

# 論 說 報 告

第 27 卷 第 11 號 昭和 16 年 11 月

## 不定座標線の定置法による不静定構造の解法

正會員 重 松 愿\*

**要 旨** 本文は不静定構造に関する弾性方程式を、構造面上の任意の不定位置に假定せる座標線に關して表はし、座標線の適切なる位置への條件的定置によつて、弾性方程式中の未知量を抽出或は消去する方法に就て述べ、これを剛節及滑節の構造に對して例解せるものである。

### 目 次

- |                  |            |
|------------------|------------|
| 1. 座標線に關する概意     | 5. 構造の解法   |
| 2. 構材の形狀及作用力     | 6. 例題      |
| 3. 弾性方程式の誘導      | 7. 形狀及荷重係數 |
| 4. 座標線の定置と未知力の抽出 |            |

### 1. 座標線に關する概意

#### 1. 静力條件に關する原點

構造解法に應用せらるゝ静力平衡條件即ち力のモーメント及び 2 つの軸方の各分力に關する條件

$$\Sigma M=0, \Sigma X=0, \Sigma Y=0$$

に就て次の様な考へ方をする。

構造の任意部分の力系の平衡に對して静力條件を適用することは、構造面上の任意の適切なる原點に關して  $\Sigma M=0$  を成立せしむることであつて、その原點を 3 つの適切なる位置に採ることにより、3 つの未知力が算定されるが、このとき夫々の  $\Sigma M=0$  の形式に就て何れか 2 つの未知力に關するモーメントを、各自に零ならしむる如き原點を選定し得れば計算が簡單になるは勿論である。然るに原點を計算上無限大距離に假定すれば、その無限大方向の直角方向に關する分力の平衡條件  $\Sigma X=0$  或は  $\Sigma Y=0$  の形式が得られる。また以上の場合に力系平衡の領域を縮小して零とすれば、格點に關する平衡條件が得らるゝことは明である。

故に静平衡條件の適用は任意の原點に關するモーメントの條件を成立せしむることであるが、解決の要求に應じ、原點を有限及び無限の適切なる距離に假定すればよいのであると言ふことが出来る。

#### 2. 弾性平衡の關する原線

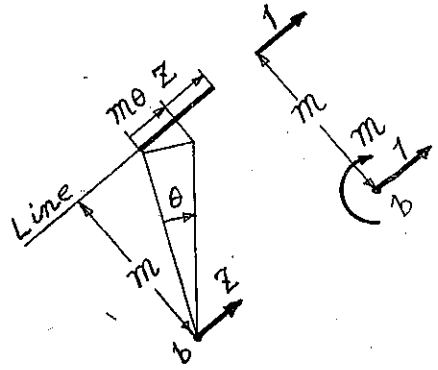
上述の如き静力條件に關する原點の位置選定の考へ方は、これを構材群の弾性條件に對して原線を以て同様に考へられる。即ち仕事の原理から誘導せらるゝ構材群の弾性方程式を構造面上の任意位置の直線を、座標線とする形式に於て表はし得るのであつて、これに就ては弾性方程式 (5) の誘導法に於て示され得るが、先づその座標線の存在に就ては、次の様にその概要を述べる事が出来る。

或る構材部分の應力變形によつて關係格點  $b$  に、圖-1 に示す如く、變角  $\theta$  及び  $b$  より縦距が  $m$  なる任意の原線の方向に分變位  $\delta$  が惹起されたとすればこの應力變形によらざる構造面を 1 點で格點  $b$  に剛節する剛平

\* 工學士 京都帝國大學助教授

面と見做すことにより),  $b$  の變形による構造面の原線上に沿ふ變位は  $(m\theta+z)$  であるから, 原線に沿つて構造面に一定の單位力を假想すれば,  $b$  の變形によつてなされる假想單位力の仕事は  $(m\theta+z)$  で表はされる。またこの單位力を  $b$  點に作用するモーメント  $m$  と  $z$  方向の直力  $1$  とに置換すれば, それが  $b$  の變形に對して與へる仕事も  $(m\theta+z)$  で表はされる。即ち單位力がその位置でなす仕事を, 任意の  $b$  に置換せる各力の仕事として表はし得るのである。然るに構材に與へらるゝ外働は對應する内働に等しい既知の法則から, こゝに原線上の假想單位力によつて構材部分に關する彈性等式を成立せしむることが出来る。

圖-1. 格點變形による原線上の變位圖及び原線上の單位力の格點への置換圖



斯く部分的に考へたことを實際に於て構造の必要なる構材群に對して適用すれば, その彈性等式が關係格點の配置を表示せんために原線に關する格點の座標を係數とする形式で與へらるゝことになり, これは彈性方程式 (5) によつて示さるゝところである。

斯くの如く表はされた彈性方程式に就て原線の有限から無限への或る位置に於て, 特定の未知力に關する仕事の正負の境界即ち零境界の存すべきことは, モーメントに零の存することと同様であつて, このとき單一構材或は構材群に於ける3つの未知力 (即ち曲げモーメント  $M$ , 軸力  $N$ , 剪斷力  $Q$  或はこれらの何れかに相當する他の力) の中その1つを單獨に抽出し得ることは, 他の2つを各自同時に消去せしむるための座標の條件的數値から定められるが (4. 座標線の定置と未知力の抽出参照), かゝる未知力の直接解法を實施するときには於ける彈性方程式中の格點變形の消去には 靜力平衡條件が適用されることになる (5. 構造の解法参照)。このことは變形解法例へば撓角撓度法に於て格點變形の總數に等しきだけの靜力條件の數が, その變形基本式の未知力を消去せしむると同じ原理に基き, こゝでは逆に變形を消去せしむることに適用されるのである。

座標線に關して表はす彈性方程式の方法に従へば, 彈性撓角條件式は座標線の無限大距離に關するものであり, 彈性變位の條件式例へば Castigliano の變位法則或は撓角撓度法に關する各彈性式は, 何れも特定の1つの座標線に關して表はさるゝものとなることが出来る。

## 2. 構材の形狀及作用力

### 1. 構材の形狀及記號

本解法では構造中の任意の數及び經路の連續剛節構材 (以下單に連構材といふ) を取扱ふのであるが, それに對する彈性式の適用に於て滑節構材に關する形式は, 剛節に關するものゝ特形として, それより直接導かれ得るから, 總て一般形式は剛節構材を對象として表はす。

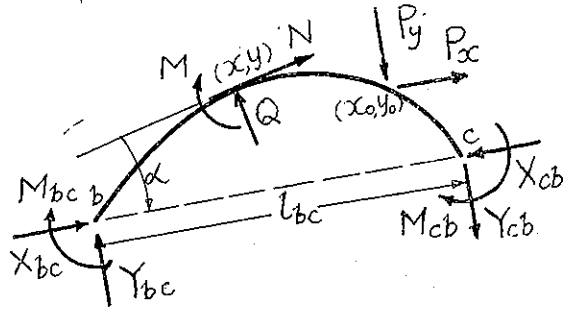
圖-2 は構造中の任意の曲線材  $bc$  に於ける各力の配置を示すものであつて,  $bc$  の曲線形を表はすに便宜上  $b$  を原點とし, 徑線方向  $bc$  を横軸とする直交座標  $(y, x)$  によるものとし, 其の斷面形狀の記號として, 徑線長, 斷面積, 斷面二次モーメント, ヤング係數, 剪斷彈性係數, 同斷面歪係數, 載荷點の横距, 同縦距, 横荷重 ( $x$  方向の荷重), 縦荷重, 材軸接線の  $x$  軸に對する偏角及び材軸の微分長に對し夫々,

$$l, A, I, E, G, k_1, x_0, y_0, P_x, P_y, \alpha, d_s$$

を使用し, その所屬を明示する必要ある場合には接尾字  $bc$  を各記號に附記するものとする。

構材の作用力として前記の  $M, N, Q$  を考へるは言ふまでもないが、解法に關して取扱ふ構材端面の作用力としては、曲線材に對する徑線方向及びその直角方向に直力  $X_{bc}$  及び  $Y_{bc}$  が直材に關する  $N_{bc}$  及び  $Q_{bc}$  と同一状態及び符號規約に於て作用するものとし、特に彈性條件式中には便宜上  $Y_{bc}$  (或は  $Q_{bc}$ ) に代ふるに  $M_{cb}$  をとり、從つて一般に  $M_{bc}, M_{cb}, Z_{bc}$  を彈性解法上の未知力とする。

圖-2. 構材 bc の材端各力、荷重及び内力の表示



材端各力の性質に關する符號規約に就ては、多くの慣用(例へば撓角撓度法)と同じく次の規約をする。

$M_{bc}$ : 端面に對する外側の曲げモーメントが右廻りなるを正(+)

$X_{bc}$ : 直線 bc を壓縮する方向なるを正

$Y_{bc}$ : 接觸する剪斷力が右廻り様(N)なるを正

他端に於ける  $M_{cb}, X_{cb}, Y_{cb}$  に就ても同様であり、圖-2 には總て各力の正の場合が示されてある。

2. 構材の作用力の表示

構材 bc 上の任意點  $x$  に於ける各力  $M, N, Q$  の値は材端力と荷重により表はさるゝが、便宜上 b を左に c を右に視るとき荷重  $P$  の作用點  $x_0$  が  $x$  の左側或は右側にあるに應じ、假りに  $P$  を  $P'$  或は  $P''$  と記號することによりそれを表はせば、圖-2 を参照して、

$$M = M_{bc} + xY_{bc} - yX_{bc} + (x_0 - x)P_y' + (y_0 - y)P_x' \dots\dots\dots (i)$$

$$N = 0 + \sin\alpha Y_{bc} + \cos\alpha X_{bc} - \sin\alpha P_y' + \cos\alpha P_x' \dots\dots\dots (ii)$$

$$Q = 0 + \cos\alpha Y_{bc} - \sin\alpha X_{bc} - \cos\alpha P_y' - \sin\alpha P_x' \dots\dots\dots (iii)$$

符號規約を参照し、(i) 式に  $x = l_{bc}$  なるときの條件  $M = -M_{cb}, P' = P, y = 0$  を與ふれば、

$$M_{bc} + M_{cb} + lY_{bc} - (l - x_0)P_y + y_0P_x = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

この式は c に關するモーメントを採ることにより直接得らるゝことは明である。

(iv) 式を (i)~(iii) 式に代入して  $Y_{bc}$  を消去し  $M_{cb}$  を代置せる形式として表せば、

$$\left. \begin{aligned} M &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)(M_{bc} + x_0P_y' + y_0P_x') + \frac{x}{l} \{ -M_{cb} + (l - x_0)P_y' - y_0P_x' \} - y(X_{bc} + P_x') \quad (i) \\ N &= -\frac{\sin\alpha}{l} ( \dots ) + \frac{\sin\alpha}{l} \{ \dots \} + \cos\alpha ( \dots ) \quad (ii) \\ Q &= -\frac{\cos\alpha}{l} ( \dots ) + \frac{\cos\alpha}{l} \{ \dots \} - \sin\alpha ( \dots ) \quad (iii) \end{aligned} \right\} (1)$$

