

S 補剛桁單位長當りの側面有效曝露面積

l 支 間

b 補剛桁の幅員 (主桁の間隔)

* 工學士 京城帝國大學助教授

V 風 速 ρ 空氣密度 $p = \frac{1}{2} \rho V^2$ φ 補剛桁の振れ角 (radian) k 風壓係數 C_m モーメント係數 f 索條の拱矢 m 片側の索條に負擔さるべき吊橋の死荷重

3. 補剛桁の振り振動

吊橋が靜的平衡状態にある時、其補剛桁の中心軸方向に z 軸を、塔の方向に x 軸を振り之等に對し y 軸を圖-2 の如く振ぶ。風の方は y 軸に平行に、其負方向に吹くものと假定する。更に振動する補剛桁の任意の點 z に於る斷面の中心に圖の如く座標

系 ξ, η, ζ を考ふ。 ξ 及び η は斷面の主軸方向に、 ζ は振動中の補剛桁の中心軸の切線方向に振ぶ。又補剛桁の x -方向の小なる變位を u とし其廻轉角を x 軸より y 軸の方向に對し φ とする。しかるとき x 軸と ξ, η 及び ζ 軸との方向餘弦は補剛桁の變位が小なる限り近似的に次式を以て與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \cos(x, \xi) &= 1 \\ \cos(x, \eta) &= -\varphi \\ \cos(x, \zeta) &= \frac{du}{dz} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

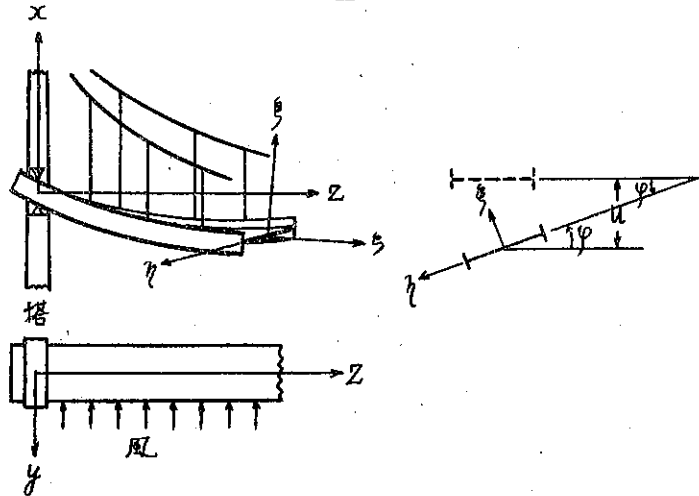


圖-2.

補剛桁の長さ dz の部分の振りに對する弾性力 dM_E は、振りに對する粘性を省略して

$$dM_E = \frac{\partial}{\partial z} \left(KG \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz$$

但し、

G ; 剛性係數

K ; 補剛桁斷面の振係數

しかして補剛桁が全支間に互り一樣な斷面を有するものと假定すれば、

$$dM_E = KG \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \dots\dots (2)$$

次に dz 部分の或變位に對する吊橋としての復原性を考ふるに、補剛桁を構成する主桁の撓みを夫々 u_1 及び u_2 とし、死荷重に基く索條の水平張力を H とすれば吊材により索條に傳へらるゝ力は dz 部分につき夫々 $H \frac{d^2 u_1}{dz^2} dz$ 及び $H \frac{d^2 u_2}{dz^2} dz$ と考へらるゝ故、近似的に圖-3 の如く取扱ふ事を得。但し各主桁の高さの影響は無視せり。従つて吊橋構造である爲の復原力 dM_s は近似的に、

$$dM_s = H \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} dz \cdot \frac{b}{2} \cos \varphi - H \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} dz \cdot \frac{b}{2} \cos \varphi$$

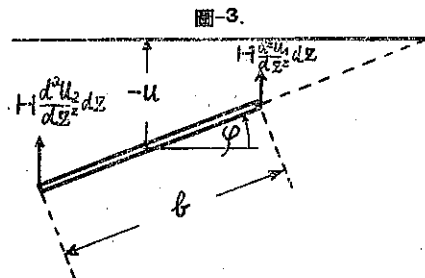


圖-3.

$$= \frac{Hb}{2} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right] dz$$

然して、圖-3 の如き場合に對しては、

$$u_1 = -u + \frac{b}{2} \varphi$$

$$u_2 = -u - \frac{b}{2} \varphi$$

$$\therefore dM_s = \frac{Hb^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \quad \dots \dots \dots (3)$$

最後に補剛桁に作用する空氣力學的な力を考ふるに、大體に於て之は次の 3 種であると考へても誤では無い様である。

- i) 揚 力 ii) モーメント iii) 抵抗力或は風壓

しかして揚力即ち氣流中に於る補剛桁の所謂揚力係數に對しては米國に於て相當實驗が行はれた様であるが、通常の場合吊橋の補剛桁の重心軸は振りに對する彈性の中心軸と殆ど一致して居ると考へらるゝ故、補剛桁の振り振動のみを其對照とするならば、之は直接的には關係はない様である。

次に主として揚力に基くモーメントであるが、氣流中に於る補剛桁の中心軸に關する單位長當りに作用するモーメントを M_m とし、 φ を増加せしむるが如き方向を正とすれば、 M_m は次式で與へられる。

$$M_m = C_m \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) (b \times 1) b = C_m p b^2$$

但し、

$$p = \frac{\rho V^2}{2}$$

茲に C_m は補剛桁の中心軸に關する風力モーメント係數であつて、之は主として揚力が如何に分布せられて居るかに依り決定せられ、本係數が補剛桁の氣流中に於るモーメントの特性を示すのである。

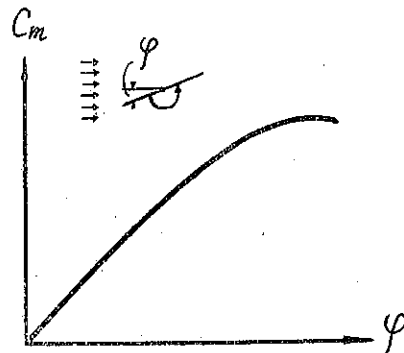
一般には、

$$C_m = f(\varphi)$$

であるが、補剛桁の斷面が薄い板と同様な性質を有すると考へらるゝ場合には圖-4 の如き特性を有するものと推定せられる。補剛桁が、風力の影響を受くる事の少い様な型の構桁 (Truss) 及び鐵筋コンクリートの床部より構成せられる場合、或は構桁の代りに高さの低い鈹桁が用ひられ、且幅員が鈹高に比し比較的大なる場合等が之種に近いものと考へられ、此場合のモーメント係數は大體圖-4 の如き傾向を有するものと考へても誤ではなからうと信ぜられるが、精しくは實驗に依り確定せらるべきものであつて別の機會に譲る。

之に反し、幅員 b に比し比較的高い鈹桁を主桁とし、鐵筋コンクリートの床部を有する補剛桁の場合等には、 φ が比較的小なる範圍に於ては (圖-5 參照)、床部 S よりも風上の鈹桁 P_2 の影響が強く現はれ、 C_m としては寧ろ $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$ の位置の板に相當する傾向が現はれないかと考へられる。更に風下の鈹桁 P_1 の影響も加はつて、かかる場合の C_m -曲線は圖-5 の如くなるものと推定せらる。しかしながら φ が大になるか、或は幅員 b と鈹

圖-4.



