論説報告

第28卷第8號　昭和17年8月

一圓孔を持ち，縁上に等分布荷重を受ける半無限板の應力

正會員　村　上　　正*

梗　概　本文は，1つの圓孔をもつ半無限板が，その緣上に有限長の等分布荷重を受ける場合につき，2極座標を用ひて，その應力解析を試みたものである。但し，直線緣は，これを水平に置き，荷重は圓孔の中心を通る鉛直線に對して，對稱に加はる場合を取扱つた。

1. 緒　　言

1つの圓孔を持つ半無限板に關する問題は，Jeffery が示した如く(1)，2極座標を用ふることによつて手際よく處理することができるのであつて，孔周に壓力が働らく場合(2)，板が引張力を受ける場合(3)，緣全體に等分布荷重が作用する場合(4) 等種々の場合の外に，板の質量に働らく力 (body force) を考へた場合(5),(6) にも解かれてゐる。

本文は，緣上に有限長の等分布荷重が加はる場合についての解法であつて，問題を次の範圍に限定してゐる。

直線緣を水平に置き，荷重は圓孔の中心を通る鉛直線に對して左右對稱に加はる。

解法の要領は，2極座標を用ひ，直線緣及圓孔周圍の境界條件を滿足する樣に應力函數の形を定め，それによつて分應力の式を導かんとするものである。

2. 2　極　座　標

2極座標 (α, β) は次式によつて定義される。

$$w=\log\frac{z+ia}{z-ia} \qquad \cdots\cdots(1)$$

或は，この逆函數をとれば，

$$z=ia\frac{e^w+1}{e^w-1}=ia\coth\frac{w}{2} \qquad \cdots\cdots(2)$$

玆に，$w=\alpha+i\beta$，$z=x+iy$ で，a は一つの定數である。

(1) 式に於いて，實部及虛部を分離すると，

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}\log_e\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}=\log_e\frac{r_2}{r_1}\\ \beta&=\tan^{-1}\frac{y+a}{x}-\tan^{-1}\frac{y-a}{x}=\theta_2-\theta_1\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(3)$$

---

* 九州帝國大學助教授

(1),(2),(3) Jeffery: Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates.—Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, Series A, vol. 221, 1921

(4) 久野重一郎：圓形無捲立坑道に及ぼす外部荷重の影響——土木學會誌，第15卷，第8號，昭和4年

(5) 安藏善之輔：水平表面に接して一圓形孔を持つ重力體中の應力に就いて——九大工學部彙報，第12卷，第3號，昭和12年

(6) Mindlin: Stress Distribution Around a Tunnel——Proc. of Am. Soc. of C.E., Apr. 1939

又，(2) 式の虚實兩部を分離すれば，

$$x=\frac{a\sin\beta}{\cosh\alpha-\cos\beta}\quad,\quad y=\frac{a\sinh\alpha}{\cosh\alpha-\cos\beta}\quad\cdots\cdots(4)$$

(3) 又は (4) 式によつて，2 極座標の構造が示される (圖-1)。即ち，α-曲線は z 平面に於て，y 軸上に中心をもち，半徑が $a\,\mathrm{csch}\,\alpha$ なる圓である。この圓は α の正負に從つて夫々 x 軸より下又は上の半平面内に存在し，x 軸を切ることがない。而して，特別な場合として，$\alpha=0$ は x 軸を示し，$\alpha=+\infty$ 及 $-\infty$ は夫々定點 $O_1(0,a)$ 及 $O_2(0,-a)$ を示す。

次に，β-曲線は，Z 平面に於て，x 軸上に中心を有し點 O_1, O_2 を通る圓弧であつて，α-曲線を直角に切る。そして，β が正又は負（但し $0\leqq|\beta|\leqq\pi$ とす）なるに從つて，夫々 y 軸より右又は左の圓弧を示す。その中で $\beta=0$ は y 軸の $\overline{O_1O_2}$ を除く部分に對應し，$\beta=\pm\pi$ は y 軸の $\overline{O_1O_2}$ なる部分に對應する。更に $\beta=\pm\pi/2$ は原點を中心として $\overline{O_1O_2}$ を直徑とする圓弧を示してゐる。

