論　説　報　告

第26卷第10號　昭和15年10月

基礎微分方程式を冪級數に展開して解き變斷面壓縮材の限界荷重を求むる方法

會員　横　田　周　平*

要旨　變斷面壓縮材の撓曲線に對する微分方程式 $EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0$ を冪級數に展開して解き之より限界荷重を求めんとするものである。$I(x)$ の形如何に依つてはかゝる方法の適用出來ない場合のある事は勿論であるが，中央程曲げ剛さの大きい樣な實用的な壓縮材に對しては此の方法は常に適用し得るであらう。本論文に於て取扱ふ場合は最も實用的と目される形，即ち慣性モーメントが次式の如く變化する壓縮材に就てである。

$$I(x)=I_c-(I_c-I_e)\left(\frac{2x}{L}\right)^n$$

但し I_c, I_e は夫々壓縮材の中央及び兩端の慣性モーメントを表はし，L は長さであり，中央を原點に取つて居る。

$n=1$ の場合は既に解決されてゐるが $n=2$ 以上の場合は正確な限界荷重は未だ求められてゐなかつた樣である。

目　次

1. 緒　言
2. 慣性モーメントの取り方
3. 基礎微分方程式を冪級數に展開して解く事
4. 數値計算
5. 結　言

1. 緒　言

壓縮材の撓曲線に對する微分方程式は良く知られてゐる樣に次の式で表はされる。座標は **圖-1** の如く取る。

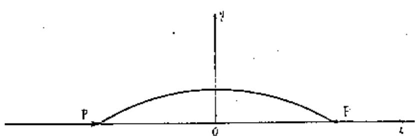
$$EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

但し　E: 材料の彈性係數

P: 中心軸荷重

I: 壓縮材斷面の慣性モーメントで一般に x の函數である

圖-1.



(1) の微分方程式を解けば 2 つの積分常數を有する一般解を得る。之等を定むべき 2 つの境界條件がある譯であるが其の中の 1 つの條件で 1 つの積分常數が定まり殘餘の條件は他の積分常數を決定せずに (1) 式中の 3 つの量 E, I, P と壓縮材の長さ L とを關係づける。微分方程式の解としては之は變則であるが之に依つて正しい限界荷重が求められる。

上述の如き手續きで限界荷重が求められるのであるから (1) 式を冪級數の形で解いても必ずその中に限界荷重を決定すべき手掛りがある筈である。

從來變斷面壓縮材の挫屈に關しては (1) 式が既知の函數で解き得る樣な $I(x)$ に就てのみ論ぜられ，任意に $I(x)$ を與へて限界荷重を求め樣とする努力は餘り行はれなかつた樣に思はれる。此の小論が此の方面に幾分でも寄與する處あれば幸である。

又應用力學上の諸問題の解き得るか解き得ないかの判斷は基礎となる微分方程式の解き得るか解き得ないかが基準となるのであるが，之が既知の函數で解き得ないとしても放棄する必要はなく正直に級數に展開して解き解

*　内務技師　工學士　内務省土木試驗所

決し得る場合もあるのであつて此の計算が其の一例ともなれば亦幸である。

著者はかゝる方法で今日迄解けないと謂はれてゐた變斷面梁の固有振動周期の計算を進めつゝある。

以下に述べる處の計算は基礎微分程式を羃級數に展開して解く一般論ではなく或る特定の場合に就ての計算であるが之を以て一般的の場合を推す事が出來るであらう。

2. 慣性モーメントの取り方

$I(x)$ が收斂する級數或は有限項の整式の様な形であれば (1) 式を級數で解く事が可能であらう。又實用的な壓縮材の場合には必ず $I(x)$ は收斂する級數又は有限項の整式で表はし得られるであらう。

$I(x)$ の一般的な形に就て (1) 式を解く事は徒らに複雜になるだけでの事であるから，以下の計算に於ては最も實際的で簡單な $I(x)$ の形を先づ考へて之に就て解く事とする。