桁の高さ h との関係如何に依つては再び床部 S が支配的影響を持つ場合もあり得るわけである。

しかしながら兎に角一般に、 φ が比較的小なる範囲に於ては、

$$C_m = f(\varphi) \approx a\varphi \quad \dots\dots\dots (4)$$

と考へられ、 a は實驗に依り定められるべき正或は負の常數である。

尙本文には直接關係はないが、揚力に關する特性を示す所謂揚力係數に對しても同様の事が考へられるが、單に揚力係數の曲線が通常の薄板或は飛行機の翼の係數の特性曲線と異つてゐるといふ事實のみからは直ちに空氣力學的不安定と結論する事は出来ない。

再び元に戻り、圖-5 に相當する場合の實驗を Harold A. Thomas (E.N.R., April 10, 1941, p. 547) が簡単な裝置 (圖-7) で行つてゐるが、其信頼性はともかくとして大體の傾向をたどる便宜の爲に再録したのが圖-6 である。圖中 C_L は揚

圖-5.

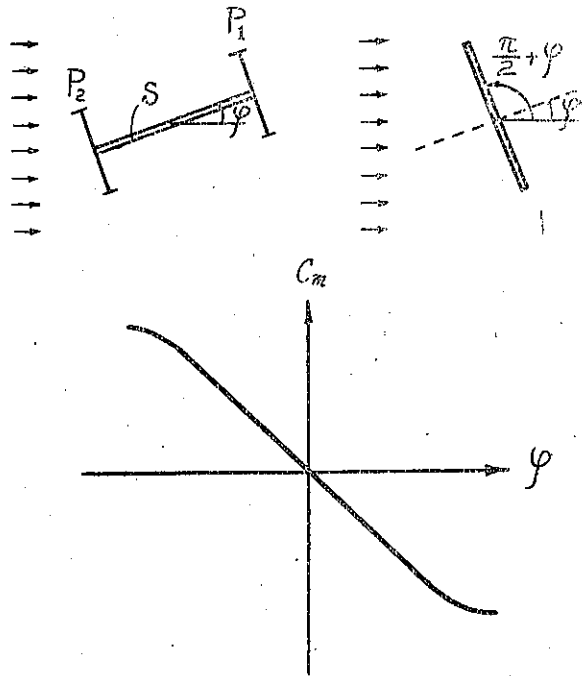
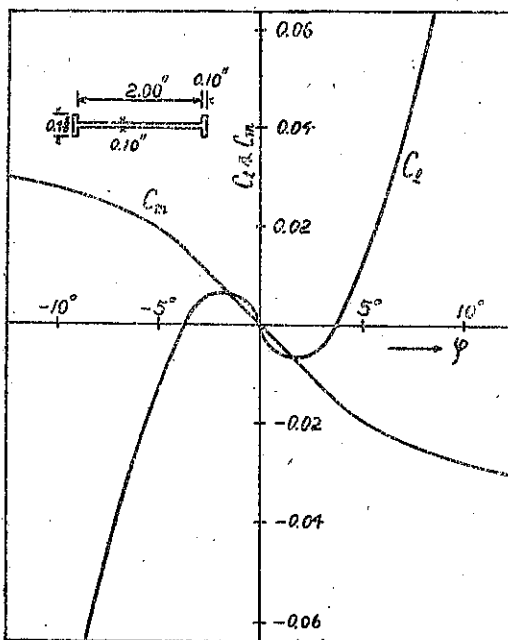


圖-6.



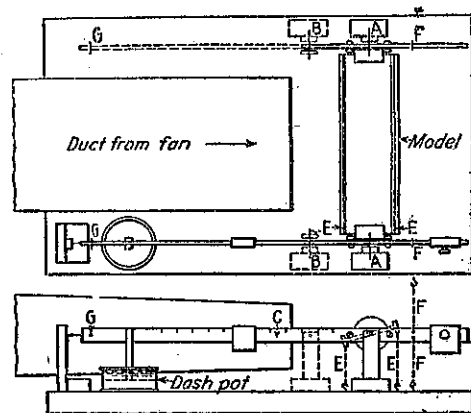
E.N.R. 4月, 10, 1941. P.548.

力係數であるが、次に述べる抵抗係數については實驗がない様である。

補剛桁の dz なる部分の風力による (主として揚力の分布状況に基く) モーメント dM_m は、 φ の小なる範囲に於ては (4) により次式で與へられる。

$$dM_m = C_m p b^2 dz = a p b^2 \varphi dz \quad \dots\dots\dots (5)$$

圖-7.



但し係數 α は實驗により確められるべき正或は負の常數である。

最後に抵抗力即ち風壓であるが、筆者の手にある文獻に依れば概して米國の關心は Tacoma 橋についてあまりこの方面には向けられて居ない様に感ぜられるが、之は筆者の見落しであるかも知れない。單位長當りの風壓 w は比較的小なる φ に對しては周知の如く次の如き形で與へる事が出来る。

$$w = k\rho SV^2 \dots\dots\dots (6)$$

茲に k は常數、 V は風速、 S は補剛桁の單位長當りの側面有效曝露面積 (有效垂直投影面積) で、補剛桁を構成する主桁が縦桁なる時は其の高さ h とおく事を得。

補剛桁にかかる風壓が作用する時、其任意の點 z に於る此風壓に基く曲げモーメントを M_w とすれば、(1) により ξ -軸へのこの成分 M_w は、

$$M_w = \frac{du}{dz} m_x$$

従つて dz なる部分に働くモーメント dM_w は

$$dM_w = M_w + \frac{\partial}{\partial z} M_w \cdot dz - M_w = \frac{\partial}{\partial z} M_w \cdot dz$$

$$\therefore dM_w = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} m_x \right] dz = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} m_x + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial m_x}{\partial z} \right] dz$$

今第 2 項を省略する事とすれば、

$$dM_w = \frac{\partial}{\partial z} M_w \cdot dz = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} m_x \cdot dz$$

次に風壓に基く曲げモーメントの η -軸への成分は $-\varphi m_x$ であり、補剛桁の中心軸の ξ - η 面内の曲率は角 φ が小なる限り x - z 面内の曲率に等しいものと假定する事が出来る故之は $\frac{d^2 u}{dz^2}$ で表はされる。

$$\therefore \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{\varphi}{EI} m_x$$

茲に I は補剛桁の全斷面の y 軸の廻りの慣性モーメントで、近似的に補剛桁を構成する主桁の慣性モーメントの 2 倍と考へる事が出来る。

従つて次式を得。

$$dM_w = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} m_x dz = \frac{\varphi}{EI} m_x^2 dz \dots\dots\dots (7)$$

補剛桁の振動方程式を立てるに當り、 θ を桁の中心軸の廻りの質量慣性モーメントとすれば、 dz なる部分の質量慣性モーメントは $\theta \frac{dz}{l}$ である。振り振動方程式、

$$\frac{\theta}{l} dz \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = dM_B + dM_s + dM_m + dM_w$$

