

は、模型の場合に比し著しく大であるから、分岐部へ流入する土砂の量は、模型で砂を流した場合よりも割合が小となる事が推定される。

直線水路 g の幅と分岐水路 s の幅とが異なる場合の影響に就て、Bulle 氏が単純な分岐水路に就て試験した結果によれば、 g の幅が s の n 倍の時には $n=1$ の時の比の略々 $1/n$ になる結果が得られてゐるから、之から推して直線水路の幅が分岐水路幅の 3 倍ならば、流量 4.5 l/sec の時砂の $s/g+s=22.9\%$ は 7.6% 、石炭粒の時の 3.5 l/sec での 9.1% は 3.0% となる。

三角測量に用ひられる三角形の形に就いて

正會員 堀 武 男*

要 旨 三角測量に用ひられる三角形の内角を $30^\circ \sim 120^\circ$ とした時、かかる三角形の存在する確率を求めたものである。三角測量では測角の誤差から生ずる邊長の誤差を小さくすをために、三角形の内角に如上の限度を設けるが、實際に三角網を組む場合に、餘程注意しても地形等の制限をうけて、この限度を超えて了ふことが少くない。即ちかかる三角形の存在する確率の小なることを示してゐる。今その確率を計算してみると僅かに $1/4$ である。

先づ次の確率の問題を考へる。

「圓内にとつた任意の 3 點が同一半圓内にある 確率如何」、この解法は次の如くすると簡單である。圖-1 の如く半径 a の圓内にとつた任意の 3 點を A, B 及び C とし、之等 3 點と中心 O とを結び、 $\angle AOB = x, \angle AOC = y$ とする。3 點は任意にとり得るのであるから、 x 及び y は $0 \sim 2\pi$ の値を自由にとり得る (x 及び y の値が負又は 2π より大なる場合は考へる必要がない)。故に之等 3 點の任意の 1 つのとり方は、圖-2 の正方形内の或る 1 點が對應する。この正方形の内 3 點が同一半圓内にある場合は次の 4 通りである。

圖-1.

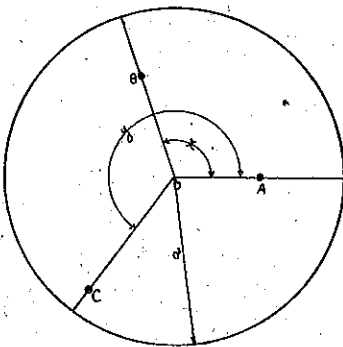
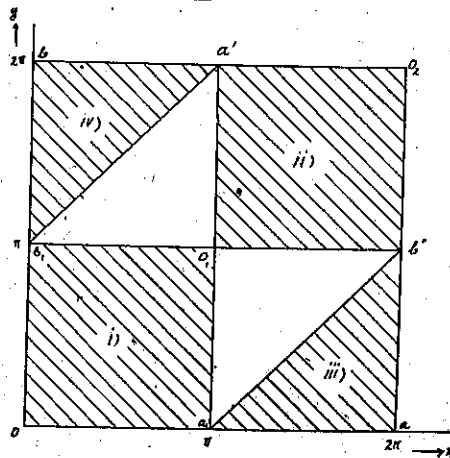


圖-2.



* 工學士 東京帝國大學助教授

- i) $x < \pi, y < \pi$ (圖-1 に於て 3 點は A を通る直徑の上側にあり)
- ii) $x > \pi, y > \pi$ (圖-1 に於て 3 點は A を通る直徑の下側にあり)
- iii) $x - y > \pi$ (圖-1 に於て 3 點は B を通る直徑の A を含む側にありて $x > y$)
- iv) $y - x > \pi$ (圖-1 に於て 3 點は B を通る直徑の A を含む側にありて $y > x$)

i) は正方形 $oa_1o_1b_1$ に ii) は正方形 $o_1b'_1o_2a'_1$ に對應する。iii) は、 $x - y = \pi$ なる直線は $a_1b'_1$ であるから、三角形 $a_1ab'_1$ に對應し、iv) は、 $y - x = \pi$ なる直線は $b_1a'_1$ であるから、三角形 $b_1a'_1b$ に對應する。故に求むる確率は、

$$p = \frac{\text{正方形 } oa_1o_1b_1 + \text{正方形 } o_1b'_1o_2a'_1 + \text{三角形 } a_1ab'_1 + b_1a'_1b}{\text{正方形 } oao_2b} = \frac{3}{4}$$

である。

この問題に於いて、解法を見ても判断出来る通り半徑の大きさには無關係な解が得られる。唯原點を通るすべての方向に點が一樣に存在しなくてはよい。故に點の存在する位置を圓周だけに限ると

「圓周上にとつた任意の 3 點が同一半圓周上にある確率如何」

といふ問題と全く同じである。而してこの時も勿論解は圓の半徑には無關係である。

今この第 2 の問題に於ける 3 點を結んで三角形を作ると、もし 3 點が同一半圓周上にあれば、この三角形は鈍角三角形である。而もその形だけが問題になり大きさには全く無關係である。依つてこの問題は次の問題と同じことになる。