實際に壓縮材を設計する場合には支ふべき高さと荷重が與へられるのが通常であらう。與へられた荷重に對しては兩端の斷面積が先づ第一に決定される。從つて次に此の荷重を挫屈しない樣に支へる爲には斷面の慣性モーメントを中央部でどの程度に大きく取らなければならないかを解決すれば良いのである。壓縮材の自重を考へないとすれば柱の中央の斷面の慣性モーメントを最大に取るのが最も無駄のない形である事は明らかである。從つて挫屈しない爲には兩端から中央に向つて慣性モーメントの大きくなつて行き方を決めれば良い事になる。壓縮材の中央を座標の原點に取り上記の如き慣性モーメントの變化を最も簡單な式で表はせば次の形となるであらう。

$$I(x)=I_c-(I_c-I_e)\left(\frac{2x}{L}\right)^n \quad \cdots\cdots(2)$$

但し　I_c：壓縮材の中央斷面の慣性モーメント

I_e：壓縮材の兩端斷面の慣性モーメント

L：壓縮材の長さ

n：正の整數

$I(x)$ の形には此の外無數に考へられるが實用的には此の形で充分と考へる。又此の形であれば基礎方程式 (1) を收斂する級數で解く事が非常に簡單となる。

I_e を基準とし I_c を定むべきであるが式の取扱ひの上からは假りに I_c を基準に取つて計算を進め最後に I_e 基準に換算し直す事とする。

著者の先に發表せる “勢力式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法”（土木試驗所報告　第 44 號，昭和 14 年 2 月）に於ても斷面の慣性モーメントを (2) 式の如く取り $n=1,2,3,4$ の場合に就き數値計算を行つた。其の際得られた近似値は以下の所論に於て利用する事が出來，又上記の近似計算法の精度を檢討する事が出來た。

斯くして實際に計算した結果變斷面壓縮材の限界荷重は E, L, I_c (又は I_e), $I_e/I_c, n$ の函數として求められる。但し最初の 3 つの量は限界荷重を與へる式に常に現はれて來る樣に $\dfrac{EI_c}{L^2}\left(\text{又は } \dfrac{EI_e}{L^2}\right)$ の形で現はれるので問題外となる。從つて限界荷重は I_e/I_c と n の 2 つの量の函數となる。之で計算して求めた結果が一つの圖表の内に收められるので非常に便利である。

3. 基礎微分方程式を羃級數に展開して解く事

$$\frac{2x}{L}=\lambda,\quad \frac{PL^2}{4EI_c}=a^2,\quad 0\leqq p^n=\frac{I_c-I_e}{I_c}\leqq 1 \quad \cdots\cdots(3)$$

と置き換へて (2) 式を (1) 式に代入すれば基礎方程式は次の如くなる。

$$(1-p^n\lambda^n)\frac{d^2y}{d\lambda^2}+a^2y=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

此の解を次の如き級數

$$y=\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu\lambda^\mu \qquad (5)$$

で求められると假定して之を (4) 式に代入すれば

$$(1-p^n\lambda^n)\sum_{\mu=2}^{\infty}A_\mu\mu(\mu-1)\lambda^{\mu-2}+a^2\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu\lambda^\mu\equiv 0$$

和の形を適當に組換へて整理すれば

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}\{A_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)+a^2A_\mu\}\lambda^\mu$$

$$+\sum_{\mu=0}^{\infty}\{A_{n+\mu+2}(n+\mu+2)(n+\mu+1)+a^2A_{n+\mu}-p^nA_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)\}\lambda^{n+\mu}\equiv 0 \qquad (6)$$

對稱的な壓縮材の半分を考へる事とすれば $0\leqq\lambda\leqq 1$ であるが此の範圍の λ の全ての値に對して (6) 式が恒等的に成立する爲には λ の各羃の係數は零でなければならない。即ち λ^{n-1} の項迄の係數に對しては

$$A_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)+a^2A_\mu=0 \qquad (7)$$

λ^n 以下の項の係數に對しては

$$A_{n+\mu+2}(n+\mu+2)(n+\mu+1)+a^2A_{n+\mu}-p^nA_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)=0 \qquad (8)$$

が成立する。

微分方程式の本來の性質から謂へば 2 つの境界の條件より (5) 式に於ける A_0, A_1 が決定され，A_2 以下の係數は (7) 乃至 (8) 式に依り順次に決定される筈であるが，壓縮材の挫屈の場合に於ては基礎方程式 (1) を既知の函數で解き得た場合と同樣に一つの積分常數 A_0 は未決定の儘殘され，級數の內部的機構から限界荷重が決定される事になる。

