

彙 報

第 26 卷 第 11 號 昭和 15 年 11 月

特殊緩和曲線の數値表

會員 江 藤 禮*

1. 概 要

今日、緩和曲線として重要な役割りを果してゐる“三次拋物線”も廣義に論ずれば緩和屈曲としての資格を缺くのである。鐵道線路の如く圓曲線に接續の場合は幸ひにして最大ラセン角が僅小ですむから實用上に差し支へなかつた。茲に提唱する“特殊緩和曲線”も全く同一の基本式から出發してはゐるがその解法が數學的に嚴正であるため、三次拋物線に於ける如き矛盾を生じない。従つてラセン角の限度も 90° となつて頗る有利になり、最近の高速道路に採用される様な圓曲線を挿入せざる所謂“全緩和屈曲”に用ひ得る。なほこの種の曲線形として提案されてゐるものに Lemniscate¹⁾と Clothoid がある。何れも一長一短にして夫々特徴を有するが新曲線にあつては曲率變化の割合が最も急速なるため曲線長が短くてすみ、高速市街鐵道に於ける如き急角度の曲線挿入を必要とする場合等にも有利の様に思はれる。

2. 算式の誘導

座標原點を始曲點にとり曲線上の點に對し次の記號を用ひる。

x : 横距 (始曲點から接線に沿ふて計る), y : 縦距, z : 弦長, l : 曲線長, δ : 偏角,
 θ : ラセン角, R : 曲率半徑

速度 v が一定のとき緩和曲線の方程式を導くのに色々の假定があるが筆者は c を比例常數として $c = a^2/2$ と置き $R = c/x$ に對應する曲線を取り扱ふ。

$$\text{基本式は } \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2} / \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{2x}$$

楕圓積分を用ひるに當り次の變數置換を行ふ。

$$\frac{x}{a} = t = \cos \varphi \leq 1$$

$$\text{母數 } k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ, \quad \text{週期常數 } K = 1.8540746\dots$$

積分の結果

$$y = \int_0^x \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[2E - F \right]_{\varphi}^{n/2}$$

$$l = a^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left\{ K - F(\varphi) \right\}$$

$$\tan \theta = \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}, \quad \tan \delta = \frac{y}{at}, \quad R = \frac{a}{2t}$$

かりに級數展開を用ひるとすれば

$$y = \frac{x^3}{3a^2} (1 + 0.2143 \cdot t^4 + 0.1023 \cdot t^8 + 0.0625 \cdot t^{12} + \dots)$$

となり、 t が微小なときは別として一般に收斂が困難である。極限に於て $t=0$ とすれば $y=x^3/3a^2$ となり所謂“三次拋物線”に一致する。

なほ本曲線の極限點に於ては $x=a, \theta=90^\circ$ となるから切線交角の限度は 180° となる。横勾配 ϵ は $\epsilon = v^2/gR$

* 工學士 神戸高等工業學校教授

1) 久野博士“レムニスケート曲線表”土木學會誌第 23 卷第 1 號

で計算されるが茲に g は重力加速度とす。

3. 数値表の作製

[A] 曲線全體の形を定める表

之は常數 a に支配されない。表-1 には x/a を 0 から 1 まで 0.005 間隔にとり $y/a, l/a, z/a, \delta, \theta$ の値を記載する。表-2 にはラセン角 θ を 0° から 90° まで $30'$ 間隔にとつた場合を示す。

[B] 中點に於けるラセン角 θ_c と半径 R_c を與へた場合、圓曲線を挿入せざる“全緩和屈曲”にあつては C 點は全曲線の中點を示し、切線交角を I とすれば $I=2\theta_c$ となる。もしも圓曲線を挿入する場合には C 點は緩和曲線と圓との接續點を意味す。表-3 には次の値が記載される。即ち

$$\begin{aligned} x_c/R_c &= 2l^2/a, \\ y_c/R_c &= 2lc/a, \\ l_c/R_c &= 2l/a \end{aligned}$$

なほ偏角 δ は表-2 に於ける値と同一である。

中間點に對しては表-1 或は表-2 を使用するがこの場合、常數としては $a=2R_c l_c$ を用ひればよい。

4. 使用例

全緩和屈曲にして $I=60^\circ, \theta_c=I/2=30^\circ, R_c=120$ m の場合を考へる。中點 C に對しては表-3 (其の 3) により

$$\begin{aligned} x_c &= 1.000000 \cdot R_c = 120 \text{ m}, \\ y_c &= 0.176858 \cdot R_c = 21.223, \\ l_c &= 1.028057 \cdot R_c = 123.367, \\ z_c &= 1.015519 \cdot R_c = 121.862, \\ a &= 1.414214 \cdot R_c = 169.706 \end{aligned}$$

表-2 (其の 3) により

$$t_c = x/a = 0.707107, \quad \delta_c = 10^\circ 01' 46''$$

かりに中間點の位置を $t=0.1, 0.2, \text{etc.}$ の如くとれば

點 ($t=0.1$) に對しては表-1 (其の 1) により

$$\begin{aligned} x &= 0.1 \cdot a = 16.971 \text{ m}, \\ y &= 0.098833 \cdot a = 0.0566 \text{ m}, \\ l &= 0.100001 \cdot a = 16.971, \\ z &= 0.100001 \cdot a = 16.971, \\ \delta &= 0^\circ 11' 28'' \end{aligned}$$