圖-1.　2 極 座 標

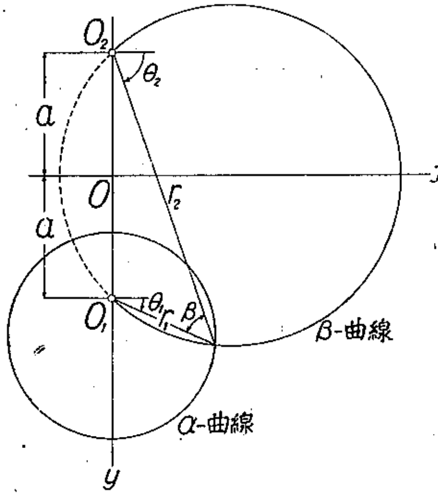
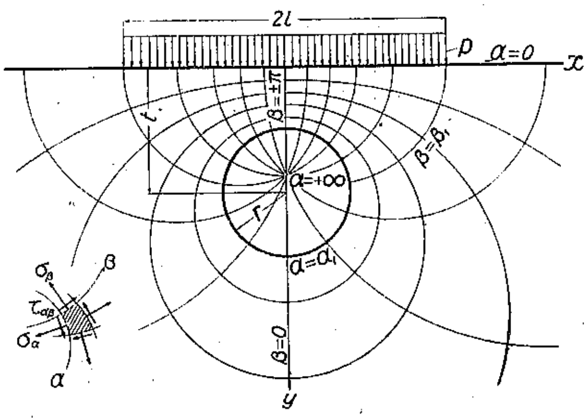


圖-2. 境 界 の 表 示



斯くして，直線縁を x 軸に一致せしめ，孔の中心を通り板の內部へ向つて y 軸を引けば，(1) なる 2 極座標を採用し，$\alpha\geqq0$ と定めることによつて都合よく板の境界を表示できる譯である。即ち，本問題の場合には，直線緣は $\alpha=0$ によつて表はされる。又，$\alpha=\alpha_1$ によつて孔の圓周を表はすことにすれば，その半徑 r は $r=a\,\mathrm{csch}\,\alpha_1$ で與へられ，孔の中心から直線緣までの距離 t（これを孔距と名づける）は，$t=a\coth\alpha_1$ で示される。而して，緣上に加はる荷重の長さを $2l$ とすると，その兩端の座標は，$\alpha=0$，$\beta=\pm2\tan^{-1}(a/l)$ となる。圖-2 は境界の表示法を示してゐる。

3. 應　力　函　數

板の質量に働らく力は存在しないものとし，F を Airy の應力函數とすれば，分應力式は x, y 座標に關して，

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2};\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\quad\cdots\cdots(5)$$

にて與へられる。但し，F は次の微分方程式を滿足せねばならぬ。

$$\nabla^4F=0\quad\cdots\cdots(6)$$

(6) 式を 2 極座標で表はすに當つて Jeffery は F の代りに hF を考へて，常係數の線形微分方程式を導き，以て解法を容易ならしめた。即ち，(6) 式の代りに

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)F_0=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

但し，$F_0=hF$, h は寫像擴大率であつて

$$h=\left|\frac{dw}{dz}\right|=(\cosh\alpha-\cos\beta)/a \quad\cdots\cdots(8)$$

α, β 座標に關する分應力式は，

$$\left.\begin{aligned}
a\sigma_\alpha&=\left\{(\cosh\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cosh\alpha\right\}F_0\\
a\sigma_\beta&=\left\{(\cosh\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right\}F_0\\
a\tau_{\alpha\beta}&=-(\cosh\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2F_0}{\partial\alpha\partial\beta}
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(9)$$

本問題に適合するものとして，(7) の一般解を次の樣にとる。

$$\left.\begin{aligned}
&F_0=B_0\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(\alpha)\cos n\beta\\
\text{玆に}\quad&\psi_n(\alpha)=A_n\cosh(n+1)\alpha+B_n\cosh(n-1)\alpha\\
&\quad+C_n\sinh(n+1)\alpha+D_n\sinh(n-1)\alpha
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(10)$$