に (2), (3), (5) 及び (7) を代入すれば補剛桁の振り振動の基本式として、

$$\frac{\theta}{l} dz \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = KG \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz + \frac{Hb^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz + \alpha pb^2 \varphi dz + \frac{m_x^2}{EI} \varphi dz \dots\dots\dots (8)$$

を得。但し本式に於ては補剛桁の y -方向の變位は之を無視せり。

(6) で與へられる風壓に基く曲げモーメント m_x は補剛桁の支間を l とすれば、拱矢 $wl^2/8$ なる拋物線として與へられるが、其 Fourier の展開式に對する近似式として

$$w = \frac{wl^2}{8} \sin \frac{\pi z}{l} \quad \dots\dots\dots (9)$$

を用ふれば (8) は次の如くなる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left[apb^2 + \frac{w^2 l^4}{64 EI} \sin^2 \frac{\pi z}{l} \right] \varphi \quad \dots\dots\dots (10)$$

或は書きなほして、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left[\left(apb^2 + \frac{w^2 l^4}{128 EI} \right) - \frac{w^2 l^4}{128 EI} \cos 2 \frac{\pi z}{l} \right] \varphi \quad \dots\dots\dots (10')$$

更に、

$$\frac{\pi z}{l} = v$$

とおけば、

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \quad \text{に對して} \quad v=0 \\ z=l \quad \quad \quad \quad v=\pi \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

又

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\pi}{l}$$

∴

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\pi}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\pi}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$

従つて (10') は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left[\left(apb^2 + \frac{w^2 l^4}{128 EI} \right) - \frac{w^2 l^4}{128 EI} \cos 2v \right] \varphi \quad \dots\dots\dots (10'')$$

(10'') に於て、

$$\varphi = \phi(v) e^{i n t} \quad \dots\dots\dots (12)$$

とおけば、

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -n^2 \phi(v) e^{i n t} \quad \text{及び} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} e^{i n t}$$

故、(10'') より次式を得。

$$\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) \frac{d^2 \phi}{dv^2} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} n^2 + apb^2 + \frac{w^2 l^4}{128 EI} \right) - \frac{w^2 l^4}{128 EI} \cos 2v \right] \phi = 0$$

今

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{w^2 l^4}{128 EI \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} = 16q \\ \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{\frac{\partial}{\partial t} n^2 + apb^2 + \frac{w^2 l^4}{128 EI}}{\left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} = 4\lambda \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

とおけば上式は、

$$\frac{d^2 \phi}{dv^2} + (4\lambda - 16q \cos 2v) \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。

(14) は Mathieu の微分方程式であつて、Mathieu 函数 $Ce_0v, Ce_1v, Ce_2v, \dots$ 及び Se_1v, Se_2v, \dots は (14) を満足す。今補剛桁の支間の両端及び中央點に於る斷面が、振り振動を行はなない様な場合即ち中央に節點がある場合*を考察の對照とすれば境界條件は

$$\left. \begin{array}{llll} z=0 & \text{即ち} & v=0 & \text{で} & \phi=0 \\ z=\frac{l}{2} & & v=\frac{\pi}{2} & & \phi=0 \\ z=l & & v=\pi & & \phi=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

である。この條件を満足する Mathieu 函数は Se_2v である故、次式の如く置く事を得。

$$\phi(v) = A' Se_2(v, q) \dots\dots\dots (16)$$

但し q は λ の函数で、其關係を示したのが圖-8 である。しかして q が比較的小なる場合、 λ の近似値は次式で與へられる。

$$\lambda = 1 - \frac{4}{3} q^2 + \frac{5 \times 4^4}{3456} q^4 \dots\dots\dots (17)$$

q が更に小なる場合には、第1 近似値として (17) より

$$\lambda \approx 1 \dots\dots\dots (18)$$

∴ (13) より、小なる q に對して次式を得べし。

$$\frac{\frac{\Theta}{l} n^2 + apb^2 + \frac{w^2 l^4}{128 EI}}{\left(KG + \frac{b^2}{2} H\right)} = 4 \frac{\pi^2}{l^2} \dots\dots\dots (19)$$

$$\therefore e^{int} = A'' \frac{\cos}{\sin} \left\{ \sqrt{\frac{l}{\Theta} \left[4 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H\right) - apb^2 - \frac{w^2 l^4}{128 EI} \right]} \cdot t \right\}$$

從つて (12), (16) より

$$\varphi = A \cdot Se_2(v, q) \frac{\cos}{\sin} \left\{ \sqrt{\frac{l}{\Theta} \left[4 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H\right) - apb^2 - \frac{w^2 l^4}{128 EI} \right]} \cdot t \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(20) は q が小なる場合の、比較的小なる φ に對する 振り振動の解である。振動の形を與へる $Se_2(v, q)$ を圖示すれば、圖-9 及び圖-10 の如し。尙寫眞-1 は Tacoma 橋の振動狀況で、參考の爲にニュース・フィルムより再録したものである。

(19) 或は (20) よりかゝる振動の安定性を吟味すると;

$$4 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H\right) - apb^2 - \frac{w^2 l^4}{128 EI} > 0$$

* 節點が無い場合は Mathieu 函数として Se_1v を選び、又 2 節點の場合は Se_3v をとる。

圖-8.

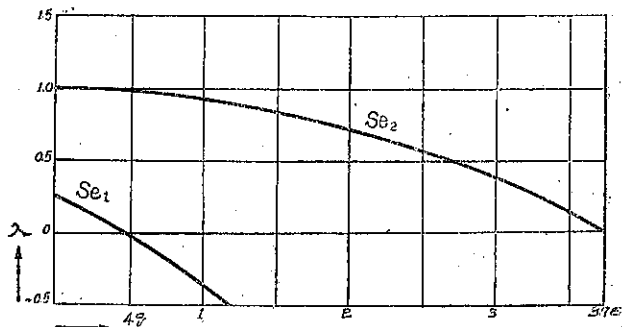


圖-9.

寫眞-1.

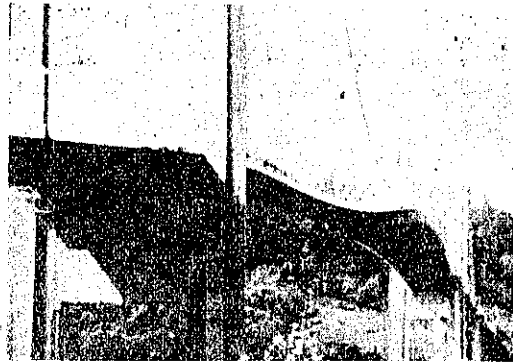
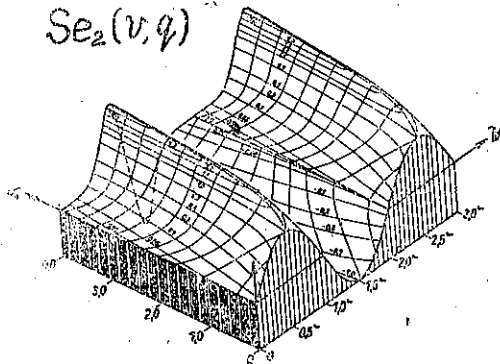
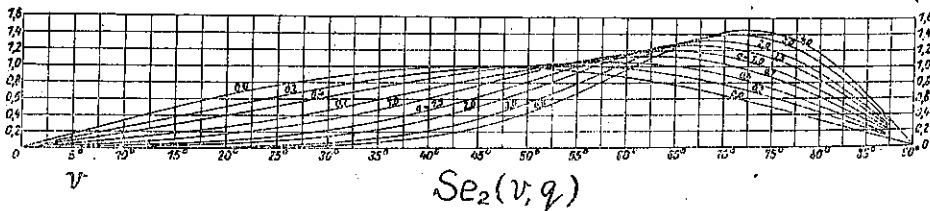


圖-10.