本 (1) 式によつて構材 bc に關する解法上の未知力を  $M_{bc}, M_{cb}, X_{bc}$  にとり得ることになる。

3. 格點に於ける靜力平衡式

任意の格點 b に結節する構材群, ..., bc, ... の b 端力及び格點荷重  $P_b$  に關する靜力平衡式は適宜の方向に假定せる基線に對し、各構材の徑線方向及び  $P_b$  の方向が右廻りに夫々偏角, ...  $\varphi_{bc}$  ...  $\varphi_b$  (各  $\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$ ) をなすとき、次の如く表はさるゝは明である。

$$\left. \begin{aligned} \sum M_b &= 0 \dots\dots\dots (i) \\ \text{基線方向に, } \sum (X_{bc} \cos \varphi_{bc} + Y_{bc} \sin \varphi_{bc}) &= P_b \cos \varphi_b \dots\dots\dots (ii) \\ \text{“ 直角”, } \sum (Y_{bc} \sin \varphi_{bc} - X_{bc} \cos \varphi_{bc}) &= P_b \sin \varphi_b \dots\dots\dots (iii) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\text{但} \quad Y_{bc} = -\frac{1}{l}(M_{bc} + M_{cb}) + \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) P_y - \frac{y_0}{l} P_x$$

序に  $X_{cb}$  及び  $Y_{cb}$  の形式は,

$$X_{cb} = X_{bc} + P_x, \quad Y_{cb} = Y_{bc} - P_y$$

### 3. 弾性方程式の誘導

#### 1. 座標線の規定

弾性解法には或る連構材の弾性方程式を任意位置の座標線に關して一般形式にて表はし、解法に要する特形を表はすために座標線を特別位置へ定置する。即ち連構材の格點群の縦横距を相互に數量的に定むる方法を採用から、これに關する座標法を次の如く規定する。

##### i) 格點の表示

圖-3 を參照し構造面上の任意の位置及方向に假定せる1つの原線を座標線とし、これに對する構材  $bc$  の配置に關し、

$$\left. \begin{array}{l} b \text{ 及び } c \text{ の各縦距を, } m_b \text{ 及 } m_c \\ bc \text{ の座標線への射影を, } n_{bc} \end{array} \right\}$$

にて表せば、これらの數値關係は座標線に對する  $bc$  の右廻り偏角を  $\beta_{bc} (= 0^\circ \sim 360^\circ)$  とするとき、次の形式で表はされる。

$$\left. \begin{array}{l} -m_b + m_c = l_{bc} \sin \beta_{bc} = n_{bc} \tan \beta_{bc} \\ n_{bc} = l_{bc} \cos \beta_{bc} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

本 (3) 式による三角函數の計算は必要に應じ利用するものとし、多くの實用計算には (3) 式の關係に基く次の規約によつて  $m$  及び  $n$  の取扱を便利にしそれらの數値の正負を定める。

$$\left. \begin{array}{l} \text{座標線の任意方向に對し,} \\ \text{座標線右側の } m_b, m_c \text{ を正 (+), 左側のものを負 (-)} \\ \text{座標線方向の } n_{bc} \text{ を正, 反方向のものを負} \end{array} \right\}$$

座標線の定置に於てその向きを何れにとるも任意でよいことは總ての  $m, n$  の符號を同時に變ずる、即ち特定の弾性方程式の總ての項の符號を變ずることになるからその關する解答に差支がないことになる。圖には2つの座標線を示してある。

##### ii) 格點變形の表示

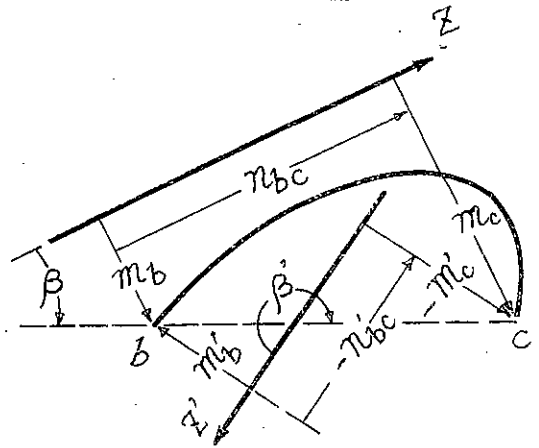
格點の弾性變形の記號及び符號に就ては  $b$  及び  $c$  に於ける

$$\left. \begin{array}{l} \text{座標線方向の分變位を, } +z_b \text{ 及び } +z_c \\ \text{剛節格點の右廻り變角を, } +\theta_b \text{ 及び } +\theta_c \end{array} \right\}$$

にて表はす。

この表示法では格點の弾性變位を座標線方向の分變位  $z$  により表はすだけで足るのである。

圖-3. 2つの座標線を例にとれる  $m, n$  の符號の關係

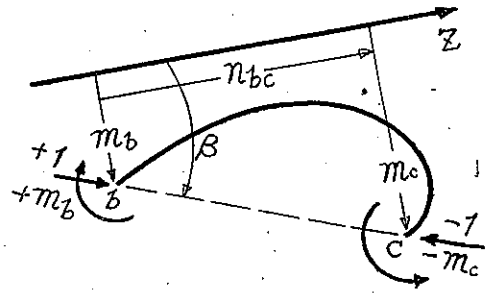


この座標線を構材の線形を表はす  $xy$  軸及び其他の基線と區別するため簡単に  $z$  線と稱する。

2. 弾性方程式の誘導

構造中の任意構材  $bc$  が (1) 式で表はさるゝ如き力の作用をうけて弾性的に平衡せる状態に於て、假りに  $bc$  だけの應力及變形の相互關係を一般的に表はさんために一系の既知平衡力を  $bc$  の周邊に假想して弾性仕事を誘起せしむるものとする。このために  $bc$  が連接せる構造面を幾何學面としてその任意の位置に假定せる  $z$  線上に單位力  $+1$  を假想する。然るとき圖-4 に圖解する如く、この單位力を  $b$  端に置換して得らるゝ作用力は次の式 (i) で表はさるゝが、それに平衡して他端  $c$  に (ii) で表はさるゝ反力が惹起される。

圖-4. 座標線上の單位力の  $b$  點への置換及び  $c$  點への平衡反力



- $\theta_b$  方向に曲げモーメント  $+m_b$ ,
- $z_b$  方向=直力  $+1$  ..... (i)
- $\theta_c$  方向に曲げモーメント  $-m_c$ ,
- $z_c$  方向=直力  $-1$  ..... (ii)

而してこれら外力により  $bc$  材の任意點に生ずべき各力は (1) 式より次の如く表はされる。

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{l} \{ m_b(l-x) + m_c x - n_{bc} y \} \dots\dots\dots (i) \\ N_0 &= \frac{1}{l} (-m_b \sin \alpha + m_c \sin \alpha + n_{bc} \cos \alpha) \dots\dots\dots (ii) \\ Q_0 &= \frac{1}{l} (-m_b \cos \alpha + m_c \cos \alpha - n_{bc} \sin \alpha) \dots\dots\dots (iii) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

斯くして假想の平衡力系による (4) 式の各力は  $bc$  に内働を、(i) 及び (ii) の各力は  $bc$  に外働を誘起せしめ、従つて  $bc$  に與へられる仕事の總和に關し次の弾性平衡式を成立せしむることが出来る。

$$\sum M M_0 \frac{ds}{EI} + \sum N N_0 \frac{ds}{EA} + \sum Q Q_0 \frac{ds}{xGA} - (m_b \theta_b - m_c \theta_c + z_b - z_c) = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

但  $M, N, Q$ : (1) 式の形式

本式 (iii) を計算せる結果は

$$\left. \begin{aligned} &(m_b J_{bc}'' + m_c J' + n_{bc} K_{bc}) M_{bc} + (m_b J' + m_c J_{bc}'' + n_{bc} K_{cb}) (-M_{cb}) \\ &+ (m_b K_{bc} + m_c K_{cb} + n_{bc} L) l X_{bc} \\ &+ (m_b q_{bc}'' + m_c q_{bc}' + n_{bc} q_{bc}^k) = m_b \theta_b - m_c \theta_c + z_b - z_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

但  $J'', J, K, L$ : 形状係數

$q'', q', q^k$ : 荷重係數

こゝに各係數  $J, K, L$  及び  $q$  は構材  $bc$  の形状及載荷に關して特有の形式を與へ得らるゝから、7. 形状及び荷重係數の (18)~(22) 式に示す如く各種形状の構材に對し豫め準備計算しておけばよいのである。特に直材に對しては線の隆起に關する各係數  $K$  の群が消失して形式が可成り簡單になる。

不定座標  $m_b, m_c, n_{bc}$  は (3) 式の關係にあるから、與へらるゝ 1 つの條件により各數値が比例的に定まり、與へらるゝ 2 つの條件により夫々數値が確定する。この座標の條件的確定は即ち  $z$  線の定置であり、それにより未知力  $M_b, M_{cb}, X_{bc}$  を抽出し及び消去することになる。

#### 4. 座標線の定置と未知力の抽出

##### 1. 未知力の消去及び抽出

弾性方程式 (5) の未知力の各係数を次の如く假りに  $g$  で記し,  $g_1 M_{bc} + g_2 M_{cb} + g_3 X_{bc}$

先づ  $g_1=0$  を與ふれば次の條件に於て  $M_{bc}$  が式中より消去される。

$$\begin{aligned} g_1 = m_b J_{bc}'' + m_c J' + n_{bc} K_{bc} &= 0 \\ -m_b + m_c &= l_{bc} \sin \beta_{bc} = n_{bc} \tan \beta_{bc} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3)$$

この條件は  $\infty$  線が構造面上の一定點を通過する任意方向の直線なることを示す。同様に  $g_2=0$  によつて  $M_{cb}$  が消去され、また  $g_3=0$  により  $X_{bc}$  が消去され夫々に應ずる定點が示される。これらの3つの定點を  $g_1, g_2, g_3$  點 (或は消去さるゝ未知力の記號を以て  $M_{bc}, M_{cb}, X_{bc}$  點) と稱するものとし、その位置を  $b$  を原點とする構材線の座標 ( $y, x$ ) によつて表はさんに、横距  $x$  を求むるために  $\beta = \pi/2$  を、縦距  $y$  を求むるために  $\beta = 0$  を與へて何れも次の如く計算される。

$$\begin{aligned} \beta_{bc} = \frac{\pi}{2}; \quad -m_b + m_c = l_{bc}, \quad n_{bc} = 0 \quad \therefore \quad x = l_{bc} - m_c = -m_b \\ \beta_{bc} = 0; \quad -m_b + m_c = 0, \quad n_{bc} = l_{bc} \quad \therefore \quad y = m_b = m_c \end{aligned}$$

従つて

$$\left. \begin{array}{l} g_1(M_{bc}) \text{ 點} \\ \text{横距, } x_1 = l_{bc} \frac{J'}{J' + J_{bc}''} \\ \text{縦距, } y_1 = l_{bc} \frac{-K_{bc}}{J' + J_{bc}''} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} g_2(M_{cb}) \text{ 點} \\ x_2 = l_{bc} \frac{J_{cb}''}{J' + J_{cb}''} \\ y_2 = l_{bc} \frac{-K_{cb}}{J' + J_{cb}''} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} g_3(X_{bc}) \text{ 點} \\ x_3 = l_{bc} \frac{K_{cb}}{K_{bc} + K_{cb}} \\ y_3 = l_{bc} \frac{-I}{K_{bc} + K_{cb}} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