(10) 式を (9) 式に入れれば，次の分應力式が得られる。

$$\begin{aligned}
2a\sigma_\alpha=&-2B_0(\cosh\alpha-\cos\beta)\sinh\alpha+2\psi_1(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+1)(n+2)\psi_{n+1}(\alpha)\\
&-2(n-1)(n+1)\cosh\alpha\,\psi_n(\alpha)+(n-1)(n-2)\psi_{n-1}(\alpha)-2\sinh\alpha\,\psi'_n(\alpha)\}\cos n\beta \quad\cdots(11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a\sigma_\beta=&2B_0(\cosh\alpha-\cos\beta)\sinh\alpha+2\psi_1(\alpha)-\psi''_1(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+2)\psi_{n+1}(\alpha)\\
&-(n-2)\psi_{n-1}(\alpha)-2\sinh\alpha\,\psi'_n(\alpha)-\psi''_{n+1}(\alpha)+2\cosh\alpha\,\psi''_n(\alpha)-\psi''_{n-1}(\alpha)\}\cos n\beta \quad\cdot\cdot(12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a\tau_{\alpha\beta}=&-2B_0(\cosh\alpha-\cos\beta)\sin\beta\\
&-\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+1)\psi'_{n+1}(\alpha)-2n\cosh\alpha\,\psi'_n(\alpha)+(n-1)\psi'_{n-1}(\alpha)\}\sin n\beta \quad\cdots\cdots(13)
\end{aligned}$$

但し，これらの式中の定數は尙未定である。

4. 荷重の級數表示

荷重の右端の β 座標を β_1 とすれば，

$$\beta_1=2\tan^{-1}\frac{a}{l} \quad\cdots\cdots(14)$$

荷重を β の函數として Fourier 級數で表はすため，これを $P(\beta)$ と書けば，

$$0\leqq\beta<\beta_1\ (\infty\geqq x>l)\quad \text{に於て}\quad P(\beta)=0$$

$$\beta_1<\beta\leqq\pi\ (l>x\geqq0)\quad \text{〃}\quad P(\beta)=p$$

而して，荷重は y 軸に關して對稱であるから，次の式が得られる。

$$P(\beta)=\frac{p}{\pi}\left\{\pi-\beta_1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\beta_1\cos n\beta\right\},\qquad 0\leqq|\beta|\leqq\pi \quad\cdots\cdots(15)$$

境界に於ける應力の値は，

$$\left.\begin{array}{llll}\text{直線緣}\ (\alpha=0) & \text{に於て,} & \sigma_\alpha=-P(\beta), & \tau_{\alpha\beta}=0\\ \text{圓孔周圍}\ (\alpha=\alpha_1) & \text{〃} & \sigma_\alpha=0, & \tau_{\alpha\beta}=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

(11) 及 (13) 式の σ_α 及 $\tau_{\alpha\beta}$ が夫々 (16) の境界條件を滿足するやうに，定數 A, B, C 及 D を決定すれば，求むる解式が得られる譯である。

5. 定數の決定

定數 A, B, C 及 D を決定するには，(16) 式の 4 つの條件を用ふる。

1) 先づ直線緣に於ける $\tau_{\alpha\beta}$ の條件 $[\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=0}=0$ より次の式が出る。

$$\left.\begin{array}{lll} n=1 & \text{に對して,} & 2\psi'_2(0)-2\psi'_1(0)+2B_0=0\\ n=2 & \text{〃} & 3\psi'_3(0)-2\cdot2\psi'_2(0)\pm\psi'_1(0)-B_0=0\\ n=3 & \text{〃} & 4\psi'_4(0)-2\cdot3\psi'_3(0)+2\psi'_2(0)=0\\ n=4 & \text{〃} & 5\psi'_5(0)-2\cdot4\psi'_4(0)+3\psi'_3(0)=0\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(17)$$

解法を容易ならしめるために，(17) 式に於いて，次の樣な假定を設ける。

$$\psi'_1(0)=B_0 \quad\cdots\cdots(18)$$

この假定の結果として，(17) の各式より，

$$\psi'_2(0)=\psi'_3(0)=\psi'_4(0)=\cdots\cdots=\psi'_n(0)=\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