に對しては振動は安定であるが、

$$4 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) - \alpha p b^2 - \frac{w^2 l^4}{128 EI} = 0$$

の時には振動が無週期となり、振動が不安定となる。即ち振り振動の安定の限界は、

$$\alpha p b^2 + \frac{w^2 l^4}{128 EI} = 4 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) \dots \dots \dots (21)$$

で與へられる。然るに

$$w = k \rho S V^2 \quad \text{及び} \quad p = \frac{1}{2} \rho V^2$$

故、之等を (21) に代入すれば、限界風速を決定する次式を得。

$$\frac{(k \rho S l^2)^2}{128 EI \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} V^4 + \frac{\alpha \rho b^2}{2 \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} V^2 = \frac{4 \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots (22)^*$$

しかして (22) の第 2 項は 普通所謂動力學的不安定性として論ぜられる項であるが、之は通常の場合に於ては第 1 項に比し省略し得ると考へられる。従つて其際の限界風速の略算式としては

$$V^4 = \frac{4 \times 128 \pi^2 EI}{(k \rho S)^2 l^6} \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) \dots \dots \dots (23)$$

で充分と信ぜられる。

しかして (22) の第 2 項を省略する事は (8) に於て第 3 項即ち主として揚力に基づくモーメントの影響を省略する事を意味し、微分方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = KG \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz + \frac{H b^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz + \frac{m_2}{EI} \varphi \cdot dz$$

となる。安定の限界のみを考ふる際には弾性振動の復原力の無くなる所を調べるのみにて充分である故、上式の右邊を零とおき；

$$\left(KG + \frac{b^2}{2}H\right) \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{M_z}{EI} \varphi = 0$$

しかるに本式は、静力學的に“捩れ挫屈” (Kippung) として知られてる現象の基本式である。即ち (23) で與へられる限界風速は、吊橋構造の影響を考へた場合の補剛桁の“捩れ挫屈”を示すものである。——單に補剛桁のみの風壓に對する“捩れ挫屈”を考へるならば $Hb^2/2$ の項が無い。——從つて吊橋の補剛桁の設計に際しては、先づ第一に“捩れ挫屈”を警戒する必要がある。

しかして (23) を導くに當り (17) の第 1 項のみを取り (18) の如く、

$$\lambda \approx 1$$

とおいたが、かゝる取扱いについて吟味を行へば次の如し。(13) に於て、 $n=0$ とおけば；

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{(kpS)^{2/3}}{2048\pi^2 EI \left(KG + \frac{b^2}{2}H\right)} V^4 \\ \lambda &= 4q + \frac{apb^{2/3}}{8\pi^2 \left(KG + \frac{b^2}{2}H\right)} V^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13')$$

しかして λ と q の間には (17) で與へられる關係即ち；

$$\lambda = 1 - \frac{4}{3}q^2 + \frac{5 \times 4^4}{3456}q^4 \dots\dots$$

が成立すべきである故、(13') 及び (17) を聯立に解いて正しい値に近い (λ, q) が定まり又正しい値に近い限界風速が得られる。この關係を圖示した一例が圖-11 であり、(17) は $q-\lambda$ 面上に曲線 Se_2 として圖示され、(13') も亦 $q-\lambda$ 面上の一曲線として與へられる故 2 曲線の交點 A として (λ, q) の値が確定し、又 (13') の何れかの式により限界風速が定まる。補剛桁に對する空氣力學的なモーメントの影響を省略する場合に對しては、

$$apb^2 = 0$$

故 (13') より、

$$\lambda = 4q$$

を得。之は $q-\lambda$ 面上で一つの直線である。この直線 (圖-11 の點線) と Se_2 -曲線との交點 B は空氣力學的モーメントを省略せる場合の (λ, q) の値を與へる。以上の如き點 A 或は B として與へられる (λ, q) の値を (λ_0, q_0) で示す事とすれば (13') より

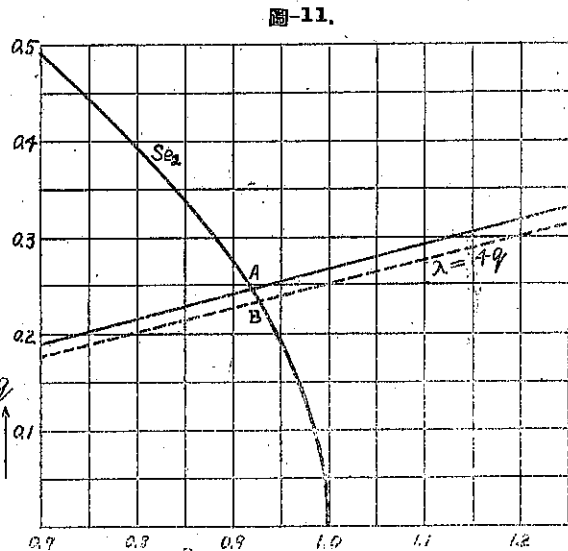


圖-11.

* lateral buckling を邦譯し、横挫屈と稱する人があるが、其意味を誤るおそれがある故この種挫屈を示すものとして“捩れ挫屈”と稱したい。

$$\frac{(k\rho S l^2)^2}{128 EI \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} V^4 + \frac{a\rho b^2}{2 \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} V^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \lambda_0 \dots (24)^*$$

を得るが、本式より正しい値に近い限界風速が得られる。しかして本式中の λ_0 は、**圖-11** の如き場合には近似的には

$$\lambda_0 \doteq 1$$

と考へても大體に於て差支へ無い事と考へられる。即ち (22) を得べし。以下の記述に於ては、便宜上 $\lambda_0 = 1$ とし、この場合につき議論を進める事とする。

再び (23) に戻り、本式に於て

$$KG \ll \frac{b^2}{2} H$$

故

$$V^4 = \frac{4 \times 128 \pi^2 EI b^2 H}{2 \times (k\rho)^2 S^2 l^6}$$

更に索條の拱矢を f とし、片側の索條に負擔さるべき吊橋の死荷重を m とすれば、

$$H = \frac{ml^2}{8f}$$

故上式は

$$V^4 = \frac{32 \pi^2 EI m b^2}{(k\rho)^2 S^2 l^4 f}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} V^2 &= \mu \frac{b}{S l^2} \sqrt{\frac{EI m}{f}} \\ \mu &= \frac{4\pi\sqrt{2}}{k\rho} \end{aligned} \right\} \dots (25)^*$$