これら3つの定點は夫々の未知力に関する弾性中立點と言はれ得る。即ち1つの未知力に1つの弾性中立點が存する。

故に何れか2つの未知力を同時に消去せんには對應する2つの  $g$  點を通る一定線に  $\infty$  線を定置することにより満足される。この定線とその通過すべき定點の記號を與へて夫々  $g_2 g_3, g_3 g_1, g_1 g_2$  線 (或は抽出さるべき未知力の記號を與へて  $M_{bc}, M_{cb}, X_{bc}$  線) とすれば各線の位置に関する  $m_b, m_c, n_{bc}$  の數値は同次式  $g_1=0, g_2=0, g_3=0$  の對應する3つに関する行列式解法より次の各式で表はされる。

$$\left. \begin{array}{l} g_2 g_3(M_{bc}) \text{ 線: } \frac{m_b}{J_{cb}'' L - K_{cb}^2} = \frac{m_c}{K_{bc} K_{cb} - J' L} = \frac{n_{bc}}{J' K_{cb} - J_{cb}'' K_{bc}} \dots (i) \\ g_3 g_2(M_{cb}) \text{ 線: } \frac{m_b}{K_{bc} K_{cb} - J' L} = \frac{m_c}{J_{cb}'' L - K_{bc}^2} = \frac{n_{bc}}{J' K_{bc} - J_{bc}'' K_{cb}} \dots (ii) \\ g_1 g_2(X_{bc}) \text{ 線: } \frac{m_b}{J' K_{cb} - J_{cb}'' K_{bc}} = \frac{m_c}{J' K_{bc} - J_{bc}'' K_{cb}} = \frac{n_{bc}}{J_{bc}'' J_{cb}'' - J' L} \dots (iii) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

こゝに比例式 (i), (ii), (iii) の上記排列に於て分母の形式は左上-右下の對角線に關して對稱にあるを認る。また各比例の値は分母を一般に  $D_b, D_c, D_{bc}$  で表はすことにより、(3) 式を参照して次の如く計算される。

$$\frac{m_b}{D_b} = \frac{m_c}{D_c} = \frac{n_{bc}}{D_{bc}} = \frac{l_{bc}}{\sqrt{(-D_b + D_c)^2 + l_{bc}^2}} \dots \dots \dots (7)_{II}$$

(7) 式で表はされる  $\infty$  線への  $\infty$  線の定置はその關する弾性方程式に就て少くも2つの未知力の弾性仕事を各自同時に零ならしむる如き中立位置へ  $\infty$  線を持たすものと言ふことが出来る。勿論かゝる定線以外に更に總て

の未知力をも相互同時に消去せしめ得る如き  $\approx$  線の位置は各未知力の数値に應じ弾性中立點を合一することにより常に存在し得ることを知るが、各力が未知量なる限りはそれを各自單獨に消去せしむる上述の範圍の方法に於て満足すべきであらう。

2. 鉸節に對する  $\approx$  線の定置

鉸端材では鉸點が弾性を連続せないから  $\approx$  線をしてその點を通過せしめて必然的に  $m=0$  とし及び  $M=0$  を與ふればよいことになる。即ち鉸點が弾性中立點の 1 つになる。

例へば  $b$  端が鉸節なるときには  $m_b=0$  によつて弾性方程式 (5) に於て  $J'$  と  $K_{bc}$  が消失し、從つて定點及び定線に關する形式は次の如くなる。

$$-(m_c J_{cb}'' + m_{bc} K_{cb}) M_{cb} + (m_c K_{cb} + n_{bc} I) l X_{bc} + (m_c q_{bc}' + m_{bc} q_{bc}^k) = -m_c \theta_c + z_b - z_c \dots\dots\dots (8)$$

$g_1$ 點 (鉸)	$g_2(M_{cb})$ 點	$g_2(X_{bc})$ 點	
$x_1=0$	$x_2=l_{bc}$	$x_3=l_{bc}$	} \dots\dots\dots (9)
$y_1=0$	$y_2=l_{bc} \frac{-K_{cb}}{J_{cb}''}$	$y_3=l_{bc} \frac{-I}{K_{cb}}$	
$g_2 g_2(M_{cb})$ 線:	$\frac{m_b}{\delta} = \frac{m_c}{-L} = \frac{n_{bc}}{K_{cb}}$		} \dots\dots\dots (10)
$g_1 g_2(X_{bc})$ 線:	$\frac{m_b}{\delta} = \frac{m_c}{-J_{bc}'' K_{cb}} = \frac{n_{bc}}{J_{bc}'' J_{cb}'' - J' J'}$		

併し鉸節に對してその關する  $m$  を存せしむる如き弾性方程式を成立せしめんことは構材上の特徴を通る補助の  $\approx$  線による  $M$  の條件的消去 (例題 6. 参照) によりなされ得るが、その形式を別に簡單となし得ないから、これを特別なる研究に屬せしめてよいと思はれる。

3. 單材に關する例解

例 1.

線形が  $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ , 斷面に就て  $I \cos \alpha = I_0$  なる固定拋物線拱  $bc$  の 3 つの未知力を求め夫々の解答に應ずる  $\approx$  線の圖示。但し  $N$  及  $Q$  の弾性變形を無視するものとす。

[解]

弾性方程式 (5) に式 (22) 式を参照して形狀係數の値を代置すれば、

$$J' = J = \frac{l}{6EI_0}, \quad J'' = 2J, \quad K = -2 \frac{f}{l} J, \quad L = \frac{16f^2}{5} J$$

$$\left( 2m_b + m_c - 2 \frac{f}{l} m_c \right) J M_{bc} - \left( m_b + 2m_c - 2 \frac{f}{l} m_c \right) J M_{cb}$$

$$- 2 \left( m_b + m_c - \frac{8}{5} \frac{f}{l} m_c \right) f J X_{bc} + (m_b q_{bc}'' + m_c q_{bc}' + n_{bc} q^k) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

i)  $M_{bc}$

他の 2 つの未知力を消去するため (7)<sub>1</sub> 式による比例式を上 (11) 式に代入し、及び荷重係數の値を與へて、

$$\frac{m_b}{\frac{6}{5} f} = \frac{m_c}{\frac{2}{5} f} = \frac{n_{bc}}{l}$$

$$M_{bc} = -\frac{1}{2J} \left( 3q'' + q' + \frac{5}{2} \frac{l}{f} q^k \right)$$

$$= -\frac{1}{2l^3} x(l-x)^2 (2l-5x) P_y - \frac{2f}{l^3} x(l-x)^2 (2l^2 - 7lx + 8x^2) P_z$$

ii)  $M_{cb}$ 

同様の計算により,

$$\begin{aligned} \frac{m_b}{\frac{2}{5}f} &= \frac{m_c}{\frac{6}{5}f} = \frac{n_{bc}}{l} \\ M_{cb} &= +\frac{1}{2f} \left( q'' + 3q' + \frac{5}{2} \frac{l}{f} q^k \right) \\ &= -\frac{1}{2f^3} x^2(l-x)(3l-5x) P_y - \frac{3f}{l^5} x^2(l-x)(3l^2-9lx+8x^2) P_x \end{aligned}$$

iii)  $X_{bc}$ 

$$\begin{aligned} \frac{m_b}{\frac{2}{3}f} &= \frac{m_c}{\frac{2}{3}f} = \frac{n_{bc}}{l} \\ X_{bc} &= -\frac{5}{4f^2} \left( q'' + q' + \frac{3}{2} \frac{l}{f} q^k \right) \\ &= +\frac{15}{4f^3} x^2(l-x)^2 P_y - \frac{1}{l^5} (l-x)^2 (l^3 + 2l^2x - 12lx^2 + 24x^3) P_x \end{aligned}$$

iv)  $M_{bc}, M_{cb}, X_{bc}$  に関する  $\varepsilon$  線の位置

(6) 式により各中立点の位置を計算すれば次の如く

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}l \\ y_1 &= \frac{2}{3}f \end{aligned} \right\} (M_{bc} \text{ 消去}) \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{3}l \\ y_2 &= \frac{2}{3}f \end{aligned} \right\} (M_{cb}) \quad \left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}l \\ y_3 &= \frac{4}{5}f \end{aligned} \right\} (X_{bc})$$

これより  $g_2g_3(M_{bc}), g_1g_1(M_{cb}), g_1g_2(X_{bc})$  線を記入すれば図-5 に示す如くなる。

本例の如く単材の解法には代数計算のみで足り必らずしも  $\varepsilon$  線の位置を幾何學的に定むるの必要は起らない。

## v) 熟知せる座標原点變換の方法に就て (参考)

弾性式 (5) の  $M_{cb}$  に (2) 式の但書により  $Y_{bc}$  を代置せる形式に就て未知力の抽出及び消去を行へば  $g_1$  点が  $x_1 = \frac{1}{2}l, y_1 = \frac{2}{3}f$  の点となる。従来熟知せる如く、座標原点を弾性重心に變換する解法はこの  $g_1$  点

に座標原点を移すものに他ならない。 $g_1$  点を原点とすればこの場合直交座標として  $X_{bc}$  と  $Y_{bc}$  が單獨に求まる。然るにかゝる原点は  $g_2$  或は  $g_3$  にも定められ、それによつて夫々  $M_{bc}$  と  $X_{bc}$  或は  $M_{cb}$  と  $Y_{bc}$  が各自單獨に求まるは明である。

尙座標法に關して成立する 3 の弾性條件式、 $F_1=0, F_2=0, F_3=0$  から聯立解法により未知量を消去することは、2 つの條件式に就て  $k_1F_1+k_2F_2=0$  (但  $k$ : 係数) を逐次作り行くことは言ふまでもないが、このことは 2 つの原式に關する 2 つの座標線の交點 (變角條件式に關しては無限大距離) を通る新なる 1 つの座標線により新なる弾性式を表はすことになり、その結果は  $g_1, g_2, g_3$  点及びそれらを通る座標線が得られることになる。

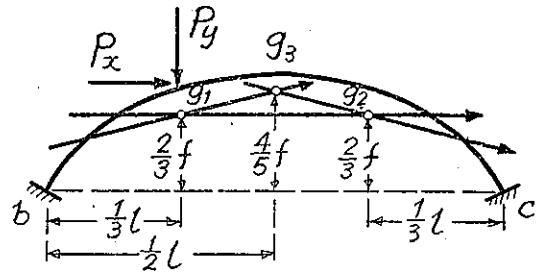


圖-5. 固定拱線の 3 つの中立点及び 3 つの中立線の圖示



斯の如き計算法は面倒であるからこゝで應用せず、また座標軸の原点法をも考へず、単一座標線（即ちz線）を彈性中立線に定置する方法に於て解法をなすものである。

例 2

例 1 の拱に於て、端が鉸節なるときの解法

[解]

式 (8) に必要なる形状係数の値を代入して、

$$2 \left( -m_c + n_b \frac{f}{l} \right) JM_{cb} + 2 \left( -m_c + n_b \frac{8}{5} \frac{f}{l} \right) f JX_{bc} + (m_c q' + n_b c q^k) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

i)  $M_{cb}$

上 (12) 式に就て  $X_{bc}$  を消去するための條件,  $m_c = n_b \frac{8f}{5l}$  を與へて、

$$\begin{aligned} M_{cb} &= -\frac{1}{6J} \left( 8q' + 5 \frac{l}{f} q^k \right) \\ &= -\frac{1}{3l^3} x(l-x)(l^2 + lx - 5x^2) P_y - \frac{4}{3} \frac{f}{l^3} x(l-x)(l^3 - 6lx^2 + 8x^3) P_x \end{aligned}$$

ii)  $X_{bc}$

同様に  $M_{cb}$  を消去すべき條件,  $m_c = n_b \frac{f}{l}$  を與へて、

$$\begin{aligned} X_{bc} &= -\frac{5}{6fJ} \left( q' + \frac{l}{f} q^k \right) \\ &= +\frac{5}{6fl^3} x(l-x)^2(l+2x) P_y - \frac{1}{3l^3} (l-x)^2(3l^3 - 4l^2x - lx^2 + 32x^3) P_x \end{aligned}$$