2) 次に直線緣に於ける σ_α の條件 $[\sigma_\alpha]_{\alpha=0}=-P(\beta)$ より次の諸式が得られる。

$$n=0\ \text{に對して}\qquad 2\psi_1(0)=-\frac{2ap}{\pi}(\pi-\beta_1)=-2q_0 \quad\cdots\cdots(20)$$

$$\left.\begin{array}{lll} n=1 & \text{〃} & 2\cdot3\psi_2(0)=\dfrac{4ap}{\pi}\sin\beta_1=q_1\\ n=2 & \text{〃} & 3\cdot4\psi_3(0)-2(1.3)\phi_2(0)=\dfrac{4ap}{\pi}\dfrac{\sin2\beta_1}{2}=\dfrac{q_2}{2}\\ n=3 & \text{〃} & 4\cdot5\psi_4(0)-2\,2\cdot4)\phi_3(0)-2\cdot1\psi_2(0)=\dfrac{4ap}{\pi}\dfrac{\sin3\beta_1}{3}=\dfrac{q_3}{3}\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{一般に} & & (n+1)(n+2)\psi_{n+1}(0)-2(n-1)(n+1)\psi_n(0)+(n-1)(n-2)\psi_{n-1}(0)\\ & & =\dfrac{4ap}{\pi}\dfrac{\sin n\beta_1}{n}=\dfrac{q_n}{n} \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

(21) の各式の分母を拂つた後，邊々相加ふれば，

$$n(n+1)(n+2)\psi_{n+1}(0)-(n-1)n(n+1)\psi_n(0)=\sum_{r=1}^{n}q_r$$

この式に於て，

$n=1$ と置けば $\qquad 1\cdot2\cdot3\psi_2(0)=q_1$

$n=2$　〃　　$2\cdot3\cdot4\psi_3(0)-1\cdot2\cdot3\psi_2(0)=q_1+q_2$

$n=3$　〃　　$3\cdot4\cdot5\psi_4(0)-2\cdot3\cdot4\psi_3(0)=q_1+q_2+q_3$

…………　　…………………

一般に　　$n(n+1)(n+2)\psi_{n+1}(0)-(n-1)n(n+1)\psi_n(0)=q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n$

これらの式を逐々相加へて結局次の式が導かれる。

$$n(n+1)(n+2)\psi_{n+1}(0)=\sum_{r=1}^{n}(n-r+1)q_r, \qquad n\geqq1$$

この式は次の様に書き換へてよい。

$$n(n^2-1)\psi_n(0)=\sum_{\gamma=1}^{n-1}(n-r)\,q_r, \qquad n\geqq2 \cdots\cdots(22)$$

3) 更に又，圓孔周圍の $\tau_{\alpha\beta}$ の條件 $[\tau_{\alpha\beta}]_{\alpha=\alpha_1}=0$ より次の式を得る。

$$\left.\begin{array}{lll}
n=1 \text{ に對して} & & 2\psi'_2(\alpha_1)-2\cosh\alpha_1\{\psi'_1(\alpha_1)-B_0\}=0 \\
n=2 & 〃 & 3\psi'_3(\alpha_1)-2\cdot2\cosh\alpha_1\psi'_2(\alpha_1)+\psi'_1(\alpha_1)-B_0=0 \\
n=3 & 〃 & 4\psi'_4(\alpha_1)-2\cdot3\cosh\alpha_1\psi'_3(\alpha_1)+2\psi'_2(\alpha_1)=0 \\
n=4 & 〃 & 5\psi'_5(\alpha_1)-2\cdot4\cosh\alpha_1\psi'_4(\alpha_1)+3\phi_3'(\alpha_1)=0 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}\cdots\cdots(23)$$

こゝに於て，解法の便宜上

$$\psi'_1(\alpha_1)=B_0\cdots\cdots(24)$$

と假定すれば，(23) の第 1，第 2，‥‥ 式より，次の結果が得られる。

$$\psi'_2(\alpha_1)=\psi'_3(\alpha_1)=\psi'_4(\alpha_1)=\cdots\cdots=\psi'_n(\alpha_1)=\cdots\cdots=0\cdots\cdots(25)$$

