

論 說 報 告

第 27 卷 第 3 號 昭和 16 年 3 月

中空壓縮材の挫屈に關する理論的研究 (1, 2)

會 員 横 田 周 平*

要 旨 中空壓縮材と謂ふ新しい名稱で統一される事の出来る組合せ壓縮材或は管柱等は、その内部的機構の如何に依り挫屈した場合、その状態に安定、不安定の差別が生じ、此れは結局壓縮材としての安定、不安定を決定するものである。壓縮材として安定なる爲には 1 つの條件が満足されなければならない。此の條件より組合せ壓縮材の場合には綾片が、管柱の場合にはその肉厚が決定される。

本論文に於いては上記の問題を中心として之に關聯する諸問題を理論的に考究せんとするものであるが、全篇としては可成り長くなるので先づ最初の 2 編を發表する事にした。此の 2 編が著者の理論的研究の根柢をなすものである。

目 次

- 1. 壓縮材の挫屈に關する基本的考察
 - 1. 壓縮材の挫屈を論ずる場合の基礎方程式
 - 2. 微分方程式の基本的解
 - (i) 通常行はれてゐる解
 - (ii) 2 つの境界條件と長さの條件を厳密に入れた場合の解
 - (iii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合の解
 - 3. 限界荷重、挫屈状態の安定、不安定並びに中空壓縮材に關する新しい問題
 - (i) 限界荷重
 - (ii) 挫屈状態の安定、不安定
 - (iii) 中空壓縮材に於ける新しい問題
- 4. 壓縮材の挫屈に對する其の他の考察
- 2. 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導
 - 1. 中空壓縮材の曲げに對する抵抗
 - 2. 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導
 - 3. 基礎方程式の解と不安定なる挫屈を起さざる爲の條件
 - 4. 要約

1. 壓縮材の挫屈に關する基本的考察

本篇は壓縮材の挫屈に關する基本的問題を検討し、著者の中空壓縮材の挫屈に對する考へ方の根柢を明らかにするものである。その主張とする處は、從來餘り重要視せられなかつた挫屈してからの状態の安定、不安定の問題が、中空壓縮材の場合には重大なる意義を持つて來るとする點である。

壓縮材の挫屈の解析的研究に於いてはその撓み曲線に對する微分方程式が出發點となる。勢力式方法に依つて取扱ふ場合に於いても多かれ少かれ撓み曲線に對する微分方程式が關聯して來てゐる。従つて此の撓み曲線に對する微分方程式は、壓縮材の挫屈を論ずる場合の基礎方程式である。

1. 壓縮材の挫屈を論ずる場合の基礎方程式

壓縮材に對する基礎方程式は、一般に良く知られてゐる様に次の形で與へられてゐる。

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0 \dots\dots\dots(1)$$

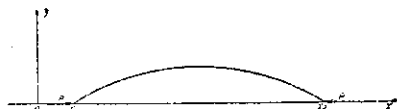
E : 材料の彈性係數

I : 壓縮材の斷面の慣性モーメントで一般には x の函數である

P : 中心軸荷重

座標軸は圖-1 の様に採る。

圖-1.



兩端鉸支持の場合には (1) 式で充分なのであるが兩端を固定した場合に於ては (1) 式では含み切れない場合が

* 内務技師 工學士 内務省土木試験所

生ずる。此の事實に就いては稻田博士が土木學會誌第 20 卷第 11 號(昭和 9 年 11 月)“長柱の挫屈と之に及ぼす彈性橫抵抗の影響並びに鐵道軌道の張出しに關する新考察”に於いて評論されてゐる。稻田博士は次の形ちの基礎方程式から出發されてゐる。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

等斷面の壓縮材に於いては (2) 式が最も一般的基礎方程式となるが、變斷面壓縮材の場合をも含ましむるならば形ちとしては次の如くなるであらう。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

著者は壓縮材の挫屈を論ずる場合の最も一般的なる基礎方程式として (3) 式を挙げ様と思ふ。

(3) 式は梁の橫振動に對する基礎方程式に類似して居て面白く思はれる。梁の橫振動に對する式は次の如き式の形ちを有する。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

柱の限界荷重の求め方と梁の振動周期の求め方は實際に於いても亦全く同様である。

形ちとしては (3) 式が最も一般的であるが、實際問題としては境界條件を仔細に檢討して其れに適合する如く (1) 式を變更し、之より出發する方が便利である。以下の所論に於いても (3) 式迄遡る事はしないであらう。

(3) 式で基礎方程式としては完備してゐるかの如く見えるが、撓み曲線の根本に立歸つて見れば尙問題が残つてゐる。即ち數字的には曲率は $\frac{d^2 y}{dx^2} / \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$ で表はさるべきであるが、撓みは小なるものとして 1 に對して $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ を省略し、簡單に $\frac{d^2 y}{dx^2}$ としてゐるのである。 $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ の項を省略しない場合には (1) 式は次の如くなる。

$$EI \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} + Py = 0 \dots\dots\dots (4)$$

同様に (3) 式も正しくは括弧内の $\frac{d^2 y}{dx^2}$ を $\frac{d^2 y}{dx^2} / \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$ で置き換へなければならぬ。 $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ を省略する事が如何なる影響を與へるかに就いては後章に之を明らかにするであらう。

2. 微分方程式の基本的解

(i) 通常行はれてゐる解

(1) 式に於いて I は一般には x の函数であつて、此の線型微分方程式の一般解は

$$y = AF_1(x) + BF_2(x)$$

の形ちで表はされる。茲に A と B とは積分常數である。微分方程式の解の順序としては、次に 2 個の境界條件から A, B なる 2 個の積分常數を決定しなければならないのであるが、壓縮材の兩端の y 坐標が零であると謂ふ 2 つの條件を入れ、 A, B が同時に零になる事はない(挫屈したものである故)と考へれば、 A, B が完全には決定されずに、却つて $F_1(x)$ と $F_2(x)$ の間に或る關係式が生ずる。此れは (1) 式に戻つて考へれば E, I, P 及び長さ L の間を關係づける事になつて限界荷重が決定されるのである。

此れは境界條件の取り方が結局不適當な爲にかゝる結果を生ずるのであつて、此の點に就いては次節に詳論する。又以上の様にして解いた結果は、限界荷重に於いて挫屈する事を示してゐるが、正確には次節以下に示す如く限界荷重を越えて初めて挫屈するものである。

之を具體的に説明する爲に兩端鉸支持の等斷面長柱の場合(1 次挫屈)に就いて考へれば、通常取扱に於いては (1) 式は良く知られてゐる様に次の如く解かれる。

$$y = A \sin \frac{\pi}{L} x \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{但し } P = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

(5) 式の如き形ちの解に依つて撓屈現象を解釋する時は次の如くなる。

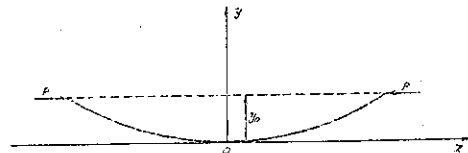
壓縮材が撓屈する爲には限界荷重以外の軸荷重は取り得ない。

A が不定の儘残されてゐるのであるから、限界荷重に對して無数の撓屈形が存在する。従つて (5) 式より判斷すれば、撓屈してからの状態は中立の平衡状態と見做さるべきである。通常行はれてゐる解に従つて、壓縮材の撓屈現象を解釋すれば上述の如くであるが、2 つの境界條件及び此れとは別に長さの條件とを嚴密に入れて基礎方程式を解けば、撓屈現象に對する解釋は又自から異つて来る。而して此の方がより正しい解釋である事は解き方がより嚴密である事より見て間違ひないであらう。

(ii) 2 つの境界條件と長さの條件とを嚴密に入れた場合の解

壓縮材の中心線の中央を原點に取り、圖-2 の如く坐標軸を定めて計算を進める。坐標軸の取り方如何は問題の本質に何等變化を來すものではないが、積分常數を定めるべき 2 つの境界條件と壓縮材の長さの條件とは混同すべからざる別種の條件である事を示すには、此の方が好都合である。此の場合の基礎方程式は次の如くなる。

圖-2.



$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + P(y - y_0) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

y_0 は壓縮材の中央の張出し量であり、此の y_0 が常數として豫め基礎方程式に入つて來てゐる爲に、様子が非常に異つて来る。

$$\frac{EI}{P} = \alpha^2 \quad (\alpha \text{ は長さのデメンスionを有する})$$

と置き (6) 式を解けば

$$y = y_0 + A \sin \frac{x}{\alpha} + B \cos \frac{x}{\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\alpha} \cos \frac{x}{\alpha} - \frac{B}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha}$$

境界條件としては $x=0$ に於いて $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ の 2 つを用ふべき事は明瞭である。

$$\therefore A = 0, \quad B = -y_0$$

従つて

$$y = y_0 \left(1 - \cos \frac{x}{\alpha} \right) \dots\dots\dots (7)$$

以上に依つて 2 つの積分常數 A , B が決定せられ微分方程式 (6) に關する限り完全に解決されたのである。次に壓縮材の問題に立歸つて考へて見れば、長さの條件が残されてゐる。

(7) 式で $x = \frac{L}{2}$ に於いて $y = y_0$ とすれば、前節に於けると同様に α と L とを關係づけ、限界荷重が求められる。然しながら此の場合には、此れは積分常數を定むべき境界條件ではない事に注意すべきである。又一方壓縮材が既に張出してゐる形ちを前提としてゐる以上、かかる條件は不合理である事は明瞭である。

壓縮材の長さの條件は張出した形ちに於いて考へる事が正確であり、又最も自然である。

即ち

$$\frac{L}{2} = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dy = \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{x^2 + 2y_0y - y^2}{2y_0y - y^2}} dy \dots\dots\dots (8)$$

$$y = y_0(1-t), \quad 0 \leq \frac{y_0}{\sqrt{\alpha^2 + y^2}} = h < 1$$

と置換すれば

$$\frac{L}{2} = \frac{y_0}{h} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

これは第 2 種楕圓積分であつて

$$E(h) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 h^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{h^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{h^6}{5} \dots \right\}$$