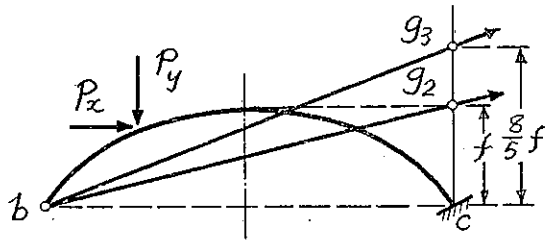
iii) 各解答に関する z 線の位置

$X_{bc}$  消去,  $M_{cb}$  抽出に関する  $g_1$  點の位置は  $x_1 = l, y_1 = \frac{8}{5}f$

$M_{cb}$  " ,  $X_{bc}$  "  $g_2$  "  $x_2 = l, y_2 = f$

故に 圖-6 に示す如き  $g_1g_2(M_{cb})$  及び  $g_1g_2(X_{bc})$  線が得られる。

圖-6. 一端鉸節の拱線 2 つの中立點及び 2 つの中立線の圖示



例 3

剛節矩形樑の等断面直材 bc に関する撓角撓度法の基本式誘導。但し N 及び Q の彈性變形を無視するものとす。

[解]

彈性式 (5) に (2i) 式の形状係数を代入して、

$$(2m_b + m_c) JM_{bc} - (m_b + 2m_c) JM_{cb} + m_b q' + m_c q' = m_b \theta_b - m_c \theta_c + z_b - z_c \dots\dots\dots (13)$$

$M_{bc}$  を抽出するために  $m_b + 2m_c = 0$  即ち  $m_b : m_c = 2 : -1$  を與へる。このとき z 線は bc の c 寄りの 3 等分線となり、その方向は bc を左右にして下向なることを示す。 $M_{cb}$  の抽出に對しても同様に  $m_b : m_c = 1 : -2$  を與へて夫々次の形式が得られる。

$$M_{bc} = -\frac{1}{J} p' + \frac{2EI}{l} \left\{ (2\theta_b + \theta_c) + \frac{3}{l} (z_b - z_c) \right\}$$

$$M_{cb} = +\frac{1}{J}P' + \frac{2EI}{l} \left\{ (\theta_b + 2\theta_c) + \frac{3}{l}(z_b - z_c) \right\}$$

$$\text{但 } \frac{1}{J}P' = \frac{1}{l^2}x(l-x)^2P, \quad \frac{1}{J}P'' = \frac{1}{l^2}x^2(l-x)P, \quad J = \frac{l}{6EI}$$

註: bc が斜材なるときには変位  $z$  に傾角の係数が與へられ, 更に  $N$  の變形應力を考慮する場合, 或は bc が曲材なるときには  $z$  を  $z$  軸の方向に分解せる形式とすべきことになり, 何れの場合に於ても基本式が 1 つ増加する。

### 5. 構造の解法

#### 1. 連構材に関する弾性方程式

弾性式 (5) は剛節格點を對象として表はされあるから, 構造中の任意の連構材  $abc \cdots ij$  に對してはその中間格點に關する弾性變形を總て消去し, 格點に結節せる他の構材群及び格點荷重に無關係に次の形式を以て連續適用される。

$$\sum_{bc=ab}^{ij} \{ \text{式 (5) の左邊} \} = m_a\theta_a - n_j\theta_j + m - n \cdots \cdots \cdots (5')$$

單材に關する未知力の抽出及消去の方法は連構材の任意の 3 つの未知力相互に就て適用されるが, このときの  $z$  線の特定位置の表示には代數計算により特定点が見出さるゝに對し幾何學圖解を併用して各縦横距の比例關係を表せば便利である。

さきに述べた  $z$  線の無限大距離の條件式は上式 (5') の  $m$  に無限大を與へればよいので, それによつて  $m$  を乗數とせない有限値の項は總て消失されるが, 更に同一級の無限大を通約することにより,

$$\sum_{bc=ab}^{ij} \{ (J_{bc}'' + J')M_{bc} - (J' + J_{cb}'')M_{cb} + (K_{bc} + K_{cb})lX_{bc} + q_{bc}' + q_{bc}' \} = \theta_a - \theta_j \cdots \cdots (14)$$

これは連構材に關する變角條件式に他ならない。

#### 2. 未知力の抽出及變形の處理

構造の内力の直接解法に於て連構材に關する未知力を單獨に抽出し及び格點變形を處理せんことは次の如く周知の力學上の原則 I. 及び既に述べた弾性計算法を約言せる II に基いてなされ得ることは明である。

I. 格點未知力に關する靜力平衡條件はその格點變形の存在に對應して成立される。

II. 構材及連構材に關する弾性方程式はその未知力相互の間より任意の 1 つを單獨に表はす形式に於て成立される。

即ち構造の組成を或る既成部分に新なる構材を逐次増加して三邊形或は四邊形などの單形を添加することにより進められ, それに應じて新なる未知量が生ずるものと考ふれば, それら新なる未知部分と既知部分との關係に於て, 原則 I により靜力平衡式が變形の數に等しい未知力に關して條件式を成立せしめ, 更に II により弾性平衡式が變形の消失せる形式を以て殘餘の未知力を各自單獨に表はすことになり, これらの連繫により未知力の總數に對し逐次に解法が進められる。

これを約言すれば, 未知力の總數に對し變形の數だけ靜力條件が成立し殘りの未知力には各自に弾性條件が適用されるのである。

#### i) 基本不定力

併し, 解法の着手に於ける構造の翼側には既成部分なるものが存在し得ないから, その翼材に關する未知力を

記號のまま荷重と同一に取扱へ條件式を適用し行くことが便利とされる。この未知力の数は翼材の自由格點に假定さるゝ弾性變形の數を超過せない。即ち普通には變形と同數であるが單構に對し或は特に考案さるゝ解法などに於てはその數を減じ得ることもある。これらの未知力を基本不定力と稱する。

基本不定力は構造の他翼に於てその數だけ殘存すべき弾性或は靜力條件式によつてその値が確定さるゝは明である。即ち假定さるゝ未知力の總數に對し弾性及靜力條件式が同數だけ成立されるから基本不定力を解くべき條件數に過不足の生ずる如きことは起らないわけである。斯くして基本不定力はそれを解くことにより、他の未知量が既定條件を以て直接計算され得るものとなる。

### ii) 解法計算の照査

弾性方程式は任意の  $\alpha$  線により或は異なる経路の連構材に就て外形の異なる各形式を以て解法に必要にして十分な數以上に作られる。この餘分の形式を計算済みの部分に適用して基本不定力の函數形に整理すれば恒等式となり自ら消失するからこれにより既成計算の照査が試みられる。

### iii) 相對方程式

斯く直接解法は少數の基本不定力と荷重との代入計算により構造をその有りのまゝの状態で解いて行つてよいのであるが、その進行が遅々たる感ありとすれば多格間及多層の構造の如く相似せる單形の縦横に連續する構造に對しては、その縦或は横何れか隣接する 2 つの列の格點群に關する特定の未知力相互間に就て、1 つの列の未知力を各自單獨に他の列の未知力群で表はす如き弾性條件式を常に作ることが出来るからそれによつて解法を簡便にすることが出来る(例題 5)。この條件式を相對方程式と稱する。若し更に連續する單形が同一形状のものであれば相對方程式は數格間を隔てた格點列相互に適用せられ踏進的に計算を進むることも出来る。

## 6. 例題

### 例題 1

圖-7 に示す架構 1 2 3 の解法 ( $N$  及び  $Q$  の變形應力を無視す)。

[解]

剛節直材  $bc$  に關する弾性方程式は形狀係數の式 (21) を参照して、

$$(2m_b + m_c)JM_{bc} - (m_b + 2m_c)JM_{cb} + M_b q' + m_c q' = \text{變形}$$

この場合  $M_{12}$  及び  $M_{22}$  を消去するために、 $\alpha$  線をして 1 3 の 1 寄りの 3 等分點及び 2 3 の 3 寄りの 3 等分點を通らしめて 1 2 3 に弾性式を適用すれば、

$$m_1 : m_2 : m_3 = 1 : -2 : 1$$

$$3J_h M_{21} - 3J_l M_{22} - 2q'' + q' = 0 \quad \text{但} \quad 2q'' - q' = 3p'$$

格點 2 に關する靜力條件、 $M_{21} + M_{22} = 0$  を與へて  $M_{21}$  を抽出すれば、

$$M_{21} = \frac{1}{J_h + J_l} p' = \frac{1}{(k+1)l^2} x^2(l-x)P \quad \text{但} \quad k = \frac{J_h}{J_l} = \frac{I_h}{I_l} \cdot \frac{h}{l}$$

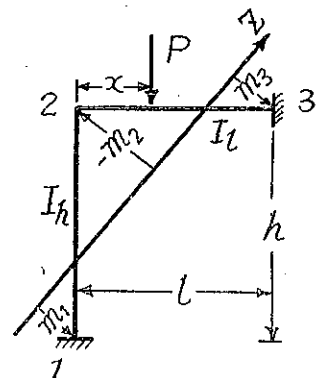
他の未知力  $M_{12}$  及び  $M_{22}$  の値も各自單獨に求まるが、寧ろ  $\alpha$  線をして夫々 2 3 及び 2 1 を通らしむるときの弾性條件式、 $M_{21} - 2M_{12} = 0$  及び  $J_l(M_{21} - 2M_{12}) + q' = 0$  に上記解答を與へて求むれば簡便である。

[參考]

この場合には解法上の基本不定力を指定する必要はないが、 $M_{21}$  を基本不定力の如く見做せは便利である。

連構材 1 2 3 に關する一般弾性式に  $\sum M_s = 0$  を與ふれば、 $M_{21}$  (或は  $M_{22}$ ) の係數は  $(m_1 + 2m_2)J_h + (2m_2 + m_3)J_l$

圖-7. 例題 1 の圖



となる。これ  $M_{21}$  に関する中立點が  $M_{21}$  及び  $M_{23}$  の夫々固有の中立點の合一せるものに當ることを示すものである。連構材の形状によつては、數多の静力條件が與へらるゝに應じて數多の固有中立點の合成點が存し得ることになる。合成點の位置を算出することは不便であるが、多くの構造の解法ではかかる合成點を確定すべき必要は餘り起ないことを知るのである。

例題 2

圖-8 に示す鉸脚端の架構 1 2 3 4 の解法 ( $N$  及び  $Q$  の弾性變形を無視)

【解】

この場合 3 つの静平衡條件と 1 つの弾性條件式により 4 つの  $M$  が解かれる。 $M_{21}$  を基本に解くことにする。

※ 線をして鉸點 1 及び 4 を通らしむることによる 1 2 3 4 の弾性式は

$$m_1 = m_4 = 0, \quad m_2 : m_3 = h_2 : h_3$$

$$-2h_2 J_2 M_{21} + (2h_2 + h_3) J_1 M_{23} - (h_2 + 2h_3) J_1 M_{32}$$

$$+ 2h_3 J_3 M_{34} + h_2 q'' + h_3 q'' = 0$$

2 つの格點 2, 3 及び層に関する各静平衡條件,

$$M_{21} + M_{23} = 0, \quad M_{32} + M_{34} = 0, \quad M_{21}/h_2 + M_{34}/h_3 = 0$$

を上式に代入して  $M_{21}$  を抽出すれば,

$$M_{21} = \frac{1}{2\{(1+k_2) + \mu + \mu^2(1+k_3)\}} \{(2l-x) + \mu(1+x)\} \frac{x(l-x)}{j^2} P$$

$$\text{但 } \mu = \frac{h_3}{h_2}, \quad k_2 = \frac{J_2}{J_1} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h_2}{l}, \quad k_3 = \frac{J_3}{J_1} = \frac{I_3}{I_1} \cdot \frac{h_3}{l}$$

他の  $M$  の値は上記の静平衡條件より直接求まる。

例題 3

圖-9 に示す矩形架構に  $H$  及び  $P$  が作用するときの解法 ( $N$  及び  $Q$  の弾性應力を無視)