4) 最後に圓孔周圍の σ_α の條件 $[\sigma_\alpha]_{\alpha=\alpha_1}=0$ より

$n=0$ に對して　　$2\psi_1(\alpha_1)=B_0\sinh2\alpha_1\cdots\cdots(26)$

$$\left.\begin{array}{lll}
n=1 & 〃 & 2\cdot3\psi_2(\alpha_1)=2\sinh\alpha_1\{\psi'_1(\alpha_1)-B_0\}=0 \\
n=2 & 〃 & 3\cdot4\psi_3(\alpha_1)-2(1\cdot3)\cosh\alpha_1\psi_2(\alpha_1)=0 \\
n=3 & 〃 & 4\cdot5\psi_4(\alpha_1)-2(2.4)\cosh\alpha_1\psi_3(\alpha_1)+1.2\phi_2(\alpha_1)=0 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{一般に} & & (n+1)(n+2)\psi_{n+1}(\alpha_1)-2(n-1)(n+1)\cosh\alpha_1\psi_n(\alpha_1) \\
& & \quad +(n-2)(n-1)\phi_{n-1}(\alpha_1)=0
\end{array}\right\}\cdots\cdots(27)$$

(27) の第 1 式より $\psi_2(\alpha_1)=0$，第 2 式へこれを代入して $\psi_3(\alpha_1)=0$ を得る。この 2 つを第 3 式へ入れれば $\psi_4(\alpha_1)=0$ が出る。順次斯の如くして結局

$$\psi_2(\alpha_1)=\psi_3(\alpha_1)=\psi_4(\alpha_1)=\cdots\cdots=\psi_n(\alpha_1)=\cdots\cdots=0\cdots\cdots(28)$$

5) 以上に求めた式 (18), (19), (20), (22), (24), (25), (26) 及 (28) より定數 A, B, C 及 D を計算する。これらの式をこゝに纏めて記せば，

$$\text{(i)}\quad\left\{\begin{array}{ll}
B_0=2C_1 \cdots\cdots & (18) \\
A_1+B_1=-\dfrac{ap}{\pi}(\pi-\beta_1)=-q_0\cdots\cdots & (20) \\
2A_1\sinh2\alpha_1+2C_1\cosh2\alpha_1=B_0 \cdots\cdots & (24) \\
A_1\cosh2\alpha_1+B_1+C_1\sinh2\alpha_1=\dfrac{B_0}{2}\sinh2\alpha_1\cdots\cdots & (26)
\end{array}\right.$$

$n\geqq 2$ の場合には，

$$
\text{(ii)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&(n+1)C_n+(n-1)D_n=0 \qquad\cdots\cdots(19)\\
&A_n+B_n=\frac{1}{n(n^2-1)}\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)q_r,\quad \text{但し}\quad q_r=\frac{4ap}{\pi}\sin r\beta_1 \qquad\cdots\cdots(22)\\
&(n+1)A_n\sinh(n+1)\alpha_1+(n-1)B_n\sinh(n-1)\alpha_1\\
&\qquad+(n+1)C_n\cosh(n+1)\alpha_1+(n-1)D_n\cosh(n-1)\alpha_1=0 \qquad\cdots\cdots(25)\\
&A_n\cosh(n+1)\alpha_1+B_n\cosh(n-1)\alpha_1+C_n\sinh(n+1)\alpha_1\\
&\qquad+D_n\sinh(n-1)\alpha_1=0 \qquad\cdots\cdots(28)
\end{aligned}
\right.
$$

(i) の 4 つの式から

$$
\left.
\begin{aligned}
&B_0=2C_1\\
&C_1=-\frac{\cosh\alpha_1}{2\sinh^3\alpha_1}q_0\\
&A_1=\frac{q_0}{2\sinh^2\alpha_1}\\
&B_1=-\frac{\cosh 2\alpha_1}{2\sinh^2\alpha_1}q_0
\end{aligned}
\right\}\qquad\cdots\cdots(29)
$$