と置けば (9) 式を得る。

$$\frac{y_0}{L} = \frac{h}{2E(h)} \dots \dots \dots (9)$$

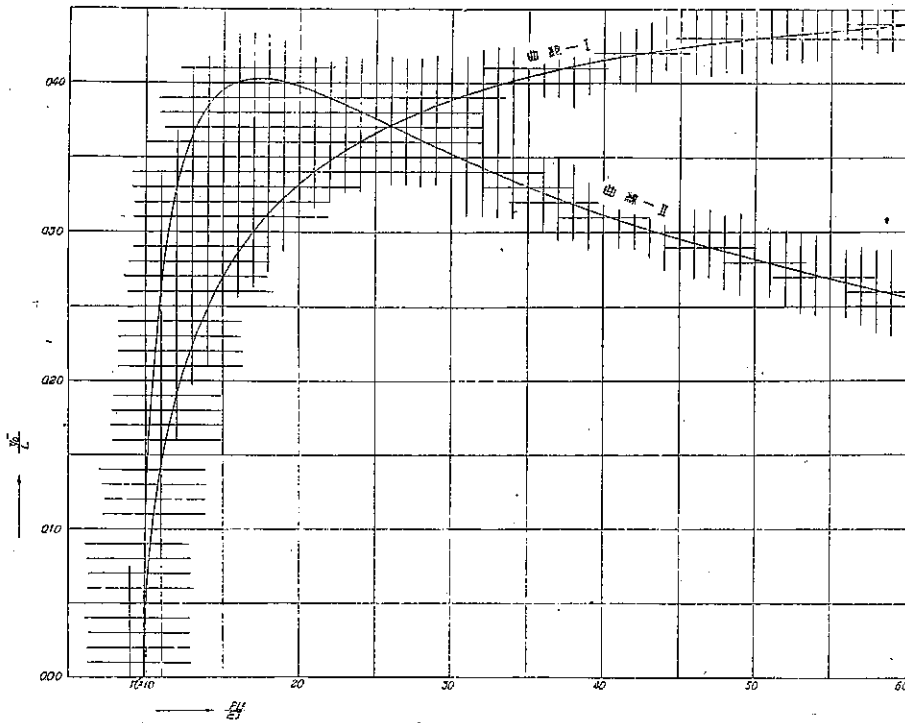
又 $\frac{y_0}{\sqrt{\alpha^2 + y_0^2}} = h$ なる関係式より P と h の関係式を導けば (10) 式を得る。

$$\frac{PL}{EI} = \frac{4E^2(h)}{1-h^2} \dots \dots \dots (10)$$

(9) 式と (10) 式とは同一関係式の 2 つの表現であるが、便宜的には h を媒介變數と見て P と y_0 の函數關係を示すものと見做し得る。

P と y_0 の關係は表-1 の如くでありグラフで表はせば 圖-3 曲線-I となる。

圖-3. $\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の關係



曲線-I: $EI \frac{d^2y}{dx^2} + P(y-y_0) = 0$ の場合

曲線-II: $EI \frac{d^2y}{dx^2} + P \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} (y-y_0) = 0$ の場合

以上の解き方に就いて見れば、積分常數の定め方、壓縮材の長さの條件の入れ方は合理的で疑問を挿む餘地はないであらう。此の解に依れば軸壓力 P が零から始まつて次第に増大し、限界荷重を越えて後に到る全領域に互り

表-1. $\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の関係 $\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$ を省略した場合)

h	$E(h)$	$\frac{PL^2}{EI}$	y_0/L
0.0000 000	1.5708	9.8696	0.0000
0.0871 557	1.5678	9.9073	0.0279
0.1736 482	1.5589	10.0230	0.0557
0.2588 190	1.5442	10.2232	0.0838
0.3420 201	1.5238	10.5184	0.1122
0.4226 183	1.4981	10.9292	0.1411
0.5000 000	1.4675	11.4859	0.1704
0.5735 764	1.4323	12.2293	0.2002
0.6427 876	1.3931	13.2417	0.2307
0.7071 068	1.3506	14.5920	0.2618
0.7660 444	1.3055	16.4995	0.2934
0.8191 520	1.2587	19.2626	0.3254
0.8660 254	1.2111	23.4688	0.3575
0.9063 078	1.1638	30.3327	0.3849
0.9396 926	1.1184	42.7705	0.4201
0.9659 258	1.0764	69.1833	0.4487
1.0000 000	1.0000	∞	0.5000

表-2. $\frac{PL^2}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の関係 $\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$ を省略しない場合)

h	$K(h)$	$\frac{PL^2}{EI}$	y_0/L
0.0000 000	1.5708	9.8696	0.0000
0.0871 557	1.5738	9.9074	0.0544
0.1736 482	1.5828	10.0210	0.1097
0.2588 190	1.5981	10.2157	0.1620
0.3420 201	1.6200	10.4476	0.2111
0.4226 183	1.6490	10.8768	0.2563
0.5000 000	1.6858	11.3677	0.2966
0.5735 764	1.7313	11.9896	0.3313
0.6427 876	1.7868	12.7706	0.3597
0.7071 068	1.8541	13.7507	0.3814
0.7660 444	1.9356	14.9862	0.3958
0.8191 520	2.0347	16.5600	0.4026
0.8660 254	2.1565	18.6020	0.4016
0.9063 078	2.3088	21.3222	0.3926
0.9396 926	2.5046	25.0921	0.3752
0.9659 258	2.7681	30.6495	0.3469
0.9848 078	3.1534	39.7757	0.3123
0.9961 947	3.8317	58.7277	0.2600
0.9998 477	5.4349	118.1526	0.1840
1.0000 000	∞	∞	0.0000

壓縮材の状態が説明される。

即ち圖-3 曲線-I に依つて見るに限界荷重より小なる P に對しては y_0 の實數値は存在し得ない。即ち限界荷重以下の軸壓力に對して捩屈の起り得ない事を示してゐる。又限界荷重に對しては $y_0=0$ であるから、矢張り未だ捩屈しない事が解り、限界荷重を越えた軸壓力に對して初めて y_0 が零ならざる實數値を有する様になる。

捩屈現象全般に對するより詳しい考究は次章に譲る事として、次に I. に對して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を小なりとして省略する事が如何なる影響を及ぼして居るかを明らかにしようと思ふ。

(iii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合の解

等断面壓縮材の場合には I に對して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略せずに解く事は目新しい事ではないのであるが、解き方の比較の爲に、又その省略が如何なる影響を及ぼして居るかを明らかにする意味で、計算過程を示さうと思ふ。

圖-2 の如く坐標軸を取る事とすれば捩み曲線に對する微分方程式は次の如くなる。

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + P(y-y_0) = 0$$

$$\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

或は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2}(y_0 - y) \dots \dots \dots (II)$$

$$\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{但し } \frac{1}{\alpha^2} = \frac{P}{EI}$$

此の 2 次微分方程式を解いた時に生ずる 2 つの積分常数を定むべき 2 つの條件は、前節 (ii) の場合と同様に $y=0$ に於いて $x=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ の 2 つである。壓縮材の兩端の位置は P の函數として表はされる筈である。

(II) 式の兩邊に $\frac{dy}{dx}$ を乗じて積分すれば、直ちに

$$-\frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\alpha^2} \left(y_0 - \frac{y^2}{2}\right) + c$$

$y=0$ に於いて $\frac{dy}{dx}=0$ なる條件より積分常數 c を定むれば

$$c = -1$$

$$\frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\alpha^2} (y^2 - 2y_0y + 2\alpha^2) \dots \dots \dots (12)$$

$$\pm dx = \frac{(y^2 - 2y_0y + 2\alpha^2) dy}{\sqrt{-y(y - 2y_0)(y^2 - 2y_0y + 4\alpha^2)}} \dots \dots \dots (13)$$

となり、(13) 式の形ちより見て此の積分は第 1 種、第 2 種の楕圓積分と初等函數の 3 つになる事が豫期される。

楕圓積分の標準形に導く爲に先づ次の如く變數の置換を行ふ。

$$y = y_0 \frac{\xi - 1}{\xi}, \quad dy = y_0 \frac{d\xi}{\xi^2}$$

此れを (13) 式に代入すれば

$$\pm dx = \frac{\{(2\alpha^2 - y_0^2)\xi^2 + y_0^2\}}{\sqrt{(\xi^2 - 1)\{(4\alpha^2 - y_0^2)\xi^2 + y_0^2\}}}$$

$$0 < \frac{4\alpha^2 - 4y_0^2}{y^2} = k^2 \quad \text{と置けば} \quad \frac{2\alpha^2 - y_0^2}{y_0^2} = \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{となる。}$$

従つて

$$\pm dx = \frac{\left(\frac{k^2-1}{2}\zeta^2+1\right)}{\sqrt{(\zeta^2-1)(k^2\zeta^2+1)}} y_0 \frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

更に $\sqrt{k^2\zeta^2+1} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{t}$ と置換すれば

$$\zeta^2 = \frac{(k^2+1)-t^2}{k^2t^2}, \quad dS = -\frac{k^2+1}{t^2\sqrt{(k^2+1)-t^2}} \frac{dt}{k}$$

$$\zeta^2-1 = \frac{(k^2+1)(1-t^2)}{k^2t^2}$$

となり、之等を上式に代入すれば

$$\pm \frac{dx}{y_0} = \frac{k^2-1}{2} \cdot \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)\{(k^2+1)-t^2\}}} + \frac{-k^2t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)\{(k^2+1)-t^2\}}}$$

$$0 < \frac{1}{k^2+1} = k^2 < 1 \quad \text{即ち} \quad 0 < k = \frac{y_0}{2c} < 1$$

と置けば

$$\pm \frac{dx}{y_0} = \frac{1-2h^2}{2h} \cdot \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}} + h(1-h^2) \frac{-t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)^3}}$$

となり、積分の範囲は夫々次の如くである。

$$\begin{aligned} y: & 0 \sim y_0 \\ \zeta: & 1 \sim +\infty \\ t: & 1 \sim 0 \end{aligned}$$

従つて第 1 象限に於いて積分する事とし、 $y=0$ の時 $x=0$ なる条件、即ち $t=1$ なる時 $x=0$ なる境界条件を含ましむれば次の式が成立する。

$$\frac{x}{y_0} = \frac{1-2h^2}{h} \int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}} + h(1-h^2) \int_t^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)^3}}$$

此の第 2 項を部分積分し、右邊全體を整頓すれば

$$\frac{x}{y_0} = -\frac{1}{2h} \int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}} + \frac{1}{h} \int_t^1 \frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{ht\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-h^2t^2}}$$