但し

(25) が、單徑間の吊橋の補剛桁が中央に節點を有するが如き振り振動をなすとき其限界風速を與へる略算式である。但し本式に依り與へらるゝ値は、前記の $\lambda_0 = 1$ と假定せる影響の他に、かゝる問題の一般性として寧ろ危險側にあり、限界風速は之より多少小になる筈である故、實際問題としては (25) に對し更に或る安全率を乗すべきであらう。

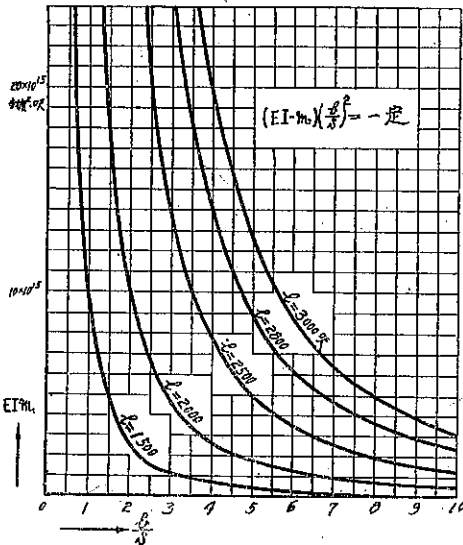
(45) より補剛桁の設計上注意すべき諸點が明かにせらる。即ち補剛桁の剛性 EI 、死荷重 m 、及び幅員 b はなるべく大に、補剛桁の側面有效曝露面積 S 及び支間 l は小なる方が安定度が大である。しかして撓度理論に依り其重要性を輕視せられた補剛桁の剛性が死荷重と共に再び考慮せられなければならない點は注目すべき事であり、又側面有效曝露面積が小なる事を要求せらるゝ故、 $a\rho b^2$ の影響と共に、補剛桁の斷面の選定には深き注意が拂はれるべきであつて、一應は實驗的検討を行ふ事も必要であらう。(25) には b/S なる項が含まれて居るが、 b/S が増加すれば限界風速が高まる事は實驗的にも認められて居る様である。又支間の影響が著しく大なる事であつて、この點は特に注意すべき點である。

(25) を書きなほせば、

$$\frac{(EI m) \left(\frac{b}{S} \right)^2}{l^6} = \frac{(k\rho)^2 \left(\frac{f}{l} \right)}{32 \pi^2} V^4 \dots (25)'$$

(25') の右邊は設計上大體常數と考へられる。**圖-12** 及び **圖-13** は $(EI m)$ 、 b/S 、及び l の間の傾向を示す一例

圖-12.



であるが、之等は

$$\frac{(EI/m)(\frac{b}{S})^2}{l^6} = 1.29 \left[\frac{\text{封度}^2}{\text{呎}^4} \right]$$

として描かれたものである。

尙設計上の便宜の爲に、風壓に對する關係式を求むれば (21) より;

$$\frac{EI m b^2}{l^6} \frac{w^2}{32 \pi^2} \left(\frac{f}{l} \right) \dots\dots\dots (26)^*$$

最後にかゝる種類の振動の大略の性質を調べておく事は必要のある事である。風速 V と振動數 $n/2\pi$ との間の關係の概略を知る爲に、(19) に

$$w = k \rho S V^2 \quad p = \frac{1}{2} \rho V^2$$

を代入すれば;

$$n^2 = \frac{l}{\theta} \left[4 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) - \frac{a \rho b^2}{2} V^2 - \frac{(k \rho S l^2)^2}{128 EI} V^4 \right] \dots\dots\dots (27)^*$$

従つて振動數 $n/2\pi$ は風速 V の函數であるが、其大體の傾向を一例を以て示せば 圖-14 の如くであり、風速が或値に達すれば振動數は急激に減少し、遂に振動數零即ち不安定の狀態に達する。

以上に於ては、 φ に對する假定のみならず、材料の粘性抵抗、空氣抵抗等を省略せる爲振動狀態としては多少

圖-13.

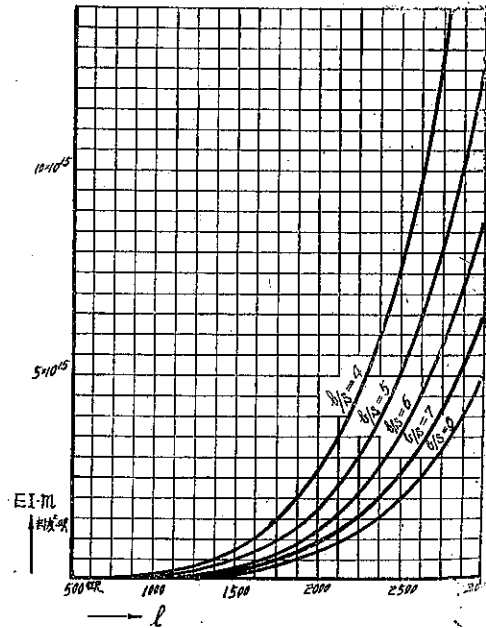
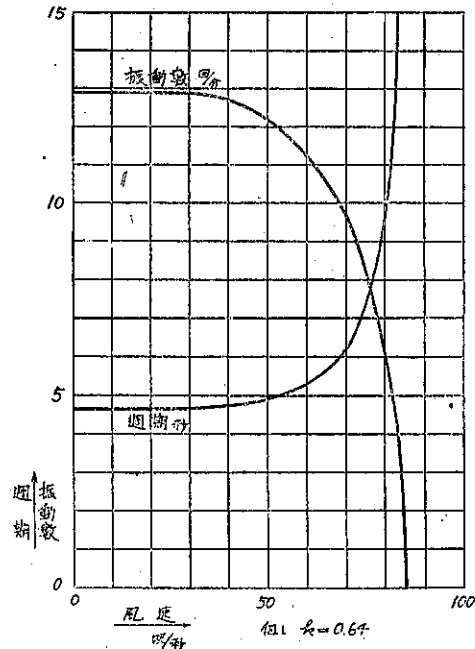


圖-14.



補正を要するわけであるが、安定の極限を求むる目的に對しては之で大體差支へない事と信ぜられる。

4. Tacoma 橋の振り振動

Tacoma 橋の破壊原因を總て前節の振り振動に對する限界風速の式 (22) に求むる事は早計であるが、(22) 或は (25) の適用例* として Tacoma 橋 (圖-15) を撰んで見よう。又比較の爲に補剛桁の主桁が鋸桁より成る Whitestone 橋につき二、三計算を行ふ事とする。兩者の主要寸法は表-1 の如し。之より更に算出したのが表-2 である。

圖-15.