【解】

このまゝ解くには 2 つの基本不定力を要するが、次の如く荷重分割法をなすことにより 1 つの  $M_{12}$  を解いておけばそれを基本として他の未知力が總て計算される。

連構材 1 2 3 に對し ※ 線を 3 4 に定置すれば,

$$3J_h(M_{12} - M_{21}) + J_l(2M_{23} - M_{32}) + q'' = 0 \quad \dots\dots\dots (A)$$

(i) 對稱載荷 (圖-9 右上)

格點 2 を通る ※ 線により,

$$J_h(2M_{12} - M_{21}) = 0 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{静平衡條件, } M_{21} + M_{23} = 0 \quad \dots\dots\dots (ii), \quad \text{對稱條件, } M_{23} = -M_{32} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

(i)~(iii) を (A) に代置して,

$$M_{12} = \frac{q''}{3(J_h + J_l)} \quad \text{但 } q'' = \frac{3x(l-x)}{l} J_l \frac{P}{2} \quad \dots\dots\dots (I)$$

圖-8. 例題 2 の圖

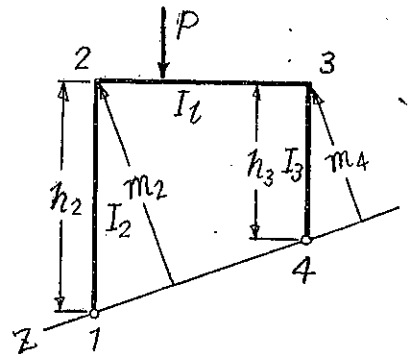
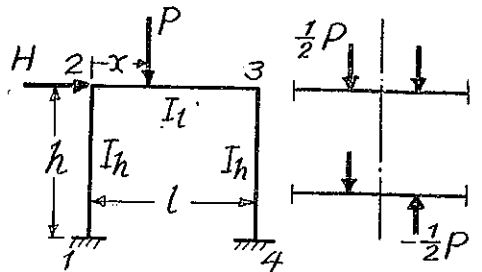


圖-9. 例題 3 の圖



(2) 逆対称荷 (圖-9 右下)

層の水平力平衡条件,  $M_{12} + M_{21} + \frac{1}{2} Hh = 0 \dots\dots\dots (iv)$

格点 2 の平衡条件,  $M_{21} + M_{23} = 0 \dots\dots\dots (v),$  逆対称条件,  $M_{23} = M_{22} \dots\dots\dots (vi)$

(iv)~(vi) を (A) に代置して

$$M_{12} = -\frac{q''}{(6J_h + J_i)} \cdot \frac{3J_h + J_i}{(6J_h + J_i)} \cdot \frac{Hh}{2} \quad \text{但} \quad q'' = \frac{x(l-x)(l-2x)}{l} J_i \frac{P}{2} \dots\dots\dots (II)$$

(3) 全載荷

(I) と (II) を加へて,

$$M_{12} = \frac{\{k(5l+2x) - (l-4x)\}}{(k+2)(6k+1)} \cdot \frac{x(l-x)}{2l^2} P - \frac{3k+1}{2(6k+1)} Hh$$

$$\text{但} \quad k = \frac{J_h}{J_i} = \frac{l}{h} \frac{h}{l}$$

例題 4

圖-10 に示す拱架構に就て各構材の形状等を次の如く假定するときの解法。

i) 拱材: (22) 式で表はさるゝ拋物線形とし,

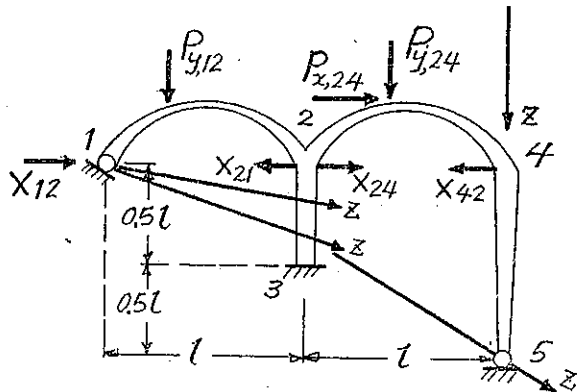
圖-10. 例題 4 の圖

$h/l = 1/5$  を與へると形状係数は次の値になる。

$$J' = J \left( = \frac{l}{6EI_0} \right), \quad J'' = 2J,$$

$$K = -0.4J, \quad I_1 = 0.128J$$

ii) 垂直材: 23 を等断面とする。45 を圖-16 及び (20) 式による形状とし、断面高の變化を  $d_4 = 1.5 d_5$  に假定すれば  $\log_2(1.5) = 0.405, 46$  になり形状係数は次の如く計算される。こゝでは下端 5 を鉸節にするから剛節點の  $M_{45}$  の計算に關するものだけを記す。



$$J_{45}'' = 0.447, 4 \frac{I_{45}}{EI_4} \left( = 0.132, 6 \frac{I_{45}}{EI_5} \right)$$

但  $I_4$ : 端 4 の断面二次モーメント ( $I_5$ : 端 5 の二次モーメント)

各材の  $N$  及び  $Q$  の弾性變形を無視する。

iii) 各材の断面比: 拱材の  $J$  (特に接字を附せず) に對する垂直各材の  $J_{23}$  及  $J_{45}''$  の比を  $J = 3J_{23} = 1.5J_{45}''$  (即ち  $I_0 : I_{23} : I_4 = 1 : 1.5 : 4.03$ ) に假定する。

iv) 基本不定力を  $M_{21}$  及び  $X_{12}$  としてその算定

[解]

未知力の數は 2 つの拱に對する 5 個と 2 つの直材に對する 3 個と總數 8 個存するので解法條件式が 8 個必要となる。即ち中間格点 2 及び 4 に假定する 4 つの變形に對應して 4 個の靜力條件を成立せしめ得るから、他に 4 個の彈性條件式が適用されることになる。而して基本不定力として左翼材 12 に關する 2 種の變形に應ずる 2 つの未知力  $M_{21}$ ,  $X_{12}$  が選定されるからこれを各自單獨に表はすための 2 個の條件式が最初に適用されず

して解法が進められ、右翼材 4 5 の計算に至つて 2 個の条件式が餘分に存すべき結果になり、よつて基本不定力の値が確定する。

拱材及び直材に関する弾性方程式 (5) の不定形は夫々記號 bc を以て次の如く表はされる。

$$\text{拱,} \quad (2m_b + m_c - 0.4nbc) JM_{bc} - (m_b + 2m_c - 0.4nbc) JM_{cb} - 0.4(m_b + m_c - 0.32nbc) JI X_{bc} + (m_b q_{bc}'' + m_c q_{bc}' + nbc q_{bc}^k) = \text{變形} \dots\dots\dots (A)$$

$$\text{變断面直材,} \quad (m_b J_{bc}'' + m_c J_{cb}') M_{bc} - (m_b J_{cb}' + m_c J_{bc}'') M_{cb} = \text{變形} \dots\dots\dots (B)$$

$$\text{等断面直材,} \quad (3m_b + m_c) J_{bc} M_{bc} - (m_b + 2m_c) J_{cb} M_{cb} = \text{變形} \dots\dots\dots (C)$$

計算

i)  $M_{23}$

連構材 1 2'3 に弾性式を適用して  $M_{32}$  を消去するために、 $\rho$  線をして鉸點 1 及び 2'3 の 3 寄りの 3 等分點を通らしむれば、

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, \quad m_2 : m_3 : n_{12} = -2 : 1 : 6 \\ 6.4 JM_{21} + 1.568 JI X_{12} - 2q_{12}' + 6q_{12}^k - 3J_{23} M_{23} &= 0 \\ \therefore JM_{23} &= 3J_{23} M_{23} = 6.4 JM_{21} + 1.568 JI X_{12} - 2q_{12}' + 6q_{12}^k \dots\dots\dots (i) \end{aligned}$$

ii)  $M_{32}$

上の場合に  $\rho$  線を 23 の 2 寄りの 3 等分點を通らしめて、

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, \quad m_2 : m_3 : n_{12} = -1 : 2 : 6 \\ 4.4 JM_{21} + 1.168 JI X_{12} - q_{12}' - 6q_{12}^k - 3J_{23} M_{32} &= 0 \\ \therefore JM_{32} &= 4.4 JM_{21} + 1.168 JI X_{12} - q_{12}' + 6q_{12}^k \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

照査)

一例として  $\rho$  を通る垂直線を  $\rho$  線とする連構材 1 2'3 に関する次の条件式は上記計算値の代入により満足される。

$$2JM_{11} + 0.4 JI X_{12} - q_{12}' - 3J_{23} (M_{23} - M_{32}) = 0$$

iii)  $M_{24}$

$$\sum M_2 = 0, \quad JM_{24} = -J(M_{21} + M_{23}) = -7.4 JM_{21} - 1.568 JI X_{12} + 2q_{12}' - 6q_{12}^k \dots\dots\dots (iii)$$

iv)  $X_{24}$

格點 2 に関する水平方向の静平衡条件より、

$$\begin{aligned} X_{24} &= X_{21} - Q_{23} = X_{12} + \frac{1}{0.5l} (M_{21} + M_{23}) \\ \therefore JI X_{24} &= 21.6 JM_{21} + 6.472 JI X_{12} - 6q_{12}' + 24q_{12}^k \dots\dots\dots (iv) \end{aligned}$$

v)  $M_{43}$

連構材 3 2'4 に関する弾性式に對し垂直 4 5 を  $\rho$  線とすれば、

$$\begin{aligned} m_2 &= m_3 = l, \quad m_4 = 0, \quad n_{24} = 0 \\ 3J_{23} (M_{32} - M_{23}) + 2JM_{24} - JM_{42} - 0.4 JI X_{24} + q_{24}'' &= 0 \\ \therefore JM_{43} &= -25.44 JM_{21} - 6.1248 JI X_{12} + 7.4 q_{12}' - 21.6 q_{12}^k + q_{24}'' \dots\dots\dots (v) \end{aligned}$$

vi)  $M_{45}$

連構材 3 2'4 5 に對し  $\rho$  線をして 5 のほかに例へば 3 2 の 3 寄りの 3 等分點を通らしむれば

$$m_6 = 0, \quad m_3 : m_2 : m_4 : m_{14} = 0.5 : -1 : -3 : 3$$

$$1.5 J_{23} M_{23} - 6.2 J M_{24} + 8.2 J M_{22} + 1.984 J L X_{24} - q_{24}'' - 3q_{24}' + 3q_{24}^k - 3 J_{46}'' M_{46} = 0$$

$$\therefore J M_{46} = -53.436,8 J M_{21} - 13.438,6 J L X_{12} + 17.688 q_{12}' - 44.652 q_{12}^k - 1.5 q_{24}' + 3.6 q_{24}'' + 1.5 q_{24}^k \dots \dots \dots (vi)$$

vii) 基本不定力  $M_{21}, X_{12}$

格点 4 に関する  $\sum M_i = 0, \sum X_i = 0$  は

$$M_{12} + M_{46} = 0 \dots \dots \dots (vii)$$

$$X_{42} - Q_{46} = X_{24} + P_{2,24} + \frac{1}{l} M_{46} = 0 \dots \dots \dots (viii)$$

これに上記の計算の値を代入して、

$$\begin{matrix} J M_{21} & J L X_{12} & q_{12}' & q_{12}^k & q_{24}' & q_{24}'' & q_{24}^k & J L P_{2,24} \\ 335.107 + 78.253,8 = & 100.352 - 256.008 - 6 + 18.4 + 6 & & & & & & 0 \\ 47.04 + 12.590,8 = & 13.4 & - 45.6 & & 0 & + 1 & 0 & - 1 \end{matrix}$$