又 $h = \frac{y_0}{2c}$ なる關係式に依り、 y_0 の代りに α を導入すれば

$$\frac{x}{\alpha} = -\int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}} + 2 \int_t^1 \frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{2ht^2\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-h^2t^2}} \dots\dots\dots(14)$$

となり、即ち (13) 式の解は第 1 種、第 3 種の楕圓積分と初等函数で表はされた事になる。此の事は (13) 式の形よりして直ちに豫期された處であつた。

以上で (11) 式の微分方程式は形ちの上からは完全に解かれた事になる。然しながら (14) 式の内には軸荷重 P と最大撓み y_0 とが獨立に含まれてゐる。此の 2 つの量を結合する條件として壓縮材の長さの條件が残されてゐる點は前節 (ii) の場合と全く同様である。

即ち

$$\frac{L}{2} = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dy = \int_0^{y_0} \frac{2c^2 dy}{\sqrt{-y(y-2y_0)(y^2-2y_0y+4c^2)}}$$

前と同様に

$$y = y_0 \frac{\zeta-1}{\zeta}, \quad \sqrt{k^2\zeta^2+1} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{t}$$

と變換すれば

$$L = 2c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}} = 2c K(h)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{P}{EI} \text{ なるを以て}$$

$$\frac{PI^2}{EI} = 4K^2(h) \dots\dots\dots (15)$$

となり、又 $h = \frac{y_0}{2\alpha}$ なる關係式より次の如くなる。

$$\frac{y_0}{L} = \frac{h}{K(h^2)} \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{但し } K(h) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 h^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 h^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 h^6 + \dots\dots \right\}$$

(15), (16) 式は同一の關係式を書き換へたものであるが、便宜的に h を媒介變數と見做して $\frac{PI}{EI}$ と $\frac{y_0}{L}$ の關係を求むれば、表-2 或は圖-3 曲線-II の如くである。

$y_0 \rightarrow 0$ ならしむると $h \rightarrow 0$, $K(h) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となり $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ を得る。此れは Euler の限界荷重と一致する。 $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ より小なる P の値に對しては y_0 の實數値は存在しない。即ち Euler の限界荷重を越えて初めて壓縮材は曲がり始め、其の後荷重が増加するに従つて曲がり方が大きくなる。

以上の解析の結果を通じて撓屈現象を解釋すれば、それは本質に於いて (ii) の場合と全く同様である。即ち I に比して $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しても撓屈現象の考へ方に本質的な變化は入つて來ない。即ち壓縮材の長さの條件を嚴密に入れるか入れないかが重大な問題であつて、 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ の項を省略するかしないかは大きく問題とはならないのである¹⁾。本節の結果と (ii) 節の結果との差異は圖-3 の2つの曲線に依つて見れば明瞭である。限界荷重に於いては兩曲線は共通の切線を有し、其の近傍に於いては殆ど一致してゐるが、 P が大きくなるに従つて次第に離れ $P \rightarrow \infty$ に對しては、(ii) 節の結果 (曲線-I) に於いては $y \rightarrow \frac{L}{2}$ となるに對して、本節の結果 (曲線-II) に於いては、 $y \rightarrow 0$ となつてゐる。此の差異は $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略するかしないかに起因せるものである事は明瞭である。

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合に於いては、軸荷重が限界荷重を越えて増加するに従つて圖-4 の如き撓屈形を生じ遂に $y_0 \rightarrow 0$ となるが、 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ を省略しない場合には、撓屈形が正弦曲線となる爲 $P \rightarrow \infty$ では壓縮材が中央で折り重ねられた形ちになるのである。此の事は弾性の限界内で考へられる事

圖-4.



であるが實際の場合に於いては撓屈したならば、間もなく中央の斷面附近に於いて弾性限界を越えて仕舞ふであらうから、限界荷重を遠く離れてからの差異は重要な問題ではなくなる。

本章の結論としては次の如くである。

限界荷重を求むる事のみを目的とする場合には便宜的方法として、(i) 節に於ける如く取扱つても良いが、撓屈現象全般を解析的に説明しようとする時は、少くとも (ii) 節に於ける様に取扱はなければならない。従つて以下の議論を進める場合には、(ii) 節に於ける解を基本として進めようと思ふ。

3. 限界荷重、撓屈状態の安定、不安定並びに中空壓縮材に關する新しい問題

前章に於いて得られた基礎方程式の解を通じて限界荷重の意義、撓屈状態の安定、不安定に關する問題等撓屈現象の全般に互る考察を下し、更に進んで中空壓縮材に關しては撓屈状態の安定、不安定の問題が重大なる意義を有する事を指摘しようと思ふ。

(i) 限界荷重

(10) 式或は (15) 式を仔細に検討して見れば解る事であるが、 $\frac{PL^2}{EI}$ の値を $\pi^2 = 9.8696$ より小ならしむる h の實數値は存在し得ない。即ち Euler の限界荷重以下では壓縮材は曲がり得ない事が解析的に證明されてゐる。限

(1) 例へば Timoshenko 著 Theory of Elasticity, 仲・瀧川・久田共譯 p. 45, 13 節に於いて最大撓みが不定の儘残されるのは、曲率に對して正確な式を用ひないで近似式 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を用ひた爲であると明言してゐる。此れは明瞭な誤謬と云ふべきであらう。

界荷重さへ求むればそれで良いとする通常の取扱方に於いては、限界荷重以下の軸荷重に對して何故に挫屈し得ないかと問題は曖昧の儘放置されてゐる。勢力的に之を見ても限界荷重に達する迄は眞直ぐに壓縮された方が内働が小である事は簡単に實證される。軸荷重が限界荷重を越えると壓縮材は曲がり始める。此處で注意すべきは限界荷重では未だ壓縮材は挫屈しない事である。

圖-3 に依つて見ても Euler の限界荷重に於いては $\frac{d\theta}{L} = 0$ である。通常の解き方に依れば限界荷重に於いて無数の撓み曲線が考へられるのであるから、限界荷重で挫屈する事を示してゐるのであるが、正しくは限界荷重では未だ挫屈しないのである。此の事實に關しては先般の第 4 回工學會大會に於いて楳原博士が異つた立場から指摘せられた。此の意味から謂へば挫屈荷重或は挫屈強度と謂ふ様な用語は避けらるべきであらう。

限界荷重に於いて挫屈するものであるか否かの問題は數の切斷に於ける切斷點の歸屈の問題に過ぎないが、然しながら此の點を明確にしない爲に挫屈現象そのものに對する考へ方が一般に非常に曖昧になつてゐるのではなからうか。壓縮材を挫屈せしめざる軸荷重の數値の集合と、挫屈せしむるその集合とで數の切斷を考へれば、此の切斷は限界荷重に對應し限界荷重は前者の集合の上端に對應し後者の集合には端がないと見做すことが出来る。

(ii) 挫屈状態の安定、不安定

壓縮材が挫屈してからの状態に就いて考へて見る。限界荷重を越えても挫屈せずに眞直ぐの儘壓縮される場合も考へ得られる。然しながら勢力式の立場より見れば限界荷重を越えてからは眞直ぐに壓縮される場合の方がより大なる内働を要する事は容易に實證せられる。壓縮材の壓縮される形ちには 2 通り以外にないとなれば、挫屈した状態は安定な平衡状態にあるものと見做さざるを得ない(中立な平衡状態でない事は後に示す)。

圖-3 の曲線に依つて見ても限界荷重を越えた或る軸荷重に對しては常に 1 つの挫屈形が對應し、此の釣合状態に何等かの攪亂を與へても再び原の状態に復歸する事は容易に察知し得られるであらう。

弾性の限界内で挫屈してゐる状態が安定なる平衡状態に在ると考ふべき事は既に指摘されてゐる處であるが⁽¹⁾此の事實は案外一般に認識されて居ない様に思はれる。

此の原因としては第 1 に挫屈問題の通常の解き方に基く誤れる考へ方に依るものと思はれる。前にも述べた如く通常の解き方に於いては限界荷重に對して無類の撓み曲線が考へられる。此の事を率直に解釋するならば挫屈してからの状態は中立の平衡状態と見做さるべきであるが、一般には漠然と不安定の如く考へられてゐる様である。Bleich の著書⁽²⁾に於いては挫屈は不安定平衡の問題であると明言してゐるのであるが、著者には此の眞意が理解し兼ねるのである。

第 2 の原因としては壓縮材は挫屈してからの状態で使用せられるものでは無い爲に、限界荷重より先きの事は實際には大して問題とならなかつた事が擧げられる。従つて挫屈してからの状態がどうであらうと大して關心が拂はれなかつた。

然し中空壓縮材の問題に於いては挫屈してからの状態の解析が重大な意義を有して來るのである。

(iii) 中空壓縮材に於ける新しい問題

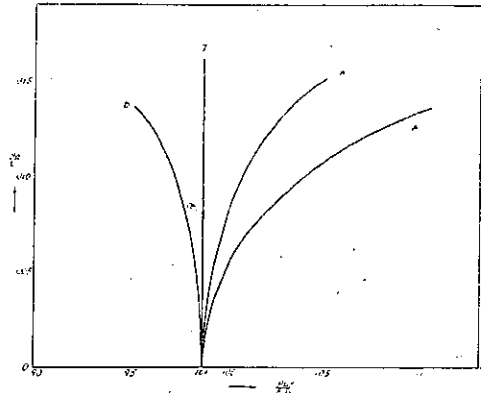
挫屈状態の安定、不安定に關する上述の考察は中實單體の壓縮材に就いてよつたが、著者の研究の對象とする中空壓縮材の挫屈状態に就いては中實なる壓縮材の場合とは異つた様相を呈するのである。その原因は中空壓縮材はその斷面が中空なる故に曲げられた場合斷面に彈性的變形を來し、之が曲げ剛さの減少となつて現はれ、此の減少の程度に依つては挫屈状態が不安定となる場合をも生ずるのである。即ち挫屈を始めてからの軸荷重と撓みとの關係が圖-5 に於いて曲線 CB (曲線 CA は中實壓縮材に對する曲線)で示される如き場合を生ずるのである。かかる中空壓縮材は限界荷重より遙かに小なる軸荷重に對しても、外部からの衝撃に依つては挫屈し元の眞直ぐな状態に復し得ない脆弱性を内藏するものであつて、壓縮材としては理論的に見て不安定なる構造のものであると

(1) 例へば Timoshenko, "Theory of Elastic Stability", 仲・濤川・久田共譯, p. 49~50,

(2) Bleich, "Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken", 奥田・綾・猪瀬共譯, p. 101~102.