$n\geqq 2$ の場合には (ii) の 4 つの式をといて，

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_n=-\frac{\sinh^2 n\alpha_1+n\sinh^2\alpha_1}{2n(n+1)(\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1)}s_n\\
&B_n=\frac{s_n}{n(n^2-1)}-A_n\\
&C_n=\frac{\sinh n\alpha_1\cosh n\alpha_1+n\sinh\alpha_1\cosh\alpha_1}{2n(n+1)(\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1)}s_n\\
&D_n=-\frac{n+1}{n-1}C_n\\
&\text{茲に}\quad s_n=\frac{4ap}{\pi}\sum_{\gamma=1}^{n-1}(n-r)\sin r\beta_1
\end{aligned}
\right\}\qquad\cdots\cdots(30)
$$

斯くして決定された定數を (10) 式へ入れれば，應力函數 F_0 が確定する。卽ち，

$$
\begin{aligned}
F_0=&-\frac{ap}{\pi}(\pi-\beta_1)[\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta)\cosh\alpha_1+\{\cosh(\alpha_1-\alpha)\sinh\alpha+\sinh^3\alpha_1\}\cos\beta]\operatorname{csch}^2\alpha_1\\
&-\frac{4ap}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{K_n}{n(n^2-1)G_n}\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\sin r\beta_1\cos n\beta \qquad\cdots\cdots(31)
\end{aligned}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
G_n=&\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1\\
K_n=&n\sinh\alpha_1\{n\sinh(\alpha_1-\alpha)\cosh n\alpha+\cosh(\alpha_1-\alpha)\sinh n\alpha\}\\
&-\sinh n\alpha_1\{n\cosh n(\alpha_1-\alpha)\sinh\alpha+\sinh n(\alpha_1-\alpha)\cosh\alpha\}
\end{aligned}
$$

6. 計 算 例

孔距が圓孔半徑の 2 倍 ($t=2r$) 及 4 倍 ($t=4r$) の場合について，孔周及直線緣に現はれる應力 (σ_β) を計算した結果を夫々，圖-3 及圖-4 に示す。比較に便なるやうに，孔徑，荷重の長さ，並にその强度は相等しく定めた。

實際には，(30) 式のまゝでは，α_1 が大きくない限り級數の收斂が緩慢で不便であるから，これを次のやうに變

形する。

$$A_n=-\frac{s_n}{2n(n+1)G_n}\{G_n+n(n+1)\sinh^2\alpha_1\}$$

$$=-\frac{s_n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{\sinh^2\alpha_1}{G_n}\right\}\cdots\cdots(32)$$

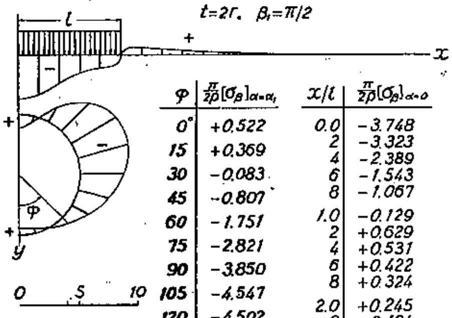
$$C_n=\frac{s_n}{2n(n+1)G_n}(G_n+\sinh n\alpha_1\cosh n\alpha_1+n\sinh\alpha_1\cosh\alpha_1-G_n)$$

$$=\frac{s_n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1-e^{-2n\alpha_1}}{2n(n+1)G_n}+\frac{(n\sinh\alpha_1+\cosh\alpha_1)\sin\alpha_1}{(n+1)G_n}\right\}\cdots\cdots(33)$$

この樣にして計算するとき，有效數字 4 桁を保存するものとして，$t=2r$ の場合は第 7 項まで，$t=4r$ の場合は第 5 項まで取つて充分滿足な結果が得られる。この點より推して，さきに用ひた (18) 及 (24) 式の假定は，無理のないものであると云へる。