即ち **圖-1** の如く壓縮材が張出したとすれば境界條件は

$$\lambda=0 \quad に於て \quad \frac{dy}{d\lambda}=0$$

$$\lambda=1 \quad に於て \quad y=0$$

の 2 つである。前者より直ちに

$$A_1=0$$

なる事が判る。後者の條件より强ひて A_0 を決定し樣とすれば $A_0=0$ となる。$A_0=A_1=0$ となれば (7) 乃至 (8) 式に依つて A_2 以下の各係數は全て零となる。即ち函數は消滅し挫屈は起らない事になる。$A_0\neq 0$ とすれば後者の條件は級數中に現はれる a^2, p^n, n の間一つの關係を作り上げるのであつて之が限界荷重を決定する手掛りとなるのである。

(i) $n=1$ の場合

先づ $n=1$ の場合に就て係數を決定して見る。此の場合 (7) 式は成立せず (8) 式のみより係數の間の關係が求められる。即ち

$$A_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1)-pA_{\mu+1}(\mu+1)\mu+a^2A_\mu=0 \qquad (9)$$

$A_1=0$, A_0 は未定の儘とし (9) 式に於て $\mu=0, 1, 2\cdots\cdots$ と置き A_2 以下を計算すれば次の如くである。

$$A_2=-\frac{1}{2!}a^2A_0$$

$$A_3=-\frac{1}{3!}a^2pA_0$$

$$A_4=\left\{-\frac{2!}{4!}a^2p^2+\frac{1}{4!}a^4\right\}A_0$$

$$A_5=\left\{-\frac{3!}{5!}a^2p^3+\frac{2^2}{5!}a^4p\right\}A_0$$

$$A_6=\left\{-\frac{4!}{6!}a^2p^4+\frac{3^2\cdot 2!}{6!}a^4p^2-\frac{1}{6!}a^6\right\}A_0$$

$$A_7=\left\{-\frac{5!}{7!}a^2p^5+\frac{4^2\cdot 3!}{7!}a^4p^3-\frac{3^2}{7!}a^6p\right\}A_0$$

$$A_8=\left\{-\frac{6!}{8!}a^2p^6+\frac{5^2\cdot 4!}{8!}a^4p^4-\frac{3^2\cdot 2^2\cdot 2!}{8!}a^6p^2+\frac{1}{8!}a^8\right\}A_0$$

$$A_9=\left\{-\frac{7!}{9!}a^2p^7+\frac{6^2\cdot 5!}{9!}a^4p^5-\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 3!}{9!}a^6p^3+\frac{4^2}{9!}a^8p\right\}A_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之等の値を (5) 式に代入して $\lambda=1$ に於て $y=0$ なる條件を入れゝば a^2 と p に關する複級數の總和が零に等しいと謂ふ事になる。卽ち a^2 と p との函數關係が求められたのであつて限界荷重が p の函數として決定された事になる。此の式を a^2 に就て整理し直せば次の樣になる。

$$0=1-\phi_{1,2}(p)a^2+\phi_{1,4}(p)a^4-\phi_{1,6}(p)a^6+\phi_{1,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

但し

$$\phi_{1,2}(p)=\frac{1}{2!}+\frac{1!}{3!}p+\frac{2!}{4!}\cdot p^2+\cdots\cdots+\frac{m!}{(m+2)!}p^m+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{2^2\cdot 1!}{5!}p+\frac{3^2\cdot 2!}{6!}p^2+\cdots\cdots+\frac{(m+1)^2\cdot m!}{(m+4)!}\cdot p^m+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{3^2\cdot 1!}{7!}p+\frac{6^2\cdot 2!}{8!}p^2+\frac{10^2\cdot 3!}{9!}p^3+\frac{15^2\cdot 4!}{10!}p^4+\frac{21^2\cdot 5!}{11!}p^5+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{4^2\cdot 1!}{9!}p+\frac{10^2\cdot 2!}{10!}p^2+\frac{20^2\cdot 3!}{11!}p^3+\frac{35^2\cdot 4!}{12!}p^4+\frac{56^2\cdot 5!}{13!}p^5+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{5^2\cdot 1!}{11!}p+\frac{15^2\cdot 2!}{12!}p^2+\frac{35^2\cdot 3!}{13!}p^3+\frac{70^2\cdot 4!}{14!}p^4+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之等の式に依つて p の各値に對して (但し $0\leqq p\leqq 1$) a^2 の値を (10) 式に於て求むれば良い。$\phi(p)$ は全て收斂する級數である事は明瞭である。(10) なる級數の收斂は別に證明を要する問題であるが嚴格な證明は困難であらう。然しながら p が小なる時は $\phi_{1,2}(p)$, $\phi_{1,4}(p)$, $\cdots\cdots$ は $\frac{1}{2!}$, $\frac{1}{4!}$, $\frac{1}{6!}\cdots\cdots$ と減少するのであるから a^2 の有限な全ての値に對して (10) 式は收斂するものである事が想像される。實際に計算して見れば現在の目的に對して (10) 式の收斂する事は明瞭である。