見做さるべきである。中空壓縮材に於いてもその内部的機構（組合せ壓縮材に於いては綫工、管柱に於いては肉厚）が充分強力であれば圖-5 曲線 OA' 乃至曲線 OA の如き曲線をも採り得るのである。かゝる中空壓縮材であればその捩屈状態は安定であり、従つて安定なる壓縮材と稱する事が出来る。

圖-5.



安定なる中空壓縮材を得る爲には捩屈してからの状態が圖-5 に於いて少くとも切線 OT より右に在る事が理論的に必要である。第 2 編に於いては此の條件を解析的に求める考へである。中空壓縮材の場合に於いては捩屈してからの状態は上述の如く重大な意義を有して來るのであつて、此の點が本論文を通じて著者の第一に主張せんとする處である。

4. 壓縮材の捩屈に對する其の他の考察

これ迄の議論の對象として來た壓縮材は完全に真直ぐであり、又軸荷重も完全に中心にかゝると假定してゐた。然しながら實際の壓縮材に於いては完全に真直ぐである事は期待し得ない事であり、軸荷重の多少の偏心も止むを得ない事であらう。かゝる壓縮材に關して若干の考察を加へて見よう。

先づ中實單體の壓縮材に就いて考へる。最初から撓みの與へられてゐる壓縮材、或は偏心荷重を受ける壓縮材の問題は解析的には横荷重を受ける壓縮材の問題と全く同様に取扱はれる。其れ故に最も簡単な場合として中央に集中横荷重を受ける壓縮材の状態を考察し、その他の場合を此れより推察しようと思ふ。

壓縮材が軸荷重の他に横荷重も受ける場合に於いては、通常の解き方に従へば軸荷重はオイレルの限界荷重に收斂するが、限界荷重を越えて其れ以上に上げる事は出来ない。然しながら通常の解は前に論じた如く壓縮材の長さの條件の入れ方に嚴密さを缺いてゐる爲に斯くの如き結論に達するのであつて、此の條件を正確に入れるならば様子は異つて來るであらう。

圖-2 の如く坐標軸を取り壓縮材の中央に横荷重 Q が作用するとすれば、撓み曲線に對する微分方程式は次の如くなる。

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + P(y - y_0) = \frac{Q}{2}(x_0 - x) \dots \dots \dots (17)$$

但し (x_0, y_0) は壓縮材の曲げられた状態に於ける材端の坐標であつて、Q を一定とすれば P の函數として表はさるべきものである。

(17) 式の解は次の様になる。

$$y = y_0 + A \sin \frac{x}{\alpha} + B \cos \frac{x}{\alpha} + \frac{Q}{2P}(x_0 - x) \dots \dots \dots (18)$$

但し $\frac{1}{\alpha^2} = \frac{P}{EI}$

$x=0$ に於いて $y=0, \frac{dy}{dx}=0$ なる條件より、積分常數 A, B を決定すれば

$$A = \frac{\alpha Q}{2P}, \quad B = -y_0 - \frac{x_0 Q}{2P}$$

$$\therefore y = y_0 \left(1 - \cos \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\theta}{2P} \left(\alpha \sin \frac{x}{\alpha} - x_0 \cos \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{Q}{2P}(x_0 - x)$$

となり、 $x=x_0$ に於いて $y=y_0$ なる條件より x_0 と y_0 の關係を定むれば (19) 式を得る。

$$\frac{\alpha Q}{2P} = \left(\frac{x_0 Q}{2P} + y_0\right) \cos \frac{x_0}{\alpha} \dots \dots \dots (19)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y_0}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} + \frac{Q}{2P} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \frac{x_0}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha}\right) - \frac{Q}{2P} = \left(2 \frac{y_0}{\alpha} + \frac{Qx}{P\alpha}\right) \sin \frac{x}{2\alpha} \cos \frac{x}{2\alpha} - \frac{Q}{P} \sin^2 \frac{x}{2\alpha}$$

$$= \frac{Q}{P} \sin \frac{x}{2\alpha} \left(\tan \frac{x_0}{\alpha} \cos \frac{x}{2\alpha} - \sin \frac{x}{2\alpha} \right)$$

壓縮材の長さの條件は次の如くである。

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{x_0} \sqrt{\left(\cos^2 \frac{x}{2\alpha} + \sin^2 \frac{x}{2\alpha}\right)^2 + \frac{Q^2}{P^2} \sin^2 \frac{x}{2\alpha} \left(\tan \frac{x_0}{\alpha} \cos \frac{x}{2\alpha} - \sin \frac{x}{2\alpha}\right)^2} dx \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

(20) 式は楕圓積分の範圍で積分する事が出來、従つて P と x_0 の關係が定められ (19) 式に依り P と y_0 の關係が決定される筈である。(20) 式の積分は實際には相當複雑となるので遂行しなかつた。然しながら $Q \rightarrow 0$ の極限の状態が明瞭になれば、(20) 式の積分から $Q \neq 0$ の場合のから導かれる P と y_0 の關係も略推測し得られるであらう。

(19) 式に於いて $Q \rightarrow 0$ ならしむれば $\frac{x_0}{\alpha} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となる。従つて $Q=0, \frac{x_0}{\alpha} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ の場合の (20) 式を考へれば良い事になる。

(19) 式より

$$\lim_{\substack{Q \rightarrow 0 \\ \frac{x_0}{\alpha} \rightarrow \frac{\pi}{2}}} \left(\frac{Q}{P} \tan \frac{x_0}{\alpha} \right) = \frac{2y_0}{\alpha}$$

従つて (20) 式の積分は次の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \sqrt{1 + \frac{y_0^2}{\alpha^2} \sin^2 \frac{x}{\alpha}} dx = \alpha \sqrt{1 + \frac{y_0^2}{\alpha^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{\alpha^2 + y_0^2} \cos^2 t} dt \\ \frac{y_0}{\sqrt{\alpha^2 + y_0^2}} &= h \quad \text{と置けば} \\ \frac{L}{2} &= \frac{y_0}{h} E(h) \quad \text{或は} \quad \frac{y_0}{L} = \frac{h}{2E(h)} \end{aligned}$$

此れは (9) 式と全く一致する。

即ち横荷重 Q を零に限りなく近付ければ軸荷重 P と撓み y_0 の關係は限りなく圖-5 の曲線 OCA に接近する事を示してゐる。通常の場合に於いては $Q \rightarrow 0$ ならしむる時は圖-5 の切線 OCT に限りなく接近するのであるが、正確には曲線 OCA を漸近曲線とするのである。

壓縮材に初期の撓みがある場合或は荷重のかゝり方に離心率が考へられる場合に就いても同様の考察が下される。中空壓縮材の問題に立歸つて考へて見れば、横荷重、初期の撓み、或は軸荷重の偏心がある場合に於いても其れ等が非常に小さければ之等の影響のないものとして解いた純粹な場合に近接してゐる事は上記の考察より推測される事である。

横荷重等のある場合には最初から撓みが考へられる爲、限界荷重と謂ふものは考へられず、従つて挫屈した状態の安定、不安定と謂ふ言葉は不適當となるが、壓縮材としての安定、不安定の問題は前と同様に考へる事が出来る。即ち軸荷重が増大するに従つて撓みが甚だしくなる様な中空壓縮材は安定であるが、或る限度を越えると撓みが大きくなるに従つて逆に軸荷重が減少する様な中空壓縮材の安定、不安定を判別する事は之等の影響のない場合より遙かに複雑となるであらうと思はれるので之を放棄した。第 2 編に於いては之等の影響のない場合に就いて安定不安定の判別方法を求むるのであるが、横荷重、初期の撓み、或は軸荷重の偏心等が存在しても、小なる場合には多少の餘裕を以てその判別方法を適用する事が出来るであらう。

2. 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導

組合せ壓縮材、管柱等を含む中空壓縮材の力學的特徴は、それが曲げられた場合断面の形狀が變化する事である。中空壓縮材に於いては弾性の限度内で曲げられてゐる限り變形が起るとしても問題となる程度ではない。

中空壓縮材が弾性の限度内で挫屈して曲げられれば常識的にも考へられる如く、一般にその断面の變形は曲げ剛さの減少となる。此の曲げ剛さの減少を考慮に入れて中空壓縮材の撓み曲線に對する微分方程式を導き、之を解いて中空壓縮材の安定、不安定を判別する式を提出せんとするのである。

1. 中空壓縮材の曲げに對する抵抗

本章に於いては中空壓縮材が曲げに對して如何に抵抗するかを解析して見る。中空壓縮材の例としては主としてワーレン型に綾片を施した組合せ壓縮材を取つて計算を進め、更に管柱の場合に就いても途中の計算を省いて結果のみ附記する事とする。各種の組合せ壓縮材又は管柱の場合の詳細な計算は第 3 編に於いてまとめる積りである。

組合せ壓縮材が中心軸荷重を受け、未だ挫屈しない状態にある時は通常の静力學的計算に於いては綾片には何等應力がかゝらない。實際には挫屈しない状態に於いても綾片に應力がかゝるのであるが、然しながらそのかゝり方は局部的であり、而もそう大きな量ではない⁽¹⁾。然しながら一旦曲げられると綾片は急に其の存在を主張し出す。本章に於いては壓縮材を非常に長いものと假定し、此れが或る曲率 $\frac{1}{R}$ に一様に曲げられてある状態に於いて綾片が如何なる役割を果してあるかを先づ第一に究明して見ようと思ふ。此の状態は長い壓縮材の兩端に於いて適當な曲げモーメントが考へられてあるとか、或は壓縮材が曲げられて丁度半徑 R の全圓を作つてあると考へても良いであらう。 R は綾片の格間長 l に比較して著しく大である事は勿論である。

壓縮材の曲げられる前及び後に於ける骨組の幅、綾片の長さを夫々圖 6 に於ける如く h, h', a, a' とする。壓縮材の中立軸の長さは曲げられて後も同じである筈である。尙弦材、綾片の斷面積は夫々 A_f, A_a で表はす事とする。

一側面が圖 6 (a) の如くである正四角柱を作つても、必ずしも圖 6 (b) の如くその側面を含む平面内で挫屈するものとは限らず、正方形の對角線を含む中軸面に就いて立體的に挫屈する可能性も亦有り得るのであるが、此れに就いては第 3 編に詳論する事とし、此處では平面的のみ問題を取扱ふ事とする。