圖-3, 4 より判斷して言ひ得ることは，

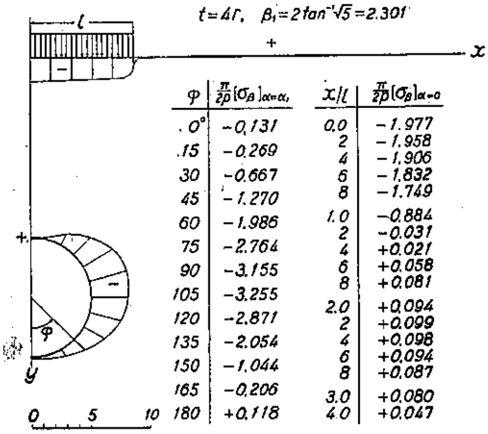
圖-3.　$t=2r$ の場合の應力圖



φ	$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=\alpha_1}$
0°	+0.522
15	+0.369
30	−0.083
45	−0.807
60	−1.751
75	−2.821
90	−3.850
105	−4.547
120	−4.502
135	−3.410
150	−1.513
165	+0.334
180	+1.111

x/l	$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0}$
0.0	−3.748
2	−3.323
4	−2.389
6	−1.543
8	−1.067
1.0	−0.129
2	+0.629
4	+0.531
6	+0.422
8	+0.324
2.0	+0.245
2	+0.184
4	+0.137
6	+0.102
8	+0.076
3.0	+0.056
4.0	+0.010

圖-4.　$t=4r$ の場合の應力圖



φ	$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=\alpha_1}$
0°	−0.131
15	−0.269
30	−0.667
45	−1.270
60	−1.986
75	−2.764
90	−3.155
105	−3.255
120	−2.871
135	−2.054
150	−1.044
165	−0.206
180	+0.118

x/l	$\frac{\pi}{2p}[\sigma_\beta]_{\alpha=0}$
0.0	−1.977
2	−1.958
4	−1.906
6	−1.832
8	−1.749
1.0	−0.884
2	−0.031
4	+0.021
6	+0.058
8	+0.081
2.0	+0.094
2	+0.099
4	+0.098
6	+0.094
8	+0.087
3.0	+0.080
4.0	+0.047

第 1：一般に孔距が小なる間は，孔周の大部分は壓縮應力を受けてゐるが，上緣 ($\varphi=180°$) 及下緣 ($\varphi=0°$) の附近に引張應力が作用してゐる。孔距が大となるに從つて，この引張應力は小さくなる傾向をもち，t が $4r$ よりも更に大きくなれば遂に消滅するものと思はれる。殊に，下緣に現はれる引張應力は，$t=4r$ の場合には既に消滅してゐることが認められる。尙，最大壓縮應力は大體 $\varphi=105°$ の附近に出てゐる。

第 2：直線緣では，荷重の下に壓縮應力が働らき，荷重を僅か離れた所で引張應力に變ずる。その大さは，壓縮應力に比べれば遙かに小さく，荷重を遠ざかるに從つて漸次 0 に近づく。

7.　一，二の特別な場合

(31) 式に於て，$\beta_1=0$ と置けば，緣全體に等分布荷重をうける場合となる。

$$F_0=-ap[\alpha(\cosh\alpha-\cos\beta)\cosh\alpha_1+\{\cosh(\alpha_1-\alpha)\sinh\alpha+\sinh^2\alpha_1\}\cos\beta]\operatorname{csch}^2\alpha_1\cdots\cdots(34)$$

これは，既に，久野先生が示された式と一致してゐる。又，$\alpha_1=\infty$ とおけば，孔のない場合の應力函數が導か

れる。式は餘程簡單になつて

$$F_0=-\frac{ap}{\pi}(\pi-\beta_1)\cos\beta+\frac{4ap}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-n\alpha}}{n(n^2-1)}(n\sinh\alpha+\cosh\alpha)\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\sin r\beta_1\cos n\beta \quad \cdots(35)$$

本式に於て，更に，$\beta_1=0$ とおけば，孔のない半無限板の緣全體に等分布荷重が働らく場合に對する應力函數となる。

即ち，$F_0=-ap\cos\beta$ ……(36)

附　記―1. 本文の結果を利用して，水平な地表面に近く穿たれた圓形無捲立トンネルの直上に加重 (surcharge) が存在する樣な場合を處理することができる。但し，その際には，板を重力體と見做して，質量力 (body force) の影響を見込まなければならないが，それについては，既に，安藏先生，並に，Mindlin によつて解法が示されてゐる。

附　記―2. 本文を結ぶに當つて，有益なる御助言を忝うしたる，安藏，久野兩先生に，謹んで御禮を申上げます。