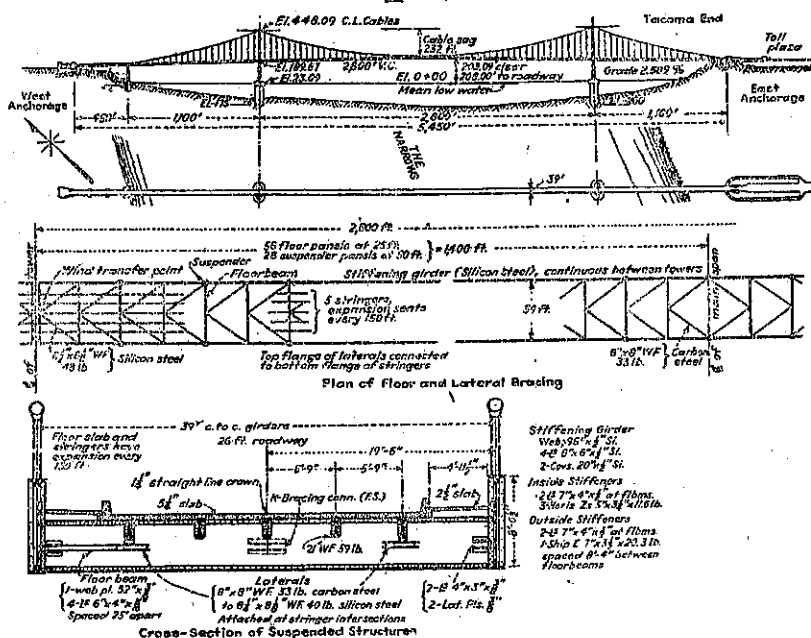


表-1.

表-2.

| | 單位 | Tacoma 橋 | Whitestone 橋 | | 單位 | Tacoma 橋 | Whitestone 橋 |
|-----------|----------------|-------------------|-------------------|--------------|-------------------|-----------------------|------------------------|
| 中央徑間長 | 呎 | 2 800 | 2 300 | m (1 索條當) | 封度/呎 | 2 850 | 9 370 |
| 側徑間長 | " | 1 100 | 735 | EI | 封度・呎 ² | 7.71×10^{10} | 17.58×10^{10} |
| 幅員 | " | 39 | 74 | S | 呎 ² | 8 | 11 |
| 中央徑間平均死荷重 | 封度/呎 | 5 700 | 11 000 | b^2 | " | 1 521 | 5 476 |
| 索條數 | 本 | 2 | 2 | l^2 | " | 784×10^4 | 529×10^4 |
| 索條排矢 | 呎 | 232 | 200 | b/S | | 4.875 | 6.727 |
| 主桁 (鋸桁) 數 | | 2 | 2 | $EI \cdot m$ | 封度・呎 | 0.22×10^{15} | 1.647×10^{15} |
| 補剛桁の I | 吋 ⁴ | 370×10^8 | 844×10^8 | f/l | | 1/12 | 1/11.5 |
| 鋸桁高 | 呎 | 8 | 11 | | | | |
| 塔高 | " | 425 | 353 | | | | |
| 設計風速 | 封度/呎 | 560 | 800 | | | | |

* Tacoma 橋の補剛桁は 3 徑間の連索桁であるが、假に之を單徑間として計算を進める事とする。

先づ Tacoma 橋の振り振動の限界風速を求むるに當り, (22)

$$\frac{(k\rho S)^2 l^3}{128\pi^2 EI \left(KG + \frac{b^2}{2}H\right)} V^4 + \frac{a\rho b^2 l^2}{2\pi^2 \left(KG + \frac{b^2}{2}H\right)} V^2 = 4$$

の各係数を算出すれば次の如し。

風壓係数 k は通常,

$$k=0.64$$

と置くのが普通であるが, George E. Howe が Sir Thomas Stantun 及び Alexander Gustave Eiffel の研究として傳へる所に依れば, 飯桁の高さに比し支間が長大なる場合に於ては,

$$k=1.00$$

とするのが適當の様である。

$$\text{又} \quad \rho = 0.002378 \left[\frac{\text{封度} \cdot \text{秒}^2}{\text{呎}^4} \right]$$

更に圖-6 より φ を radian に換算して a の値を求むれば;

$$a \approx -0.229$$

$$\text{又} \quad \frac{b^2}{2}H = 91 \times 10^3 \text{ [封度} \cdot \text{呎}^2]$$

$$\therefore \frac{(k\rho S)^2 l^3}{128\pi^2 EI \left(KG + \frac{b^2}{2}H\right)} \approx 19.73 \times 10^{-8}$$

$$\frac{a\rho b^2 l^2}{2\pi^2 \left(KG + \frac{b^2}{2}H\right)} \approx -3619 \times 10^{-8}$$

$$\therefore 19.73 V^4 - 3619 V^2 - 4 \times 10^8 = 0$$

$$\text{之より,} \quad V \approx 67.9 \text{ 呎/秒 (20.7 米/秒)}$$

或は風速 V (呎/秒) を (哩/時間) に換算し, 之を \bar{V} とすれば,

$$\bar{V} = 46.3 \text{ 哩/時間}$$

更に正しい値に近い値を求むる爲には,

$$\lambda = 1 - \frac{4}{3}q^2 + \frac{5 \times 4^4}{3456}q^4, \dots$$

及び

$$q = 123.3 \times 10^{-10} V^4$$

$$\lambda = 4q - 9.048 \times 10^{-6} V^2$$

を聯立に解けば得られるが, 之等 2 曲線をプロットすれば (表-3 及び 表-4 参照) 圖-16 が得られ, 其交点 A の座標は

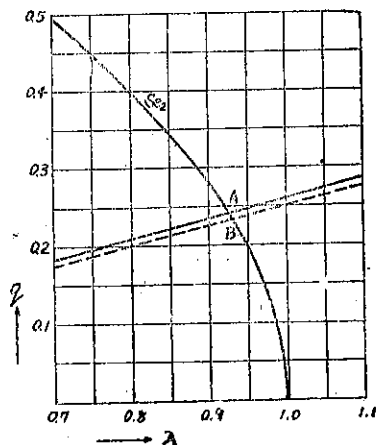
$$\lambda = 0.924$$

$$q = 0.241$$

で, 従つて

$$V = 66.5 \text{ 呎/秒 (20.3 米/秒)}$$

圖-16.



$\bar{V}=45.3$ 哩/時間

を得。

今假に、

$$k=0.64$$

として計算を行へば、前掲の圖-11を

得。之より

$$V \approx 83.6 \text{ 呎/秒 及び}$$

$$\bar{V} \approx 57.0 \text{ 哩/時間}$$

を得。

次に“振れ挫屈”のみを考ふれば

(25)

$$V^2 = \mu \frac{b}{Sl^2} \sqrt{\frac{EI m}{f}}$$

に對して、 $\mu \approx 7460 \left[\frac{\text{呎}^4}{\text{封度} \cdot \text{秒}^3} \right]$

之より、 $V=67.2$ 呎/秒 (20.5 米/秒)

$$\bar{V}=45.8 \text{ 哩/時間}$$

即ち主として揚力に基くモーメントの影響は Tacoma 橋に關しては實用上殆ど無視し得る程であつて、振り振動の不安定性の主要なる項は風壓に基く“振れ挫屈”であると云つても過言ではないと信ずるものである。尙“振れ挫屈”のみを考ふる場合は圖-11 或は圖-16 の點線に相當するのであるが之が (13') で與へらるゝ實線の曲線に極めて接近して居る事は、かゝる近似が充分採用し得る事を示すものである。