圖 6 (c) の如く組合せ材が圓弧狀に曲げられたとすれば、外側の弦材は引張られ内側の弦材は壓縮される。兩弦材の斷面積は相等しいからその應力度の絕對値は相等しく従つてその歪度の絕對値も相等しい。

内側の弦材に就いて考へれば之は壓縮されてあるから外側に膨張せんとしてある。内側弦材の壓縮歪度の形ちの上から見て $-\frac{h}{2R}$ となつてある筈であるから、部材の彈性係数を E とすれば、壓縮應力度は

$$\sigma = -\frac{h'E}{2R}$$

となり、壓縮力は

$$\sigma A_f = -\frac{h'}{2R} EA_f \dots\dots\dots (21)$$

となる。

圖 7 の如き圓環をなす部材に (初期應力はないものとして) 上記の如き壓縮力を起こさせる様な等値静水壓 q

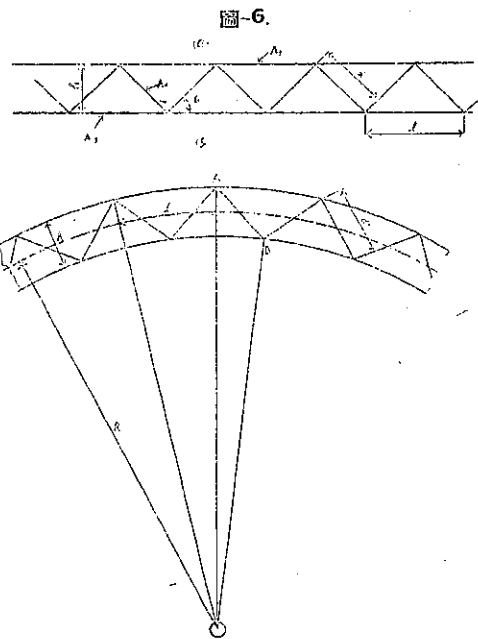


圖-6.

⁽¹⁾ 安宅 勝氏: “綾片の強度に就いて”(土木學會誌第 25 卷第 8 號參照) 組合せ壓縮材に於ける綾片の役割に關する安宅氏と著者の見解の比較は次回に於て詳しく述べる。

と謂ふものを假想すれば、 q は次の如く表はされる。

$$\sigma A_f = -\frac{h'}{2R} E A_f = -q \left(R - \frac{h'}{2} \right)$$

或は

$$q = \frac{h' E A_f}{2R \left(R - \frac{h'}{2} \right)} \approx \frac{h' E A_f}{2R^2} \dots \dots \dots (22)$$

圖-7.

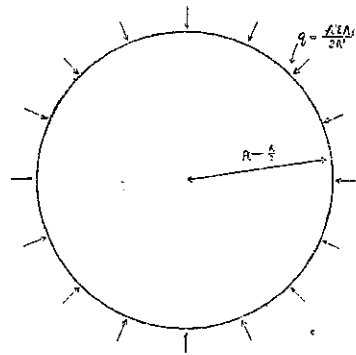
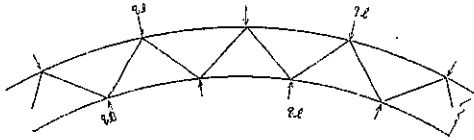


圖-8.



但し h' は R に比して非常に小であり、又 h と h' の差は又極く僅かである。即ち内側弦材は單位長さ當り q なる遠心力を以て外側に膨張せんとし、又外側弦材は同様に單位長さ當り q なる求心力を以て内側に縮少せんとし、之等の遠心力と求心力とに抵抗し兩弦材の間隔を保持せんとしてゐるものが綾片であり、従つて曲げに對する綾片の役割は此處に見出される。

R に比して l は極めて小であるから綾片の各滑節點に於いて ql なる力が圖-8 の如く綾片に作用するものと考へて差支へないであらう。正確には外側の滑節點にかゝる壓力の方が内側の滑節點にかゝる壓力より幾分大きいのであるが、その影響は極めて僅かである。従つて 1 本の綾片の壓力は

$$\frac{1}{2} ql \operatorname{cosec} \theta = \frac{ql d}{2h}$$

と置き得る。

綾片の斷面積は A_a であるから、その壓縮應力度は (2) 式を考慮に入れて

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \frac{ql d}{h A_a} = \frac{ld A_f E}{4R^2 A_a}$$

となり、綾片の縮みは次式で表はされる。

$$\frac{\sigma_a}{E} d = \frac{ld^2}{4R} \cdot \frac{A_f}{A_a}$$

従つて曲げられる前の綾片の長さ d と比較すれば、曲げられて後の長さ d' は次の如くなる。

$$d' = d \left(1 - \frac{ld^2}{4R^2} \cdot \frac{A_f}{A_a} \right) \dots \dots \dots (23)$$

次に組合せ材の曲げられた状態即ち圖-6 (b) に於いて h', d', l の關係を求めて見る。△OAB の間に餘弦法則を適用すれば

$$d'^2 = \left(R - \frac{h'}{2} \right)^2 + \left(R + \frac{h'}{2} \right)^2 - 2 \left(R - \frac{h'}{2} \right) \left(R + \frac{h'}{2} \right) \cos \frac{l}{2R}$$

となり、 $\cos \frac{l}{2R}$ を級數に展開し其の第 2 項迄を取れば

$$d'^2 \approx 2 \left(R^2 + \frac{h'^2}{4} \right) - 2 \left(R^2 - \frac{h'^2}{2} \right) \left(1 - \frac{l^2}{8R^2} \right)$$

$$\therefore d'^2 = h'^2 + \frac{l^2}{4} - \frac{h'^2 l^2}{16R^2} \dots \dots \dots (24)$$

となり、壓縮材が曲がらない前の形ちに就いては明らかに次の式が成立する。

$$d^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \dots \dots \dots (25)$$

(23)~(25) の 3 式より壓縮材が曲げられる前と後とで骨組の幅が如何に變化するものであるかと解る。即ち

(24), (25) 式より

$$h^2 - h'^2 = d - d'^2 - \frac{h'^2 l^2}{16 R^2}$$

上式の意味を考へるのに、弦材には伸縮し得る弾性的材料を使用し、綾片には伸縮の全然ない材料を使用したと假定すれば（即ち $d = d'$ とすれば）、組合せ材は曲げられるに従つて幅を増す事を意味してゐる。即ち實際問題としては竣工の強弱如何に依つて曲げに對して組合せ材の幅が増減する事が豫想される。

$$h - h' = \Delta h$$

と置けば Δh は骨組の幅の減少を意味する。

Δh は次の如く表はされる。

$$\Delta h (h + h') = (d - d')(d + d') - \frac{h'^2 l^2}{16 R^2}$$

(23) 式に於ける $d - d'$ を代入すれば

$$\Delta h (h + h') = (d + d') \left[\frac{ld^2}{4R^2} \cdot \frac{A_f}{A_a} - \frac{h'^2 l^2}{16 R^2} \right]$$

茲に於いて近似的に $h \approx h'$, $d \approx d'$ と置き直せば

$$\Delta h = \left(\frac{ld^2}{4h} \cdot \frac{A_f}{A_a} - \frac{hl^2}{32} \right) \frac{1}{R^2} \dots \dots \dots (26)$$

となる。

(26) 式の意味を考へて見るのに、右邊を正ならしむる様な綾片を有する組合せ材に於いては、曲げられるに従つてその曲率の自乗に比例して骨組の幅が減少する。即ち壓縮材の曲げ剛さが減少する事になる。逆に右邊が負となる様な壓縮材に於いては、曲げられるに従つて幅が増加し、従つて曲げ剛さが増大する。

(26) 式の右邊を丁度零ならしむる様な組合せ壓縮材は曲げの前後を通じて曲げ剛さに變化がなく、此れは中實單體の壓縮材の挫屈と同様に考へて良い譯である。その爲の條件は次の如くである。

$$\frac{ld^2}{4h} \cdot \frac{A_f}{A_a} - \frac{hl^2}{32} = 0$$

或は
$$\frac{A_f}{A_a} = \frac{h^2 l}{8d^2} = \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos \theta \dots \dots \dots (27)$$

但し θ は綾片と弦材との間の角である。 $\theta = 45^\circ$ に於いては

$$\frac{A_f}{A_a} \approx \frac{1}{11.3}$$

となり、綾片の斷面積は弦材の斷面積の約 11.3 倍を要すると謂ふ結果になる。尙 $\sin^2 \theta \cos \theta$ を最大ならしむる θ の値は

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{2} = 54^\circ 44' 8''$$

であつて此の角度に於いては

$$\frac{A_f}{A_a} \approx \frac{1}{10.4}$$

となる。即ちワーレン型組合せ壓縮材を中實單體の壓縮材と同等な内部的機構に迄強める爲には、少くとも弦材の斷面積の 10 倍以上の斷面積を有する綾片を施さなければならぬ事になる。換言すれば組合せ壓縮材に次第に増大する軸荷重をかけてその撓みと軸荷重との關係が中實單體の壓縮材の場合と同じにする爲には、かくの如く多量の綾片を要するのである。

此の事は逆に考へれば中實の壓縮材に於いては材料が非常に遊んでゐる事を示してゐるも見られる。

以上に於いてワーレン型組合せ壓縮材の曲げに對する特性を解析して次の結論を得た。即ち組合せ壓縮材は綾片の強弱に應じて曲げられれば曲げられる程曲げ剛さが大きくも或は小さくもなる。此處に組合せ壓縮材の一つ

の特性が認められる。又中實な壓縮材も同様に曲げの如何に拘らず、曲げ剛さの一定な組合せ壓縮材を集成する爲には、實現不可能な程強力なる竣工を施さなければならない事が解つた。

中實な壓縮材の撓屈現象に關しては、第 1 編に於いて論ぜる如く、限界荷重を超えて撓屈してからも軸荷重は増加するのであつて、弾性の限度内で撓屈してある状態は安定な釣合状態にある。之に對して部材を集成して組立てる組合せ壓縮材に於いては、その撓屈状態を中實壓縮材と同程度に安定な平衡状態に在らしめる程強力な竣工を施す必要はなく、少くとも中立の平衡状態が此れより多少安定な平衡状態に近からしむれば良いであらう。