これを解いて

$$\begin{matrix} q_{12}' & q_{12}^k & q_{24}' & q_{24}'' & q_{24}^k & J L P_{2,24} \\ J M_{21} = +.398,96 + & .426,1 & -.139,9 + .234,2 + .139,9 + .144,85 \\ J L X_{12} = -.426,1 & -5.211,15 + .522,5 - .981,9 - .522,5 - .620,3 \end{matrix}$$

荷重係数の数値を與ふれば、

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{1}{l^3} x(l-x)(.228,5 l^3 + .228,5 l x + .170,4 x^2) P_{y,12} \\ &+ \frac{1}{l^3} x(l-x)(.372,5 l^3 - .480,1 l x + .055,9 x^2) P_{y,24} \\ &+ \frac{1}{l^3} (.176,7 l^3 + .118,9 l^2 x - .801 l x^2 + .196,4 l^2 x^2 - 1.404,3 l x^3 + .358,2 x^4) P_{x,24} \\ X_{12} &= \frac{1}{l^4} x(l-x)(1.658,4 l^2 + 1.658,4 l x - 2.084,5 x^2) P_{y,12} \\ &+ \frac{1}{l^4} x(l-x)(-1.232,3 l^2 + 1.713,3 l x - .209 x^2) P_{y,24} \\ &+ \frac{1}{l^6} (-.796,1 l^6 - .216,3 l^5 x + .595,6 l^4 x^2 - 3.939,4 l^3 x^3 + 5.073,4 l^2 x^4 - 1.337,5 x^5) P_{x,24} \end{aligned}$$

例題 5

単層連続架構の解法に於て各材の  $N$  及び  $Q$  の弾性変形の効果を無視する場合の相対方程式を誘導し、その例解として圖-12 に示す 6 区間架構の各材の剛比が 1 なるものに就て基本不定量  $M_{11}'$  及び  $\delta$  を算定。

[解]

単層架構を横の方向に解き行くものとするとき翼側に於ける 2 つの  $M$  を基本不定力に採ればよいが、或は水平材が直材であつて ( $N$  の弾性変形を無視する限り) 全区間に共通の格点變位  $\delta$  が存するからこれを 1 つの  $M$  の代りに採つてもよい。こゝでは後の方法を探る。

圖-11 に示す任意の 2 つの隣接格点に就て相対方程式を準備せんに、格点 b に関する  $M_{ba}$  と  $M_{bb}'$  及び  $\delta$  を不定量 (數計算にはこの  $M$  の 1 つが不用となる) として格点 c に関する同位の未知量  $M_{cb}$  及び  $M_{cc}'$  の形式を

各自單獨に表せばよいのであつて、先づ  $M_{cb}$  式に就ては  $bb'$  の  $b'$  寄りの3等分點と  $c$  點を通る  $z$  線に關し  $z$  連構材  $b'bc$  に彈性式 (5) を適用すれば、

$$\frac{mb'}{1} = \frac{mb}{-2} = \frac{mc}{0} = \frac{hb}{3} \cos \gamma,$$

但  $\gamma$ :  $z$  線の水平に對する傾斜

$$3J_{bb'}M_{bb'} - 4J_{bc}M_{bc} + 2J_{cc'}M_{cc'} - 2q_{bc}' = \frac{3}{hb} \delta \quad \dots\dots\dots (i)$$

但  $\delta$ : 上部格點の共通水平變位

同様に連構材  $bcc'$  に對し  $b$  點及び  $cc'$  の  $c'$  寄りの3等分點を通る  $z$  線を假定して、

$$3J_{cc'}M_{cc'} - 4J_{bc}M_{cb} + 2J_{bc}M_{bc} + 2q_{bc}' = -\frac{3}{hc} \delta \quad \dots\dots\dots (ii)$$

上式 (i) に  $\sum M_b = 0$  を與へて  $M_{bc}$  を消去し  $M_{cb}$  を抽出すれば次の (15) (i) 式が得られ、また (ii) 式に對し  $M_{bc}$  及び  $M_{cb}$  を消去して  $M_{cc'}$  を抽出することにより同 (15) (ii) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} J_{ab}M_{ba} - J_{bb'}M_{bb'} & \quad \delta \quad (p_{bc}' + p_{bc}'') \\ J_{bc}M_{cb} &= -2\lambda - \left(\frac{3}{2} + 2\mu\right) - \frac{3}{2hb} \quad +2+1 \quad \dots\dots (i) \\ J_{cc'}M_{cc'} &= -2\lambda - (2+2\mu) - \left(\frac{2}{hb} + \frac{1}{hc}\right) +2+0 \quad \dots\dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

但  $\lambda = J_{bc}/J_{ab}$ ,  $\mu = J_{bc}/J_{bb'}$ ,  $\delta =$  格點水平變位

$$J = \frac{l}{6EI}, \quad p' \text{ 及 } p'' : \text{式 (21) 参照}$$

構造及び載荷が左右對稱なる状態では  $\delta = 0$  であるが然らざる状態では解法に残された1つの條件として水平層に關する剪斷力平衡式が存する。

$\sum Q_{bb'}$  を格間  $bc$  に關する水平剪斷力とすれば、格間  $cc'$  に關する水平剪斷力  $\sum Q_{cc'}$  の形式は、

$$\sum Q_{cc'} = \sum Q_{bb'} + Q_{cc'} = \sum Q_{bb'} + \frac{3}{2hcJ_{cc'}} \left( J_{cc'}M_{cc'} - \frac{1}{3hc} \delta \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

但  $J_{cc'}M_{cc'}$ : (15) 式に於ける値

斯くして (15) 式によつて各構材の未知力算出の形式が表はされ、(16) 式によつて基本不定力の算出の條件式が與へられる

計算

圖-12 に於て (15) 式に従ひ  $M_{10}$  (假想)  $M_{11}$  及び  $\delta$  を基本不定量に採る。各構材の剛比が1であるから  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  を與へ格點 1 と 2 に關し相對方程式の基本形を作り、引續き代入法により中央格點 4 まで計算を進むれば次の如くなる

$$\left. \begin{aligned} JM_{10} & \quad JM_{11} \cdot \frac{1}{h} \delta & \quad p_{12}' + p_{12}'' \\ JM_{21} &= -2 & -3.5 & -1.5 & +2+1 \\ JM_{32}' &= -2 & -4 & -3 & +2+0 \end{aligned} \right\} \dots\dots \text{相對方程式} \dots\dots\dots (iii)$$

圖-11. 例題 5 の架構に關する相對方程式誘導用の圖

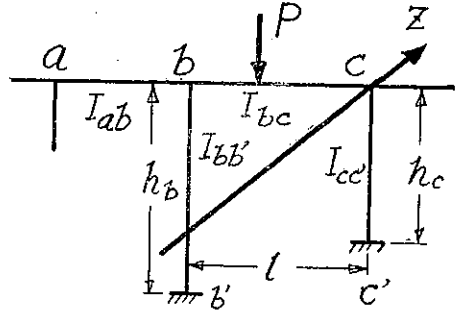
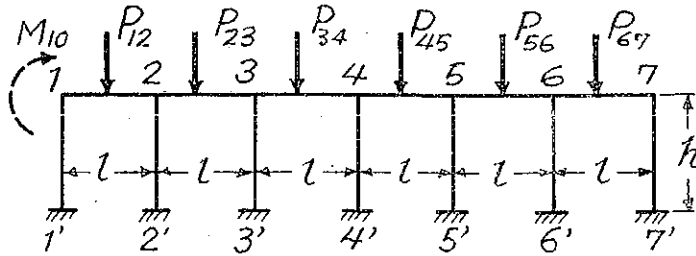




圖-12. 例題 5 の計算例にとれる架構



	$JM_{10}$	$JM_{11}'$	$\frac{1}{h}\delta$	$p_{12}' + p_{12}''$	$p_{23}' + p_{23}''$	$p_{34}' + p_{34}''$	
$JM_{22} = 0$		21	12	-11 - 2)	+ 2 + 1)		} \dots\dots\dots (iv)
$JM_{33}' = 0$		31	12	-12 - 2)	+ 2 + 0)		
$JM_{43} = 0$	-122.5	-67.5	+64 + 11)	-11 - 2)	+ 2 + 1)		} \dots\dots\dots (v)
$JM_{44}' = 0$	-134	-75	+70 + 12)	-12 - 2)	+ 2 + 0)		

構成が中央 44' 線に關し對稱であるから荷重を正對稱と逆對稱とに分割する。

1) 正對稱 (半荷重量に就て)

周邊條件  $M_{44}' = 0$  ( $\delta = 0$ ) を與ふれば計算式 (v) より直ちに半荷重に關する  $M_{11}'$  の値を定め得る。

$$JM_{11}' = \frac{1}{2 \times 134} \{70 + 12\}_{12,67} - 12 - 2)_{23,56} + 2 + 0\}_{31,45} \dots\dots\dots (I)_1$$

但  $70 + 12\}_{12,67} = 70 p_{12}' + 12 p_{12}'' + 70 p_{67}' + 12 p_{67}''$ . 以下同様

2) 逆對稱 (半荷重量)

周邊條件  $\sum M_i = 0$  及び (16) 式による  $\sum Q_i = 0$  を表はす次の 2 つの式を解けば、

$$JM_{11}' \cdot \frac{1}{h} \delta \quad p' + p''$$

$$\left. \begin{aligned} -379 \quad -210 \quad 198 + 34\}_{12} \quad -34 - 6\}_{23} \quad + 6 + 2\}_{34} &= 0 \\ -141 \quad -89 \quad 75 + 12\}_{12} \quad -12 - 3\}_{23} \quad + 3 + 0\}_{34} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore JM_{11}' = \frac{1}{2 \times 4 \cdot 121} \{+1872 + 506\}_{12,67} - 506 + 96\}_{23,56} - 96 + 178\}_{31,45} \dots\dots\dots (I)_2$$

$$\frac{1}{h} \delta = \frac{1}{17} \{+507 - 246\}_{12,67} + 246 - 291\}_{23,56} + 291 - 282\}_{31,45} \dots\dots\dots (II)$$

但  $+1872 + 506\}_{12,67} = 1872 p_{12}' + 506 p_{12}'' - (1872 p_{67}' + 506 p_{67}'')$ , 以下同様

(I)<sub>1</sub> + (I)<sub>2</sub> と (II) の結果より、全荷重に對する解答が次の如く求まる。

	$p_{12}'$	$p_{12}''$	$p_{23}'$	$p_{23}''$	$p_{34}'$	$p_{34}''$	$p_{45}'$	$p_{45}''$
$JM_{11}' = +488.3 + 106.17 - 106.17 + .004,18 - .004,18 + .021,6 - .021,6 + .019,1$								
$\frac{1}{h} \delta = +.061,5 - .029,85 + .029,85 - .035,3 + .035,3 - .034,2 + .034,2 - .035,3$								
	$p_{67}'$	$p_{67}''$	$p_{67}'$	$p_{67}''$				
$-019,1 + 016,6 - 016,6 + 034,06 \dots\dots\dots (I)$								
$+ .035,3 - .029,85 + .029,85 - .061,5 \dots\dots\dots (II)$								

例題 6.