以上に依り Tacoma 橋に於ては、大體 45 哩/時間の風速が限界風速と考へられるが、前節にも述べた如く、かゝる問題の性質として實際はこれより尙多少小になる筈である。Tacoma 橋の破壊當日期に於る風速は 42 哩/時間の様に傳へられて居る。

Tacoma 橋の設計風壓は床部及び車輛に對し 560 封度/呎を考へて居る様であるが、今假に風壓強度として 30 封度/呎²を設計基準にとるものとして、補剛桁が具備すべき性質を調べれば次の如し。又假に風下の主桁の影響をも省略すれば、

$$w=30 \times 8=240 \text{ 封度/呎}$$

$$\text{又 } f/l=1/12$$

∴ (26) により、

$$\frac{EI m \cdot b^3}{l^6} = 15.21 \left[\frac{\text{封度}^2}{\text{呎}^2} \right]$$

之より、

$$EI m = 1.72 \times 10^{15} \text{ [封度}^2 \cdot \text{呎]}$$

表-2 に依れば、之は大體 Whitestone 橋の ($EI m$) に近いのであるが、Tacoma 橋に於ては

$$EI m = 0.22 \times 10^{15} \text{ [封度}^2 \cdot \text{呎]}$$

であつて、如何に Tacoma 橋が脆弱であつたか之に依つて明らかであるばかりでなく、靜力學的には我々に局

表-3.

| V (呎/秒) | q | λ |
|-----------|-------|-----------|
| 60 | 0.160 | 0.607 |
| 61 | 0.171 | 0.649 |
| 62 | 0.182 | 0.694 |
| 63 | 0.194 | 0.741 |
| 64 | 0.207 | 0.791 |
| 65 | 0.220 | 0.842 |
| 66 | 0.234 | 0.897 |
| 67 | 0.249 | 0.953 |
| 68 | 0.264 | 1.013 |
| 69 | 0.280 | 1.075 |
| 70 | 0.296 | 1.140 |

表-4. Se_2 曲線

| q | λ |
|------|-----------|
| 0.10 | 0.987 |
| 0.20 | 0.947 |
| 0.22 | 0.936 |
| 0.23 | 0.931 |
| 0.24 | 0.924 |
| 0.25 | 0.918 |
| 0.26 | 0.912 |
| 0.30 | 0.883 |
| 0.40 | 0.796 |
| 0.50 | 0.690 |
| 0.60 | 0.568 |

知な“振れ挫屈”に対する考慮が補剛桁の設計に際し拂はれて居なかつたらしいと云ふ事が窺はれるのである。

次に Whitestone 橋の限界風速は

$$V \approx 165 \text{ 呎/秒 (50.3 米/秒)}$$

$$\bar{V} \approx 110 \text{ 哩/時間}$$

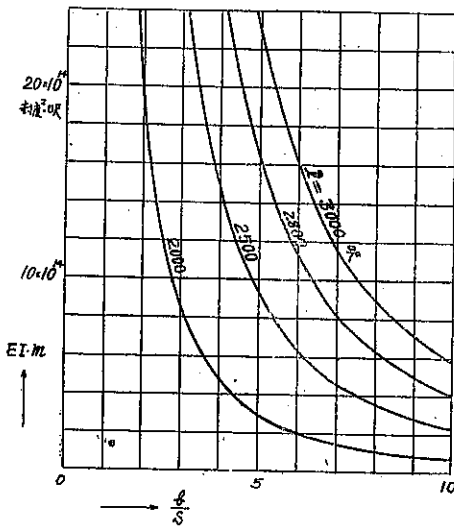
であり、又

$$w = 30 \times 11 = 330 \text{ 封度/呎}$$

として計算を進めれば、(26) より

$$EI \cdot m = 0.353 \times 10^{15} \text{ [封度}^2 \cdot \text{呎]}$$

圖-17.



に對し實際には

$$EI \cdot m = 1.65 \times 10^{15} \text{ [封度}^2 \cdot \text{呎]}$$

である。

更に (25')

$$\frac{(EI \cdot m) \left(\frac{b}{S} \right)^2}{l^5} = \frac{(k\rho)^2 \left(\frac{f}{l} \right) V^4}{32 \pi^2}$$

に對し、風壓強度 30 封度/呎² を撰び且 $f/l = 1/12$ とすれば、

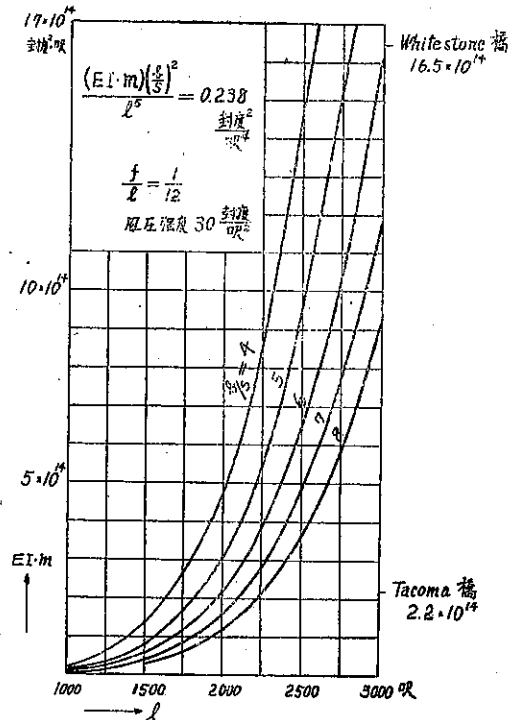
$$\frac{(EI \cdot m) \left(\frac{b}{S} \right)^2}{l^5} = 0.238 \text{ [封度}^2 \cdot \text{呎}^4]$$

を得。本式よりプロットせるものが圖-17 及び圖-18 である。

最後に Tacoma 橋の振り振動數 $n/2\pi$ 或は週期 $2\pi/n$ が風速 V に對し如何に變化するかを調ふるに、(27) の係数は夫々、

$$\frac{(k\rho S l^2)^2}{128 EI} = 0.00226 \text{ [封度} \cdot \text{秒}^4 \cdot \text{呎}^4]$$

圖-18.



$$\frac{a\rho b^3}{2} = -0.4142 \left[\frac{\text{封度} \cdot \text{秒}^3}{\text{呎}^3} \right]$$

$$\frac{2\pi^3 b^3}{l^3} H = 45777 \text{ [封度]}$$

である。又補剛桁の z 軸の廻りの質量慣性モーメント θ の算出に當り、床部をも考慮に入れて之を假に次の如く考へる事とする。

$$\frac{\theta}{l} = 25 \times 10^3 \text{ [封度} \cdot \text{秒}^2]$$

従つて、

$$n^2 = \frac{1}{25 \times 10^3} [45777 + 0.4142 V^2 - 0.00226 V^4]$$

$$= \frac{1}{25 \times 10^3} f(V)$$

本式より振動数 $n/2\pi$ 及び週期 $T=2\pi/n$ を計算すれば次表の如し。之より風速-振動数、風速-週期の曲線を描けば圖-19 を得。本圖より知らるゝ如く風速が或値以下、即ち Tacoma 橋に於ては、

$$V=0 \sim 30 \text{ 呎/秒}$$

迄は、振り振動数は殆ど一定で、大體自由振動数に等しい振動数を有するが、この範圍を越えると振動数は急激に低下し、遂に振動数零、即ち無週期の状態に至る。尙 $k=0.64$ として計算せるものが前掲の圖-14 である。

圖-19.