綾片の脆弱はその組合せ壓縮材の限界荷重に大きな影響を與へるものである事は第 4 編に於いて詳論する積りであるが、以上の如く撓屈の安定、不安定にも重大なる關聯を有するのである。不安定なる撓屈をする様な壓縮材であつても理論的には限界荷重に達しなければ撓屈はしないが、何等かの外的條件に依つて一度柱に曲げが與へられれば、如何程小なる軸荷重に對しても撓屈可能性を藏してゐる。従つて組合せ材の竣工はその撓屈が少くとも中立の平衡状態に在らしめる程度に強力なものでなければならぬ。組合せ壓縮材の綾片に對する此の條件は絶對的なものであると考へられる。

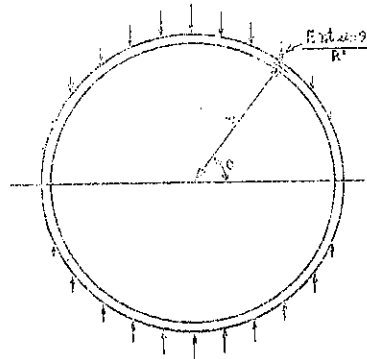
以上は或る特殊な組合せ壓縮材の骨組材の而も平面内に於ける撓屈を考へたのであるが、無數に考へられる如何なる組合せ壓縮材に就いても同様の結論が下されるのである。曲げに依る骨組の幅の減少は (6) 式の如く常に $\frac{1}{h^2}$ に比例してゐるのが特徴である。

次に管柱が同様に $\frac{1}{R}$ の曲率に曲げられてある状態を考へて見よう。中軸面に伸び縮みがないとすれば中軸面外側の材料は引張られ内側の材料は壓縮されてゐる。従つてパイプの斷面を取つて考へれば圖-9 の如き外力が與へられて管の斷面を押潰さうとしてゐる事になる。實際に計算して見ると(詳細の計算は第 3 編に譲る)豫想された如く、管が曲げられると最初圓形であつた斷面が近似的に橢圓となる。その離心率 e と曲率 $\frac{1}{R}$ との關係は次の如く表はされる。

$$e = \frac{e^2 r^2}{2R}$$

但し r : 管の半徑 t : 管の肉厚

圖-9.



中軸面に對して壓縮側と引張側との間の間隔の減少は e の自乗に比例する。

以上を適用して歸納せられる事は如何なる中空壓縮材も曲げられる場合には壓縮側と引張側との間の間隔は曲率の自乗に比例して減少すると謂ふ事である。次章に於いては此の事實に基いて中空壓縮材の撓み曲線に對する微分方程式を誘導する。此の方程式に依つて中空壓縮材の撓屈の安定不安定が判別せられ、之に依つてワーレン型組合せ壓縮材に於いては綾片を、管柱に於いてはその肉厚を決定すべき絶對的條件が求められる管である。

2. 中空壓縮材に對する基礎方程式の誘導

中空壓縮材に於いては曲げによる曲げ剛さの變化が考へられ、之が最も大きな特徴をなしてゐる。従つて中空壓縮材の撓屈を考へる場合には此の曲げに依る曲げ剛さの變化を考慮に入れて撓み曲線に對する微分方程式を導かなければならぬ。

先づ前章に於いて取扱つた組合せ壓縮材に就いて考へて見るに、曲率 $\frac{1}{R}$ に曲げられてゐるその組合せ材の斷面の慣性モーメントは次の如く表はされる。

$$\begin{aligned} I &= 2A_f \left(\frac{h'}{2}\right)^2 = \frac{A_f}{2} (h - Ah)^2 = \frac{A_f h^2}{2} \left(1 - \frac{2Ah}{h}\right) = \frac{A_f h^2}{2} \left\{1 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{ht^3}{2h} \cdot \frac{A_f}{Ah} - \frac{t^3}{16}\right)\right\} \\ &= I_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{R^2}\right) \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

但し Ah に對しては (26) 式を代入し

$$I_0 = \frac{A_0 b^2}{2} \text{ (曲げられない前の慣性モーメント)} \dots\dots\dots (29)$$

$$\beta^2 = \frac{l d^2}{2 l^2} \cdot \frac{A_f}{A_0} - \frac{l^2}{16} \dots\dots\dots (30)$$

と置換した。β は長さのディメンションを有し、綫工の著しく強力なる場合には β が負となる事もあるが、實用的な場合は盡く β が正の範圍内に含まれるので以下 β は常に正であると考へて差支へない。

壓縮材の捫み曲線に對する微分方程式は、(1) 式即ち

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0$$

であり、此の I に對して (28) 式を代入すればワーレン型組合せ壓縮材に對する方程式が導かれる。此の形ちは又一般の組合せ壓縮材に對しても適用されるものである。綫片の長さに對して壓縮材の長さが大である時には $\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ と置き得る故、次の如き微分方程式を得る。

$$EI_0 \left\{ 1 - \beta^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \right\} \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0 \dots\dots\dots (31)$$

此の基礎微分方程式は部材を集めて合成する全ての組合せ壓縮材に對して適用されるものであり、β² はその綫工の程度に依つて決定される量である。變斷面中空壓縮材であつたならば I₀ は x の函數となる。

此處に取扱ふ場合は EI₀ が一定なる場合であるから

$$\frac{P}{EI_0} = \frac{1}{\alpha^2} \text{ (}\alpha \text{ は長さのディメンションを有す)}$$

と置けば次の形ちに書き直される。

$$\left\{ 1 - \beta^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \right\} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{\alpha^2} = 0 \dots\dots\dots (32)$$

管柱の場合に於ける曲げに依る慣性モーメントの變化を示せば次の如くである。

$$I = I_0 \left\{ 1 - \frac{12r^2 + t^2}{8(4r^2 + t^2)} e^2 \right\} = I_0 \left\{ 1 - \frac{r^4(12r^2 + t^2)}{2t^2(4r^2 + t^2)} \cdot \frac{1}{R^2} \right\}$$

即ち

$$\beta^2 = \frac{r^4(12r^2 + t^2)}{2t^2(4r^2 + t^2)}$$

と置けば管柱の捫屈も亦同様に (32) 式に依つて論ずる事の出来る事を示してゐる。従つて (31), (32) 式は全ての中空壓縮材に適用せられる基礎方程式である事が解る。

正確には $\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} / \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$ であるから基礎方程式に於いて $\frac{d^2 y}{dx^2}$ を $\frac{d^2 y}{dx^2} / \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$ で置き換へたならばより正しい基礎方程式が得られる。然しながら捫屈の限界點附近を論ずるには 1 に對して $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ を小なりとして省略しても差支へない事は第 1 編に於いて既に指摘した通りである。

(32) の基礎方程式は $\frac{d^2 y}{dx^2}$ に關して 3 次の代數方程式であつて之を解けば

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$$

なる形ちの解が得られ、此の微分方程式を解けば良い。併しながら f(y) は 3 乗根の内に 2 乗根が含まれてゐる様な形ちであり、第 1 回の不定積分は簡單に求められるが、第 2 回目の積分は到底求められ相もない。

又一方より考へれば (32) 式に於いて問題の性質上 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ と $\frac{y}{\alpha^2}$ とが同じ程度の大きさであり、捫屈の限界點附近を考へるとすれば y は小であるから、 $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2$ の項は他の 2 つの項に比較して非常に小さい。此の點に着目して $\frac{d^2 y}{dx^2}$ に關する代數方程式を近似的に解く事にする。根としては $-\frac{y}{\alpha^2}$ に非常に近い事が解つてゐるから、此れを基本として代數方程式の根を求むるニュートンの近似計算法を 2 回繰返せば次の如き解が得られる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\beta^2 y^2}{\alpha^4} + 3 \frac{\beta^4 y^4}{\alpha^8} + 12 \frac{\beta^6 y^6}{\alpha^{12}} + 55 \frac{\beta^8 y^8}{\alpha^{16}} + \dots \right) \dots\dots\dots (33)$$

挫屈の限界點附近即ち y が非常に小である處を取扱はんとする現在の目的の爲には右邊の第 2 項迄を取れば充分である。第 3 項以下を考慮に入れても挫屈の安定、不安定の判別には結局影響しないのである。第 2 項迄であれば全ての積分は楕圓積分の範囲内でおさまり、又 β^2 が含まれてゐるから中空壓縮材の特性も必ず此の内に含まれてゐる筈である。第 3 項以下を省略すれば次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\beta^2 y^2}{\alpha^4} \right) = 0 \dots\dots\dots (34)$$

挫屈の限界點の附近を取扱ふ場合には (34) 式を中空壓縮材に對する基礎方程式と見做しても差支へないであらう。

(34) 式は (32) 式に於いて $\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2$ の項を $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{\alpha^2}$ と置き換へて得られる式と結果に於いて同一である。

3. 基礎方程式の解と不安定なる挫屈を起さざる爲の條件

挫屈状態が安定であるか不安定であるかを論ずるには、挫屈の限界點附近の様子が解ければ良いのであつて、その爲には (34) 式の如き近似的な方程式で充分正確に目的を達し得られる。

坐標軸を圖-10 の如く取つて (34) 式の積分を遂行すれば以下の様になる。

(34) 式の兩邊に $\frac{dy}{dx}$ を乘じて積分し $y=y_0$ に於いて $\frac{dy}{dx}$ なる條件を入れれば

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} (y^4 - y_0^4) + \frac{1}{\alpha^2} (y - y_0^2) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$0 \leq y \leq y_0$ の間で積分すれば

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y_0^2 - y^2) \left\{ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\beta}{2\alpha^2} (y_0^2 + y^2) \right\}}}$$

$y = y_0 \sqrt{1-u^2}$ と置換すれば

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^2}}} \int_u^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

但し $K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1.8}{2.4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 k^6 + \dots \right\}$

$$0 < k^2 = \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4 + \beta^2 y_0^2} < 1$$

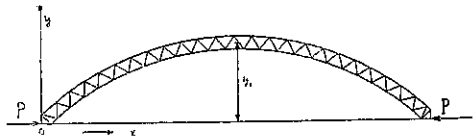
ヤコビの楕圓函數の記號を用ふれば

$$u = \sqrt{1 + \frac{y^2}{y_0^2}} = \operatorname{sn} \left(K - \frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4}} \right)$$

或は
$$y = y_0 \operatorname{cn} \left(K - \frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4}} \right) = y_0 \sqrt{\frac{\alpha^4}{\alpha^4 + \beta^2 y_0^2}} \cdot \frac{\operatorname{sn} \left(\frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4}} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4}} \right)} \dots\dots\dots (36)$$