鉸節トラス解法への應用。

兩端鉸節の單材  $bc$  に関する彈性方程式は、既に述べた如く、 $m_b = m_c = 0$  ならしむる形式に於て表はされるのであるが、こゝに 1 つの應用法として  $bc$  の鉸節を通る補助の  $z$  線を以て  $bc$  の一般彈性式に對し條件的消去法を施し  $m_b, m_c$  の存する形式に於てその彈性式を表はし、更に  $bc$  に関する靜力解式をそれより誘出するものとする。

圖-13 に示す如く、 $bc$  に就て任意の位置に於ける  $z$  線、 $b$  を通る任意の  $z'$  線及び  $c$  を通る任意の  $z''$  線を假定し夫々に關する  $bc$  の一般彈性式を表せば、

$$(2m_b + m_c)JM_{bc} - (m_b + 2m_c)JM_{cb} + m_b FN_{bc} = m_b \theta_b - m_c \theta_c + z_b - z_c \dots\dots\dots (i)$$

$$(0 + m_c')JM_{bc} - (0 + 2m_c')JM_{cb} + m_c' FN_{bc} = 0 - m_c' \theta_c + z_b' - z_c' \dots\dots\dots (ii)$$

$$(2m_b'' + 0)JM_{bc} - (m_b'' + 0)JM_{cb} + m_b'' FN_{bc} = m_b'' \theta_b - 0 + z_b'' - z_c'' \dots\dots\dots (iii)$$

こゝに角  $B$  及  $C$  を  $z'$  線及び  $z''$  線が  $bc$  方向の右側に於て、 $bc$  となす内對角とすれば、

$$m_c' = \pm l \sin B, \quad m_c'' = \mp l \cos B; \quad m_b'' = \pm l \sin C', \quad m_b''' = \mp l \cos C'$$

但 複符號： 上號と上號，下號下號とが對應

式 (i) の形式をそのままとし、それに対し (ii) に  $m_c/m_c'$  を乗じたもの及び (iii) に  $m_b/m_b''$  を乗じたものにより總ての  $M$  及  $\theta$  を消去すれば次式 (iv) が得られる。

$$(m_b \cot C' + m_c \cot B + m_{bc}) FN_{bc} = \delta \dots\dots\dots (iv)$$

$$\text{但 } \delta = -\frac{m_b}{m_b''} (z_b'' - z_c'') - \frac{m_c}{m_c'} (z_b' - z_c') + z_b - z_c$$

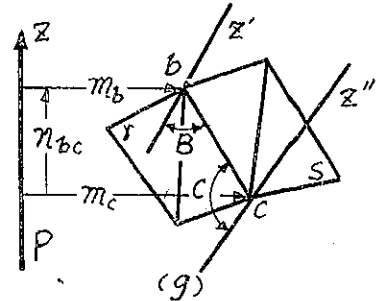
本式は任意の  $z$  線に関する座標を係數とする形式で表はした軸力彈性式であるが、2 つの  $z'$  線及び  $z''$  線の交點  $g$  をとすれば  $g$  點を通る  $z$  線に關しては式の左邊が常に零となる。即ち  $g$  點はこの場合特定の中立線  $z'$  線及び  $z''$  線の交點として與へられた彈性中立點に當る。而して式の左邊が零となることに就ては次の如く言へる。(ii) 式と (iii) 式とを組合せた形式は交點  $g$  を通る新なる座標線にて表はされた新なる彈性式となるから、この新なる彈性式との消去計算により導かれた (iv) 式に關する  $z$  線をして  $g$  點を通らしむることはこの新座標線に  $z$  線を一致せしむることになり式が消失するものと言ふことが出来る。こゝではこの證明計算を省略し、また (iv) 式を以てする彈性解法を考へない。

今トラスの任意部分の平衡状態に於て  $bc$  上の  $N_{bc}$  が任意の力  $P$  によつて惹起されたものとすれば、 $z$  線をしてその  $P$  上に沿ふて假定することにより、 $z$  線上の假想力  $P=1$  によつては  $bc$  上に  $N_{bc}/P$  が生ずるものとされるから、このとき  $bc$  に與へられ得る仕事の等式  $FN_{bc}^2/P = \delta$  を上 (iv) 式に代置することにより

$$N_{bc} = \frac{1}{l_{bc}} l' (m_b \cot C' + m_c \cot B + m_{bc}) \dots\dots\dots (v)$$

本式に於ては既に彈性條件の項が消去されてあり、その  $P$  と  $N$  との關係及び  $g$  點が中立點なる状態より、(v) 式は力のモーメントに關する平衡條件を他の形式を以て誘導せるものなることが推定される。故に  $N_{bc}$  が構造部分の平衡境界内に作用する  $i$  個の力群  $P_1 \dots P_i$  により惹起されるものとすれば、それに対し上 (v) 式を累加適用して、

圖-13. 鉸材  $BC$  の軸力式 (17) 誘導に關する圖



$$N_{bc} = \frac{1}{l_{bc}} \sum^i \{ P(m_i \cot C' + m_c \cot B + n_{bc}) \}$$

$$= \frac{1}{l_{bc}} \{ \cot C' (\sum^i P m_i) + \cot B (\sum^i P m_c) + (\sum^i P n_{bc}) \} \dots \dots \dots (17)$$

但 B, C': 仮定の中立点 g を通る gb 及び gc 線が bc 方向となす bc の右側内対角

こゝに序列 bc を cb に採れば、角 B 及び C' は cb の右側内対角になるも夫々の P 及び c 線の同じ位置に對しては  $N_{bc} = N_{cb}$  (規約により正值は軸壓力) となり同じ數値で算出される。

實用には g 點は平衡關係に於ける未知力の交點或は無限大距離に選定されることは言ふまでもなく、また P は一般に格點荷重、格點反力或は餘材が存する場合にはその軸力に採らるゝから、例へば圖-13 の三角連接體に於て 2 つの格點 r, s を通り軸力  $N_{rs}$  を生ずべき餘材 rs が存し、それによつて構材 bc に生ずる軸力を  $N_{bc}^o$ 、bc の既知固有軸力を  $N_{bc}'$ 、その總和を  $N_{bc}$  とすれば、

$$N_{bc} = N_{bc}' + N_{bc}^o = N_{bc}' + \frac{1}{l_{bc}} (m_b \cot C + m_c \cot B + n_{bc}) N_{rs} \dots \dots \dots (vi)$$

従つて  $N_{rs}$  の影響する rs 以外の k 個の構材群の連接體に對し rs を通る z 線により次の弾性式が成立される。

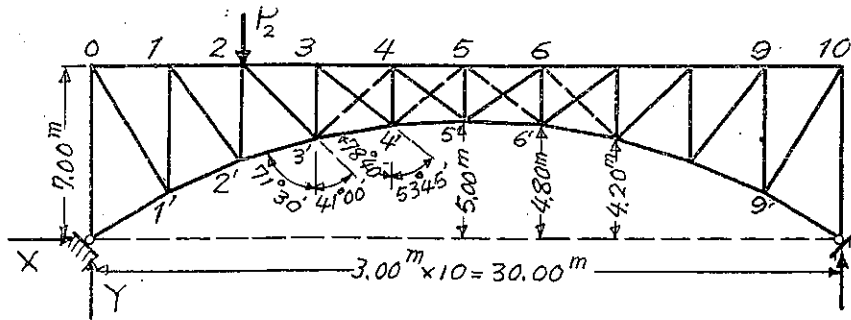
$$\sum^k l P N_{bc} N_{bc}^o + l P N_{rs} = 0 \dots \dots \dots (vii)$$

本 (vii) 式は言ふまでもなく Castigliano 定理等による周知の形式であつて、こゝでは同じことを單に z 線に關して述べたに他ならないのである。

計算例

圖-14 は下弦の格點が左支點を原點とする曲線  $y = (1/45)(30-x)x$  にて示さるゝ鉸節トラスに就て、本計算に要する部分の寸法を記入せるものとす。荷重  $P_2$  による腹材 3'4' 及 4'5' の各軸力を (17) 式にて算出すること。

圖-14. 例題 6 の計算用トラスの圖



〔解〕

腹材 3'4' と 4'5' を餘材と假定する。

i)  $N_{34}'$  の計算式

腹材 3'4' を載る構造左部分の平衡に於て、3'4' に關する中立點を上弦 34 と下弦 3'4' との交點に假定する。

$$\cot \angle 234' = \cot(2\pi + 53^\circ 45') = -1.364, \quad \cot \angle 34'3' = \cot 47^\circ 35' = 0.914$$

餘材 3'4' 上にとれる z 線に關する 3'4' の m, n の値は

$$m_3 = -l_{34} \sin 43^\circ = -2.046^m, \quad m_4' = l_{44}' \sin 47^\circ = 1.609, \quad l_{34}' = 3.72$$

$$n_{34}' = l_{34} \sin 47^\circ - l_{44}' \sin 43^\circ = 0.694$$

次に  $X, Y, P$  上に夫々假定せる  $\circ$  線に関する  $3'4' > m, n$  の値は計算するまでもなく、圖上距離を直接参照して知られるから (17) 式より、

$$\begin{aligned} N_{34}' &= \frac{1}{8.72} \{ -1.364(1.609 N_{3'4} - 4.80 X + 12.0 Y - 6.0 P_2) \\ &\quad + 0.914(-2.046 N_{3'4} - 7.0 X + 9.0 Y - 3.0 P_2) \\ &\quad + 0.694 N_{3'4} + 3.0 X - 2.2 Y + 2.2 P_2 \} \\ &'' = -0.906 N_{3'4} + 0.846 X - 2.780 Y + 2.054 P_2 \end{aligned}$$

### ii) $N_{4'4}$ の計算式

$4'4$  を載る平衡境界線をして弦材  $3'4$  及び  $4'5'$  を載らしめ、 $3'4$  及び  $4'5'$  を中立線としてその交点を假定する。

$$\cot \angle 4'45 = 0, \quad \cot \angle 44'3' = \cot 86^\circ 10' = \frac{2}{30}$$

餘材  $3'4$  上の  $\circ$  線に關し、 $m$  (不要),  $n_{4'4} = l_{4'4} \cos 47^\circ = 1.5$

$$'' \quad 4'5 \quad '' \quad , \quad m_4 = -l_{4'4} \sin 53^\circ 45' = -1.774, \quad n_{4'4} = l_{4'4} \cos 53^\circ 45' = 1.3$$

$$\begin{aligned} \therefore N_{4'4} &= \frac{1}{2.20} \left\{ \frac{2}{30} (0 \times N_{3'4} - 1.774 N_{4'5} - 7.0 X + 12.0 Y - 6.0 P_2) + 0 \right. \\ &\quad \left. + 1.50 N_{3'4} + 1.30 N_{4'5} + 0 \times X + 2.20 Y - 2.20 P_2 \right\} \\ &'' = 0.682 N_{3'4} + 0.587 N_{4'5} - 0.212 X + 1.363 Y - 1.181 P_2 \end{aligned}$$

$$\text{但 } Y = \frac{4}{5} P_2$$

上の各計算式に於て  $X, N_{3'4}, N_{4'5}$  は何れも餘力であるが、全構の解法に就ての各餘力による  $N^\circ$  に當る各係數値は夫々計算式中に含まれてある。

## 7. 形状及荷重係數

彈性方程式 (5) に於ける形状係數及び荷重係數  $J, K, L, q$  の數値は一般に次の積分形で表はされるから必要に應じ次の (18) 式に基いて各種の幾何學形に關する係數形を準備すればよいのであるが、積分計算の困難なる不規則形状に對しては (19) 式に示す如き縦横距の形式を採り得るのである。次に (20) 式以下によつて本文例題に使用せる種類の各係數を記載するが、何れの係數も構材  $bc$  の各端の剛節或は鉸節にかゝはらない形である。