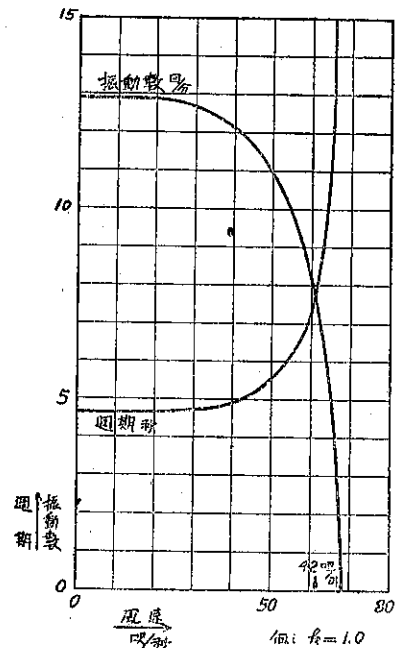


表-5.

| 風速; V (呎/秒) | $f(V)$ | n^2 | $\frac{n}{2\pi}$ (回/秒) | 振動数 (回/分) | 週 期 (秒) |
|---------------|--------|--------|------------------------|-----------|---------|
| 0 | 45777 | 1.8311 | 0.215 | 12.9 | 4.65 |
| 10 | 45795 | 1.8318 | " | " | " |
| 20 | 45581 | 1.8232 | " | " | " |
| 30 | 44319 | 1.7728 | 0.212 | 12.7 | 4.7 |
| 40 | 40654 | 1.6262 | 0.204 | 12.2 | 4.9 |
| 50 | 32688 | 1.3075 | 0.182 | 10.9 | 5.5 |
| 60 | 17978 | 0.7191 | 0.135 | 8.1 | 7.4 |
| 61 | 16026 | 0.6410 | 0.127 | 7.6 | 7.9 |
| 62 | 13974 | 0.5590 | 0.119 | 7.1 | 8.4 |
| 63 | 11819 | 0.4728 | 0.110 | 6.6 | 9.1 |
| 64 | 9557 | 0.3822 | 0.099 | 5.9 | 10.1 |
| 65 | 7185 | 0.2874 | 0.086 | 5.2 | 11.6 |
| 66 | 4698 | 0.1879 | 0.070 | 4.2 | 14.3 |
| 67 | 2094 | 0.0838 | 0.046 | 2.8 | 21.7 |
| 68 | 630 | — | — | — | — |

5. 結 語

以上述べた所に依り吊橋補剛桁の振り振動数は風速の函数であり振動週期が無週期となる或極限が存在する事を知る。筆者の取扱つたのは單徑間の吊橋であり且振動の形としては兩端及び中央に振動しない断面がある場合であるが他の場合には其に相當する Mathieu function を用ふれば同様に取扱へるのである。

しかして振り振動の安定の限界は

$$4\lambda_0 \frac{\pi^2}{l^2} \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right) - \alpha p b^2 - \frac{w^2 l^4}{128 EI} = 0$$

で與へられ、通常の場合近似的には

$$\lambda_0 \approx 1$$

として大體に於て満足すべき近似計算を行ふ事が出来る。限界風速は、

$$\frac{(k\rho S l^2)^2}{128 EI \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} V^4 + \frac{\alpha \rho b^4}{2 \left(KG + \frac{b^2}{2} H \right)} V^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \lambda_0$$

で與へられ、動力學的不安定性は通常の場合今迄主として注目せられてた部分よりも寧ろ“振れ挫屈”が主要な項である様に考へられる事は注目すべき點である。然りとすれば設計上は之を靜力學的に取扱ひ、吊橋構造を考慮に入れた“振れ挫屈”を其對照とすればよいのであつて、事柄は簡單となる。

本文に於ける場合に於ては、振り振動に對する限界風速は大體

$$V^2 \approx \mu \frac{b}{S l^2} \sqrt{\frac{EI \cdot m}{f}}$$

但し、

$$\mu \approx \frac{4\pi \sqrt{2}}{k\rho}$$

により略算せられ、又

$$\frac{EI \cdot m \cdot b^2}{l^5} \approx \frac{w^2}{32\pi^2} \frac{f}{l} \sim \text{一定}$$

なる關係がある。従つて吊橋の補剛桁に於ては與へられた支間に對し $(EI \cdot m \cdot b^2)$ の最小限界が存在するのである。又補剛桁断面の空氣力學的モーメント係數 C_m 及び風壓係數 k に對するより深い注意も勿論必要である。モーメント係數 C_m の影響は比較的輕微であるが、然し振り振動に對し本係數の値が安全側にある様且風壓係數 k が可及的小なる様適當な補剛桁の断面形を撰定する事は工學上重要な事である。

Tacoma 橋の本質的な弱點は、解析的からも

死荷重の輕い事

補剛桁の堅剛性 EI の小なる事

支間 l に比し幅員 b の小なる事

等であると思はれる。Quebec 橋の墜落が部材の挫屈にあつた事は周知の事であるが、筆者は Tacoma 橋の破壊の主な原因の一として“振れ挫屈”を考へるものであつて、若し本橋の設計に際し“振れ挫屈”に對する考慮が拂はれて居たならば、あの様な事故の起る公算は少なかつたらうと考へても誤では無からうと信ぜられる。又かゝる本質的な弱點を有する以上 Prof. Farquharson の考案も補剛桁の振り振動に對してはあまり効果がある様には考へられないのではなからうか。

終りにのぞみ、小論を纏めるに當り種々御指導と御便宜とを賜つた京城帝大教授新郷博士及び安宅^{ヤスミ}勝博士に厚く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 小野正三：應用航空力学
- 2) 妹澤克惟：振 動 學
- 3) 最上武雄：“吊橋の振動に就て”，土木學會誌 20 卷 6 號
- 4) Jahnke-Emde：Funktionentafeln.
- 5) E. T. Whittaker & G. N. Watson：Modern Analysis.
- 6) Bradley Jones：Elements of Practical Aerodynamics.
- 7) S. Timoshenko：Vibration Problems in Engineering.
- 8) “ ”：Theory of Elastic Stability.
- 9) Philosophical Magazine. Vol. 5, 7 ser., 1928, p. 18~38.
- 10) Engineering News Record. Nov., 14, 1940.
- 11) “ ” ” 21, “
- 12) “ ” ” 28, “
- 13) “ ” Dec., 5, “
- 14) “ ” ” 19, “
- 15) “ ” Jan., 30, 1941.
- 16) “ ” April, 10, “
- 17) “ ” May, 8, “
- 18) Civil Engineering. March, 1940, p. 149~152.
- 19) “ May, “
- 20) “ July, “