以上で挫屈形が決定されたのである。 $\alpha \left(= \sqrt{\frac{EI_0}{P}} \right)$ と y_0 とは壓縮材の長さの條件に依つて關係づけられる。軸荷重 P の或る値に對して y_0 が決定され従つて (36) 式に依り挫屈形が實際に求められるのである。壓縮材の長さの條件は次の如くである。

圖-10.



$$\frac{1}{2}L = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dy$$

上式に (35) 式に於ける $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ の値を代入して積分すれば良いのであるが平方根の内が y に関して 8 次の代数式となり、積分が困難であるから $\frac{dy}{dx}$ の 1 に比較して小なる事を利用して級数に展開して項毎に積分を行ふ事とする。即ち

$$\frac{L}{2} = \int_0^{y_0} \left\{ \frac{1}{dy} + \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - \dots \right\} dy$$

此の積分に於いては楕圓積分の標準形に直す必要はないから

$$y = y_0 t$$

と變數を置換して積分を敢行すれば

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} = \delta \left\{ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)}} + \frac{y_0^2}{2\delta^2} \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)} dt \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{y_0^4}{\delta^4} \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^3(1+h^2t^2)^3} dt + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y_0^6}{\delta^6} \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^5(1+h^2t^2)^5} dt - \dots \right\} \quad (37) \end{aligned}$$

但し

$$\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}}}$$

$$0 < h^2 = \frac{\frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}}{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}} < 1$$

である。尚

$$\begin{aligned} K_0(h) &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 h^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 h^4 - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 h^6 + \dots \right\} \\ K_1(h) &= \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)(1+h^2t^2)} dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 1}{2^2 \cdot 4} h^2 - \frac{1^2 \cdot 1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} h^4 + \frac{1^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} h^6 - \dots \right\} \\ K_2(h) &= \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^3(1+h^2t^2)^3} dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{3^2 \cdot 1 \cdot 1}{2^2 \cdot 4 \cdot 6} h^2 + \frac{3^2 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot 8} h^4 - \frac{3^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8 \cdot 10} h^6 + \dots \right\} \\ K_3(h) &= \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^5(1+h^2t^2)^5} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5^2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2^2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} h^2 + \frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} h^4 + \frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} h^6 - \dots \right\} \\ K_4(h) &= \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \right\} \end{aligned}$$

と置けば (37) 式は次の如く書き表はされる。

$$\frac{1}{2} \frac{L}{\delta} = K_0(h) + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0}{\delta}\right)^2 K_1(h) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(\frac{y_0}{\delta}\right)^4 K_2(h) + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{y_0}{\delta}\right)^6 K_3(h) \quad (38)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{\delta} &= \frac{L}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}} \\ \frac{y_0}{\delta} &= \frac{y_0}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}} \\ h &= \sqrt{\frac{\frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}}{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}}} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

(17) 式は α と y_0 , 従つて P と y_0 とを關係づける式であつて, $y_0=0$ に對しては

$$\frac{L}{2\alpha} = \frac{P}{2}$$

即ち
$$P = \pi^2 \frac{EJ_0}{L^2}$$

を與へる。此れは組合せ壓縮材の限界荷重が弦材のみに依つて定まり綾片には無關係である事を示してゐる。

此れは撓み曲線に對する微分方程式を立てる時に剪斷力の影響を無視した爲であつて, 此の影響を考慮に入れる時は綾片が限界荷重に對して大きな役割を演じて居る事が解るのである。併しながら撓屈状態の安定, 不安定に對しては剪斷力の影響を考慮すると否とは何等の關聯をも及さないのである。之等の問題は第4編に於いて詳しく論ずるであらう。

撓屈状態が安定であるか, 不安定であるかを決定する爲には (38) 式に (39) 式を代入して $\left(\frac{y_0}{\alpha}\right)^4$ の項以下を省略して考へて充分である。

即ち

$$\frac{1}{2} \frac{L}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \frac{\frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}}{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4}} + \dots \right\} + \frac{1}{2} \frac{y_0}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \dots \right\} + \dots$$

$$\therefore \frac{1}{2} \frac{L}{\alpha} \approx \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\beta^2}{8\alpha^2} \right) \frac{y_0^2}{\alpha^2} \right\} \left(1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{2\alpha^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3\beta^2}{8\alpha^2} \right) \frac{y_0^2}{\alpha^2} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

y_0 が増加するに従つて P が増加すれば, 此れは安定な撓屈である。 y_0 が増加するに従つて P が減少すれば其れは不安定な撓屈である。

中空壓縮材が不安定な撓屈を起さない爲には次の條件が成立する。

$$\frac{1}{4} - \frac{3\beta^2}{8\alpha^2} \geq 0$$

或は

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \leq \frac{2}{3} \dots \dots \dots (41)$$

(41) 式に於いて α は如何なる値を取るものであるかを考へて見よう。(41) 式は軸荷重を越えて壓縮材が撓屈してからの關係である。元々 $\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$ であつて P は固定された數値ではなく, y_0 に伴つて變化する變數であるが, 限界荷重以下の P に對しては y_0 は零以外の實數値は取り得ず (不安定なる撓屈の場合を除く), 限界荷重を越えれば P の僅かな變動に對して y_0 は非常に大きく變化する。換言すれば撓屈の限界點附近に於いては y_0 の大きな變化に對して P の變化は非常に小さい。従つて α の値としては P を限界荷重に固定した場合の値を取つて差支へない。従つて

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{P}{EI_0} \approx \frac{\pi^2}{L^2} \dots \dots \dots (42)$$

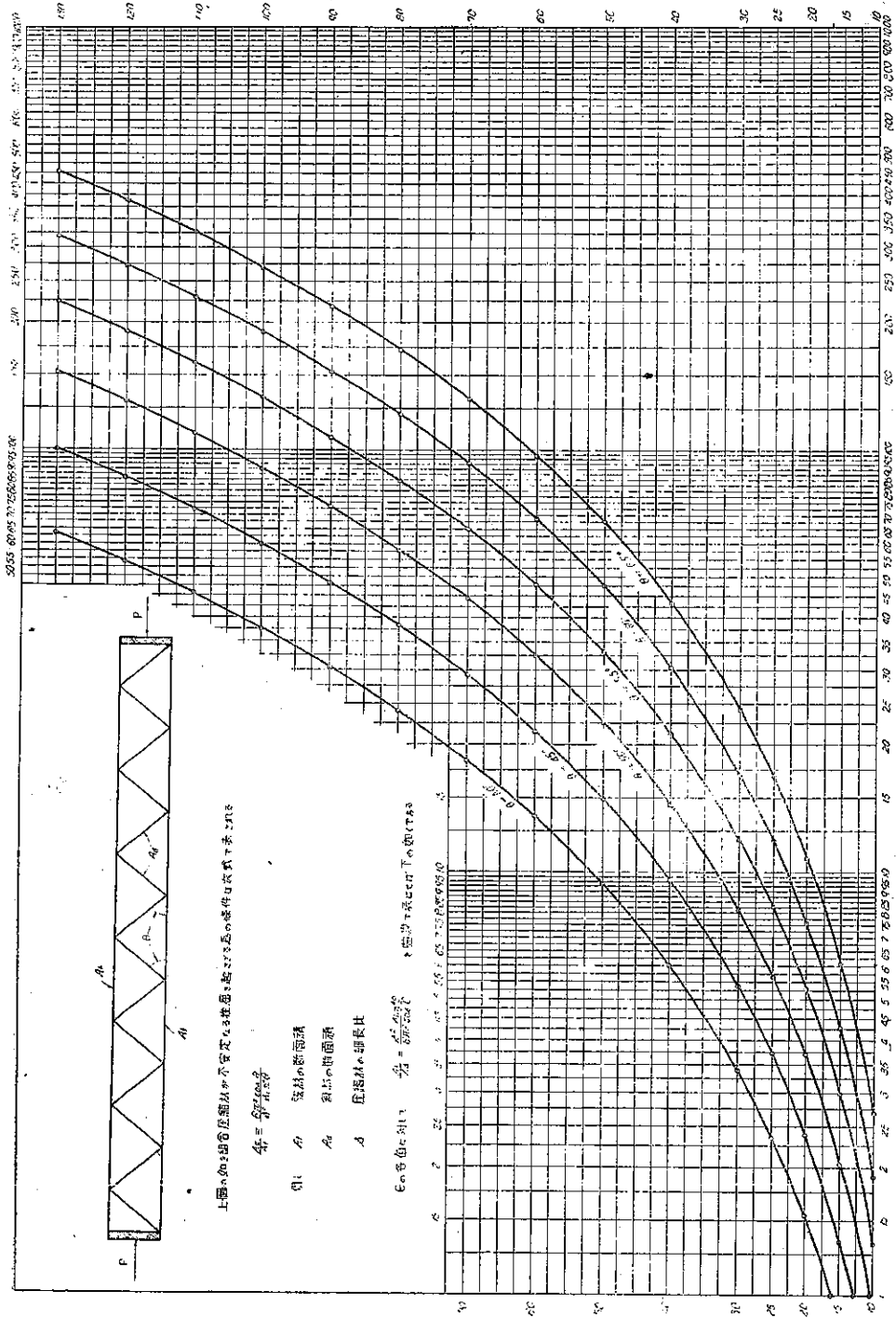
と置いて差支へ無い。

次に β^2 の數値であるがワーレン型組合せ壓縮材と管柱に對しては既に求めた如何なる中空壓縮材に對しても β^2 は同様の考へ方で求められるであらう。結局中空壓縮材の安定, 不安定の問題は各壓縮材に固有な數値である β^2 を計算し (41), (42) の兩式に依り判別すれば良い事になる。