### 1. 基本積分形

$$J_{bc}'' = \frac{1}{l^2} \int \{ (l-x)^2 d\omega_M + \sin^2 \alpha d\omega_N + \cos^2 \alpha d\omega_Q \}$$

$$J_{bc}' = \frac{1}{l^2} \int \{ x(l-x) d\omega_M - \sin^2 \alpha d\omega_N - \cos^2 \alpha d\omega_Q \} = J_{cb}' = J$$

$$J_{cb}'' = \frac{1}{l^2} \int \{ x^2 d\omega_M + \sin^2 \alpha d\omega_N + \cos^2 \alpha d\omega_Q \}$$

$$K_{bc} = \frac{1}{l^2} \int \{ -(l-x)y d\omega_M - \sin \alpha \cos \alpha d\omega_N + \sin \alpha \cos \alpha d\omega_Q \}$$

$$K_{cb} = \frac{1}{l^2} \int \{ -xy l d\omega_M + \sin \alpha \cos \alpha d\omega_N - \sin \alpha \cos \alpha d\omega_Q \}$$

$$I_{bc} = \frac{1}{l^2} \int_l^c \{y^2 d\omega_N + \cos^2 \alpha d\omega_N + \sin^2 \alpha d\omega_Q\}$$

但  $d\omega_N = \frac{ds}{EI}$ ,  $d\omega_N = \frac{ds}{EA}$ ,  $d\omega_Q = \frac{ds}{kGA}$ ,  $\int = \int_b^c$

縦方向の荷重  $P_y$  に関して,

$$q_{bc}'' = \{(l-x_0)(J')_{x_0} + x_0(J_{bc}'')_{x_0}\} P_y$$

$$q_{bc}' = \{(l-x_0)(J_{cb}'')_{x_0} + x_0(J')_{x_0}\} P_y$$

$$q_{bc}^k = \{(l-x_0)(K_{cb})_{x_0} + x_0(K_{bc})_{x_0}\} P_y$$

横方向荷重  $P_x$  に関して,

$$q_{bc}'' = \{-y_0(J')_{x_0} + y_0(J_{bc}'')_{x_0} + l(K_{bc})_{x_0}\} P_x$$

$$q_{bc}' = \{-y_0(J_{cb}'')_{x_0} + y_0(J')_{x_0} + l(K_{cb})_{x_0}\} P_x$$

$$q_{bc}^k = \{-y_0(K_{cb})_{x_0} + y_0(K_{bc})_{x_0} + l(L)_{x_0}\} P_x$$

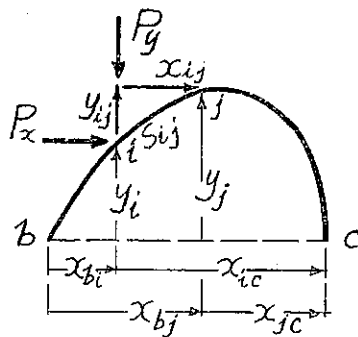
一般に  $J_{bc}$ ,  $J_{cb}$ ,  $q_{bc}$  を以て次の形を表はす。

$$3J_{bc} = J' + J_{bc}'', \quad 3J_{cb} = J' + J_{cb}'', \quad 3q_{bc} = q_{bc}' + q_{bc}'' \quad \text{以上} \dots\dots\dots (18)$$

こゝに  $(J')_{x_0}$ ,  $(J)_{x_0}$ ,  $\dots$  は  $J' \dots$  の上記積分形に於て載荷点  $x_0$  の左区間  $b \sim x_0$  及び右区間  $x_0 \sim c$  に関する計算部分を示す。故に荷重係数計算のためには形状係数を載荷点  $x_0$  に関し左右 2 部分に計算しておけば便利である。

2. 不規則形状に関する縦横距形

積分計算の困難な形状断面に対しては、**図-15** の如く、材軸  $bc$  を適切なる  $b \sim 1 \sim 2 \dots ij \dots c$  に分割し、基本積分形 (18) に従ひ各區分に就き計算せるものを總計して表はすことが出来る。**図-15. 不規則形状に対する形状及荷重係数算定の圖**



$$J_{bc}'' = \frac{1}{lbc^2} \sum \frac{S_{ij}}{2EI_{ij}} \left\{ x_{ic}^2 + x_{jc}^2 - \frac{1}{3} x_{ij}^2 + 2(y_i^2 \omega_N + x_{ij} \omega_Q) \right\}$$

$$J' = \frac{1}{lbc^2} \sum \frac{S_{ij}}{2EI_{ij}} \left\{ x_{bi} x_{ic} + x_{bj} x_{jc} + \frac{1}{3} x_{ij}^2 - 2(y_i^2 \omega_N + x_{ij} \omega_Q) \right\}$$

$$J_{cb}'' = \frac{1}{lbc^2} \sum \frac{S_{ij}}{2EI_{ij}} \left\{ x_{bi}^2 + x_{bj}^2 - \frac{1}{3} x_{ij}^2 + 2(y_j^2 \omega_N + x_{ij} \omega_Q) \right\}$$

$$K_{bc} = \frac{1}{lbc^2} \sum \frac{S_{ij}}{2EI_{ij}} \left\{ -x_{ic} y_i - x_{jc} y_j + \frac{1}{3} x_{ij} y_{ij} - 2x_{ij} y_j (\omega_N - \omega_Q) \right\}$$

$$K_{cb} = \frac{1}{lbc^2} \sum \frac{S_{ij}}{2EI_{ij}} \left\{ -x_{bi} y_i - x_{bj} y_j - \frac{1}{3} x_{ij} y_{ij} + 2x_{ij} y_j (\omega_N - \omega_Q) \right\}$$

$$L = \frac{1}{lbc^2} \sum \frac{S_{ij}}{2EI_{ij}} \left\{ y_i^2 + y_j^2 - \frac{1}{3} y_{ij}^2 + 2(x_{ij}^2 \omega_N + y_{ij}^2 \omega_Q) \right\}$$

但  $\omega_N = \frac{1}{S_{ij}^2} \frac{I}{A}$ ,  $\omega_Q = \frac{1}{S_{ij}^2} \frac{EI}{kGA}$  以上  $\dots\dots\dots (19)$

各式の  $S_{ij}/2EI_{ij}$  は  $ij$  部分の  $3J_{ij}$  の値に當る。

荷重係数の値は載荷点を  $i$  とすれば  $x_0 = x_{0i}$ ,  $l - x_0 = x_{i0}$  として基本 (18) 式の形と同一に表はされる。

特に  $bc$  が對稱形なる場合、或は更にそれを等分せる場合などには各係数が簡単な級数様の形式で表はされる。

3. 變断面不對稱形直材

變断面の例として圖-16 の形状及び記號に於て断面高が直線的變化,

$$y = d_b + \frac{1}{l}(d_c - d_b)x$$

をなすものを假定し、その任意断面に関する断面二次モーメント及び断面積が夫々

$$I = C_M b_0 y^2, \quad A = C_N b_0 y \quad \text{但 } C_M, C_N: \text{ 断面形に関する常數}$$

$$b_0: \text{ 断面幅}$$

なる如き形状で與へられ得るものとするとき、形状係数の計算値は次の形式で表はされる。

$$J_{bc}'' = \frac{l}{EC_M b_0 (d_c - d_b)^2} \left\{ -\frac{3d_b - d_c}{2d_b^2} + \left( \frac{1}{d_c - d_b} + \mu \frac{d_c - d_b}{l^2} \right) \log \frac{d_c}{d_b} \right\}$$

$$J' = \frac{l}{EC_M b_0 (d_c - d_b)^2} \left\{ -\frac{d_c - d_b}{2d_c d_b} - \left( \frac{1}{d_c - d_b} + \mu \frac{d_c - d_b}{l^2} \right) \log \frac{d_c}{d_b} \right\}$$

$$J_{cb}'' = \frac{l}{EC_M b_0 (d_c - d_b)^2} \left\{ -\frac{3d_c - d_b}{2d_c^2} + \left( \frac{1}{d_c - d_b} + \mu \frac{d_c - d_b}{l^2} \right) \log \frac{d_c}{d_b} \right\}$$

$$L = \frac{1}{EC_M b_0 l^2 (d_c - d_b)} \cdot \log \frac{d_c}{d_b}$$

$$3J_{bc} = J' + J_{bc}'' = \frac{l}{2EC_M b_0 d_c d_b^2} = \frac{l \cdot d_b}{2EI_b d_c}$$

$$3J_{cb} = J' + J_{cb}'' = \frac{l}{2EC_M b_0 d_c^2 d_b} = \frac{l}{2EI_b} \left( \frac{d_b}{d_c} \right)^2$$

以上……………(20)

但  $\mu = \frac{C_M}{C_N} \frac{E}{kG}$ ,  $I_b: b$  端断面二次モーメント

$$\log \frac{d_c}{d_b} = 2 \left\{ \frac{d_c - d_b}{d_c + d_b} + \frac{1}{3} \left( \frac{d_c - d_b}{d_c + d_b} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{d_c - d_b}{d_c + d_b} \right)^5 + \dots \right\}, \quad \left( \frac{d_c - d_b}{d_c + d_b} > 0 \right)$$

4. 等断面直材

$EI, EA, GA$  を何れも定數として各係数の形が簡単に表はされる。周知の荷重係数  $q', q''$  と共に  $p', p''$  もここに記載する (以下載荷点を  $x$  で表はす)。

$$J = \frac{l}{6EI}$$

$$J' = J(1 - \mu q), \quad J'' = J(2 + \mu q), \quad L = \frac{1}{lEA} = \frac{1}{l} F = J \mu N$$

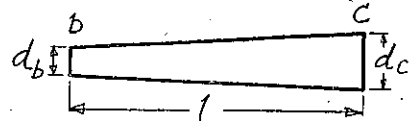
但  $F = \frac{1}{EA}$ ,  $\mu q = \frac{6}{l^2} \frac{EI}{kGA}$ ,  $\mu N = \frac{6}{l^2} \frac{l}{A}$

$$q' = \frac{1}{l^2} x(l^2 - x^2) J P_y, \quad q'' = \frac{1}{l^2} x(l-x)(2l-x) J P_y, \quad q = \frac{1}{l} x(l-x) J P_y$$

$$p' = \frac{1}{l^2} x(l-x)^2 J P_y, \quad p'' = \frac{1}{l^2} x^2(l-x) J P_y$$

参照:  $q' = 2p'' + p'$ ,  $q'' = 2p' + p''$ ,  $q = \frac{1}{3}(q' + q'') = p' + p''$

圖-16. 形状係數算定に関する變断面直材の一例



} ……………(21)

$$3p' = 2q'' - q', \quad 3p'' = 2q' - q''$$

5.  $I \cos \alpha$  が一定なる拋物線拱  $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$

$I \cos \alpha = I_0$  ( $I_0$ : 假定) 及び  $ds \cos \alpha = dx$  を興へて得らるゝ周知の形式であつて、次に  $N$  及び  $Q$  の變形効果を無視するときの各係数を掲げる。

$$J' = J, \quad J'' = 2J, \quad K = -2 \frac{f}{l} J, \quad L = \frac{16f^2}{5l^2} J; \quad J = \frac{l}{6fEI_0}$$

縦荷重  $P_y$  に対し、

$$q' = \frac{1}{l^2} x(l^2 - x^2) J P_y$$

$$q'' = \frac{1}{l^2} x(l-x)(2l-x) J P_y$$

$$q^k = -2 \frac{f}{l^3} x(l-x)(l^2 + lx - x^2) J P_y$$

横荷重  $P_x$  に対し、

$$q' = -\frac{2f}{l^3} (l-x)(l^2 - l^2x + lx^2 + 3x^2) J P_x$$

$$q'' = -\frac{2f}{l^3} (l-x)(l^3 - 3l^2x + 7lx^2 - 3x^3) J P_x$$

$$q^k = \frac{8f}{5l^3} (l-x)(2l^4 - 3l^3x + 2l^2x^2 + 12lx^3 - 8x^4) J P_x \quad \text{以上} \dots \dots \dots (22)$$

$J'$ ,  $J''$  及び  $P_y$  に関する  $q'$ ,  $q''$  は等断面直材のものと同じ形なるは周知のことである。