點 ($t=0.6$) に對しては表-1 (其の 4) により

$$\begin{aligned} x &= 0.6 \cdot a = 101.824 \text{ m}, \\ y &= 0.074134 \cdot a = 12.581 \text{ m}, \\ l &= 0.608230 \cdot a = 103.220, \\ z &= 0.604563 \cdot a = 102.598, \\ \delta &= 7^\circ 02' 37'' \end{aligned}$$

表-1. (其の 1)

x/a	y/a	l/a	z/a	δ	θ
0	0	0	0	0°	0°
0.005	0.07 4	0.005000	0.005000	0° 0' 17"	0° 0' 52"
0.010	0.03 33	0.010000	0.010000	0° 0' 49"	0° 0' 21"
0.015	0.05 113	0.015000	0.015000	0° 0' 15"	0° 0' 46"
0.020	0.07 267	0.020000	0.020000	0° 0' 27"	0° 0' 23"
0.025	0.09 521	0.025000	0.025000	0° 0' 43"	0° 0' 09"
0.030	0.09 900	0.030000	0.030000	0° 0' 02"	0° 03' 06"
0.035	0.09 1429	0.035000	0.035000	0° 0' 24"	0° 04' 13"
0.040	0.10 2133	0.040000	0.040000	0° 0' 50"	0° 05' 30"
0.045	0.10 3038	0.045000	0.045000	0° 0' 19"	0° 06' 58"
0.050	0.10 4167	0.050000	0.050000	0° 0' 52"	0° 08' 34"
0.055	0.10 5546	0.055000	0.055000	0° 0' 23"	0° 10' 24"
0.060	0.10 7200	0.060000	0.060000	0° 0' 07"	0° 12' 23"
0.065	0.10 9154	0.065000	0.065000	0° 0' 50"	0° 14' 31"
0.070	0.10 1143	0.070000	0.070000	0° 0' 37"	0° 16' 51"
0.075	0.10 1406	0.075000	0.075000	0° 0' 46"	0° 19' 20"
0.080	0.10 1707	0.080000	0.080000	0° 0' 20"	0° 22' 00"
0.085	0.10 2047	0.085000	0.085000	0° 0' 17"	0° 24' 50"
0.090	0.10 2430	0.090001	0.090000	0° 0' 19"	0° 27' 51"
0.095	0.10 2858	0.095001	0.095000	0° 0' 21"	0° 31' 02"
0.100	0.10 3333	0.100001	0.100001	0° 0' 11"	0° 34' 23"
0.105	0.10 3859	0.105001	0.105001	0° 0' 12"	0° 37' 54"
0.110	0.10 4436	0.110002	0.110001	0° 0' 13"	0° 41' 36"
0.115	0.10 5067	0.115002	0.115001	0° 0' 15"	0° 45' 28"
0.120	0.10 5759	0.120003	0.120001	0° 0' 16"	0° 49' 30"
0.125	0.10 6512	0.125003	0.125002	0° 0' 17"	0° 53' 43"
0.130	0.10 7325	0.130004	0.130002	0° 0' 19"	0° 58' 06"
0.135	0.10 8200	0.135005	0.135003	0° 0' 20"	1° 02' 39"
0.140	0.10 9149	0.140005	0.140003	0° 0' 22"	1° 07' 23"
0.145	0.10 10116	0.145007	0.145004	0° 0' 24"	1° 12' 17"
0.150	0.10 11225	0.150008	0.150004	0° 0' 25"	1° 17' 21"
0.155	0.10 1242	0.155009	0.155005	0° 0' 27"	1° 22' 36"
0.160	0.10 1366	0.160011	0.160006	0° 0' 29"	1° 28' 01"
0.165	0.10 1498	0.165012	0.165007	0° 0' 31"	1° 33' 36"
0.170	0.10 1638	0.170014	0.170009	0° 0' 33"	1° 39' 22"
0.175	0.10 1787	0.175016	0.175009	0° 0' 35"	1° 45' 18"
0.180	0.10 1945	0.180019	0.180011	0° 0' 37"	1° 51' 24"
0.185	0.10 2111	0.185022	0.185012	0° 0' 39"	1° 57' 41"
0.190	0.10 2287	0.190025	0.190014	0° 0' 41"	2° 04' 08"
0.195	0.10 2473	0.195028	0.195016	0° 0' 43"	2° 10' 45"
0.200	0.10 2668	0.200032	0.200018	0° 0' 45"	2° 17' 33"

表-1. (其の2)

Table with 6 columns: x/a, y/a, l/a, z/a, δ, θ. Rows range from 0.200 to 0.400.

表-1. (其の3)

Table with 6 columns: x/a, y/a, l/a, z/a, δ, θ. Rows range from 0.400 to 1.000.

表-1. (其の4)

Table with 6 columns: x/a, y/a, l/a, z/a, δ, θ. Rows range from 0.600 to 0.800.

表-1. (其の5)

Table with 6 columns: x/a, y/a, l/a, z/a, δ, θ. Rows range from 0.800 to 1.000.