ワーレン型組合せ壓縮材に對しては β^2 は (30) 式で表はされる。此れを (41) 式に代入して (42) 式を考慮すれば

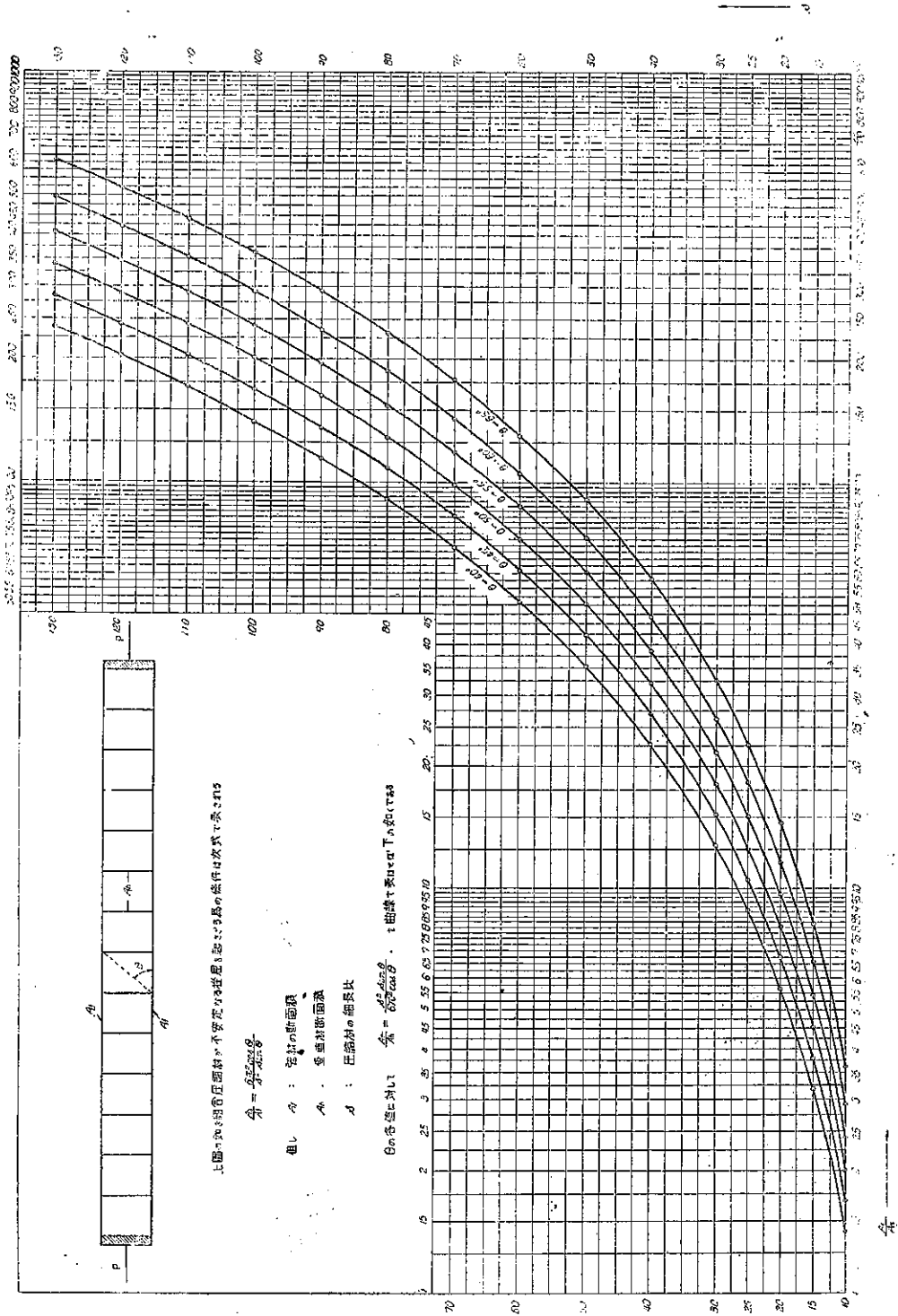
$$\frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{lt^3}{2h^2} \cdot \frac{A_f}{A_n} - \frac{l^3}{16} \right) \leq \frac{2}{3}$$

圖-11.



λ

圖-12.



各

或は
$$\frac{A_d}{A_f} \geq \frac{\frac{l d_s}{2h^2}}{\frac{2L^2}{3\pi^2} + \frac{L^2}{16}}$$

l は格間長であり、壓縮材の全長 L に比較して著しく小さいから、 $\frac{L^2}{16}$ の項を省略すれば

$$\frac{A_d}{A_f} \geq \frac{3\pi^2 l d_s^2}{4h^2 L^2}$$

此の省略は安全側である。此の結果を更に綾片が弦材に對してなす角 θ と壓縮材の細長比 s とで書き直せば

$$\frac{A_d}{A_f} \geq \frac{6\pi^2 \cos \theta}{s^2 \sin^4 \theta} \dots \dots \dots (43)$$

ワーレン型組合せ壓縮材の挫屈が安定である爲には綾片の断面は上記の條件式を満足しなければならない。

Lahmen Stab 型の組合せ壓縮材に對して同様な條件式を導けば次の如くである (詳細の計算は第 3 篇に譲る)。

$$\frac{A_d}{A_f} \geq \frac{6\pi^2 \cos \theta}{s^2 \sin^4 \theta} \dots \dots \dots (44)$$

A_d は綾片の断面積を表はす

管柱の場合も不安定なる挫屈を起さざる爲の條件は次の如く表はされる。

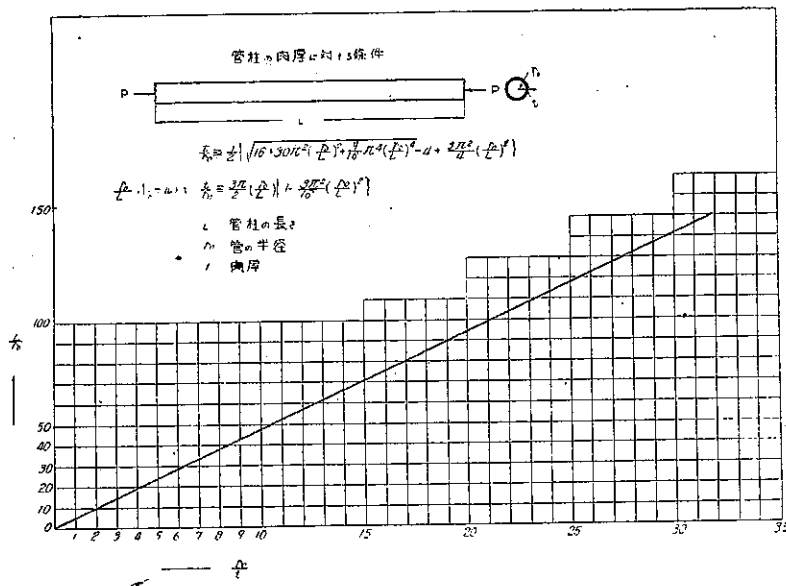
$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\pi r^4 (12r^2 + t^2)}{2t^2 (4r^2 + t^2) L^2} \leq \frac{2}{3}$$

管の半径 r に對して肉厚 t が如何程なければならないかを $\frac{r}{L}$ の函數として表はせば次の如くである。

$$\frac{t^2}{r^2} \geq \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{16 + 30\pi^2 \left(\frac{r}{L}\right)^2 + \frac{9\pi^4}{16} \left(\frac{r}{L}\right)^4} - 4 + \frac{3\pi^2}{4} \left(\frac{r}{L}\right)^2 \right\} \dots \dots \dots (45)$$

(43)~(45) の各式をグラフにして示せば圖-11~13 の如くである。

圖-13.



4. 要約

第 2 編に於ける所論を要約すれば次の如くである。

1 章に於いては中空壓縮材が曲げに對して如何に抵抗するかを主としてワーレン型組合せ壓縮材に就いて解析

した。曲げられるに従つて断面が變形するが、これを兩弦材間の間隔の減少で表はせば (26) 式の如くである。即ち

$$\Delta h = \left(\frac{ld_0}{4h} \cdot \frac{A_f}{A_a} - \frac{hl^2}{32} \right) \frac{1}{R^2}$$

此の第 2 項は通常省略して差支へない。管柱の場合には曲げられると断面は楕圓に變形する。此の場合の壓縮側と引張側の間の間隔の減少はに l^2 比例し、従つて $\frac{1}{R^2}$ に比例する。第 2 章に於いては至ての中空壓縮材の曲げ剛さは曲げられるに従つて減少し、その量は $\frac{1}{R^2}$ に比例する事實を考慮に入れて撓み曲線に對する微分方程式を導いた。その経過は次の如くである。

$$\text{曲げに依る慣性モーメントの減少} \quad I = I_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{R^2} \right)$$

$$\text{但しワーレン型組合せ壓縮材に對しては} \quad \beta^2 = \frac{wl^3}{2h^2} \cdot \frac{A_f}{A_a} - \frac{l^2}{16} = \frac{wl^3}{2h^2} \cdot \frac{A}{A_a}$$

$$\text{管柱に對しては} \quad \beta^2 = \frac{r^4(12r^2 + t^2)}{2t^2(4r^2 + t^2)}$$

$$\text{撓み曲線に對する微分方程式} \quad EI_0 \left\{ 1 - \beta^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \right\} \frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0$$

$$\text{或は} \quad \left\{ 1 - \beta^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \right\} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{\alpha^2} = 0$$

$$\text{捩屈の限界點附近に對しては近似的に} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\beta^2 y^2}{\alpha^4} \right) = 0$$

第 3 章に於いては上記の近似的微分方程式を解き、捩屈形に對しては

$$y = y_0 \sqrt{\frac{\alpha^4}{\alpha^4 + \beta^2 y_0^2}} \cdot \frac{\text{sn} \left(\frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4}} \right)}{\text{dn} \left(\frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 y_0^2}{\alpha^4}} \right)}$$

α (即ち P) と y_0 の關係に對しては

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \frac{y_0^2}{\alpha^2} + \dots \right\}$$

を得た。これより不安定なる捩屈を起さざる爲の條件として

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \leq \frac{2}{3}$$

を得る。茲に $\frac{1}{\alpha^2} = \frac{3}{EI_0} = \frac{\pi^2}{L^2}$ として良い。此の條件をワーレン型組合せ壓縮材に適用すれば

$$\frac{A_a}{A_f} \geq \frac{6\pi^2 \cos \theta}{s^2 \sin^4 \theta}$$

となり管柱に適用すれば

$$\frac{L_2}{r_2} \geq \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{16 + 30\pi^2 \left(\frac{r}{L} \right)^2 + \frac{9\pi^2}{16} \left(\frac{r}{L} \right)^4} + \frac{3\pi^2}{4} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right\}$$

となる。

以上の計算に於いては壓縮材は可成り長い事が假定されてゐる。従つて餘り短い壓縮材に對しては此の結果は適用し難くなる。かかる場合には組合せ壓縮材に於いては結構としての計算を行ふべきであり、管柱の場合には圓筒殻の捩屈 (小田原提灯の如く捩屈する場合) の問題となる。