「任意の三角形が鈍角三角形である確率如何」

この様書き直した時はその解法は次の如くした方が理解しやすい。

三角形の 3 内角を夫々 x, y 及 z とすれば、これ等は次の數學的條件を満足することが、必要にして且十分である。

$$x + y + z = 180^\circ \dots\dots\dots (1)$$

$$x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0 \dots\dots\dots (2)$$

今圖-3 の如く直交坐標軸 ox, oy 及 oz をとると、(1) 及 (2) 式によつてすべての三角形の形は三角形 ABC の内部の點に對應する¹⁾。この中で鈍角三角形になるものは

$$\left. \begin{matrix} x > 90^\circ \\ y > 90^\circ \\ z > 90^\circ \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

(3) 式の表はす部分は三角形 AB_1C_1 、三角形 A_1BC_1 及三角形 A_1B_1C で表はされる。而して圖-3 により明かな如く A_1, B_1 及 C_1 は夫々 $\overline{BC}, \overline{CA}$ 及 \overline{AB} の中點であるから、

$$(\text{三角形 } AB_1C) = (\text{三角形 } A_1BC_1) = (\text{三角形 } A_1B_1C) = \frac{1}{4} (\text{三角形 } ABC)$$

故に任意の三角形が鈍角三角形である確率は $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ となり、前に求めた任意の 3 點が同一半圓内にある確率と同じであることは勿論である。

三角測量の計算では邊長を正弦則によつて計算するから、邊 a の對角を A とすれば

1) 3 元素の和が一定である時、3 元素の成分はこの三角形で表はすと便利である。上の分類に用ひる三角坐標もこの一例である。

圖-3.

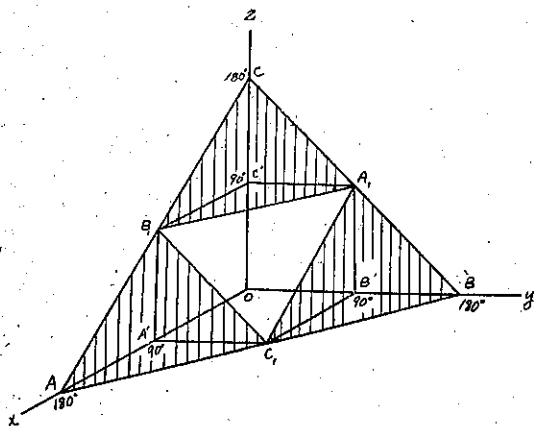
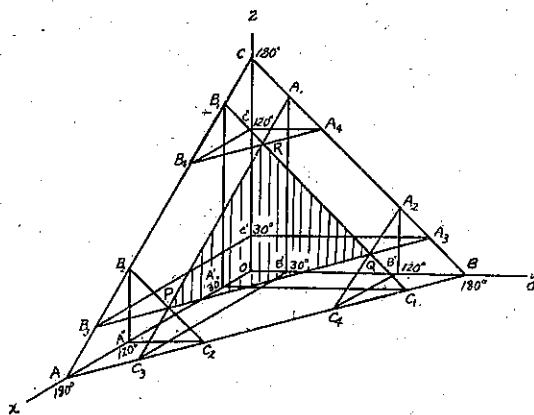


圖-4.



$$a = K \sin A \dots\dots\dots (4)$$

故に測角の誤差 δA から生ずる邊長の誤差 δa は

$$\delta a = K \cos A \cdot \delta A \dots\dots\dots (5)$$

である。 δA は測量器械の精度及測量者の能力によつて或る限度があるから、 δA を小さくするには、 $\cos A$ を小さくすることが非常に有効である。故に三角測量では通常内角の大きさに制限を加へて、 $30^\circ \sim 120^\circ$ としてゐる。

然るに實際に三角網を組む時、注意しないと往々にして三角形の内角の大きさがこの範囲を超えることがある。之はかゝる三角形の数が多くないことを示してゐる。今任意の三角形がこの條件を満足する確率を求めてみよう。

前と同様にすべて三角形の形は三角形 ABC で表はされる (圖-4)。この内 $30^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ のものは梯形 $B_1O_1C_1B_2$ で、 $30^\circ \leq \beta \leq 120^\circ$ のものは梯形 $A_1C_1C_2A_2$ で、 $30^\circ \leq \gamma \leq 120^\circ$ のものは梯形 $A_2B_2B_3A_3$ で表はされる。故に三角形が三角測量に用ひ得る形、即ち内角の大きさが $30^\circ \sim 120^\circ$ であるものは圖-4 より、三角形 PQR である。

故に任意の三角形が、かゝる三角測量に用ひ得る形である確率は

$$p = \frac{(\text{三角形 PQR})}{(\text{三角形 ABC})} = \frac{PQ^2 - C_1C_2^2}{AB^2} = \frac{A'A''^2}{OA^2} = \frac{(120-30)^2}{180^2} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots (6)$$

即ちかゝる三角形の存在する確率は僅か 1/4 である。之が三角測量の選點に苦勞する所以である。

三角測量の精度を高めるために三角形の内角の大きさの限度を更に厳にすると圖-4 の三角形 PQR は益々小さくなり、即ちかゝる三角形の存在する確率は益々小さくなる。従つて選點は一層困難になる。例へば三角形の内角の大きさの限度を $40^\circ \sim 100^\circ$ とすれば、かゝる三角形の存在する確率は

$$p = \frac{(100-40)^2}{180^2} = \frac{1}{9}$$

となる。