函數 $\phi_{1,2}(p)$, $\phi_{1,4}(p)\cdots\cdots$ の各係數は全て機械的な手續きで簡單に求められるのであつて必ず階乘と自乘の形で表はされるのがその著るしい特徴である。

之等の各係數間の關係を見る爲には式は長くなるが次の如く書き直す方が便利である。又 $n=2, 3, 4\cdots\cdots$ の場合は次の形を基準として機械的に導き出せる事は後に示す通りである。

$$\phi_{1,2}(p)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}p+\frac{1}{3\cdot 4}p^2+\cdots\cdots+\frac{1}{(m+1)(m+2)}p^m+\cdots\cdots$$

$$\phi_{1,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{4\cdot 5}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)p+\frac{1}{5\cdot 6}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)p^2+\frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}\right)p^3+\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,6}(p)=\frac{1}{6!}&+\frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\right)p+\frac{1}{7\cdot 8}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\right.\\&\left.+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\right)p^2+\frac{1}{8\cdot 9}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\right)p^3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,8}(p)=\frac{1}{8!}&+\frac{1}{8\cdot 9}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\right)p\\&+\frac{1}{9\cdot 10}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 8}\right)p^2+\frac{1}{10\cdot 11}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{1}{8\cdot 9}\right)p^3\\&+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\phi_{1,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{10\cdot 11}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{1}{8\cdot 9}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{1}{8\cdot 9}\right)p+\frac{1}{11\cdot 12}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots\cdots+\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 8}\cdot\frac{1}{9\cdot 10}\right)p^2+\cdots\cdots$$

…………………………………………

一般に

$$\phi_{1,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{\nu,1}+B_{\nu,2}p^2+\cdots\cdots+B_{\nu,m}p^m+\cdots\cdots,\qquad \nu=2,4,6,\cdots\cdots$$

とすれば

$$B_{2,m}=\frac{1}{(m+1)(m+2)},\qquad m=0,1,2\cdots\cdots\cdots$$

であり $\nu=4$ 以下の場合の各係數には次の關係式が成立する。

$$B_{4,m}=\frac{1}{(m+3)(m+4)}(B_{2,0}+B_{2,1}+B_{2,2}+\cdots\cdots+B_{2,m})$$
$$=\frac{1}{(m+3)(m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,m}$$
$$B_{6,m}=\frac{1}{(m+5)(m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,m}$$
$$B_{8,m}=\frac{1}{(m+7)(m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,m}$$

………………………

從つて $\phi_{1,4}(p),\ \phi_{1,6}(p),\cdots\cdots$ の係數は $\phi_{1,2}(p)$ の係數より順次機械的計算に依つて求められる。$n=2,3,4,\cdots\cdots$ の場合に於ても同様の關係式を見出す事が出來る。

(ii) $n=2$ の場合

(5) 式に於ける係數 A_2, A_3 に對しては (7) 式, A_4 以下に對しては (8) 式に依つて $n=1$ の場合と同様に各係數を計算すれば次の通りである。

$$A_1=A_2=A_3=\cdots\cdots=A_{2\mu+1}=\cdots\cdots=0$$
$$A=-\frac{1}{2!}a^2A_0$$
$$A_4=\frac{1}{4!}a^2(a^2-1\cdot 2\cdot p^2)A_0$$
$$A_6=-\frac{1}{6!}a^2(a^2-1\cdot 2\cdot p^2)(a^2-3\cdot 4\cdot p^2)A_0$$
$$A_8=\frac{1}{8!}a^2(a^2-1\cdot 2\cdot p^2)(a^2-3\cdot 4\cdot p^2)(a^2-5\cdot 6\cdot p^2)A_0$$
$$A_{10}=-\frac{1}{10!}a^2(a^2-1\cdot 2\cdot p^2)(a^2-3\cdot 4\cdot p^2)(a^2-5\cdot 6\cdot p^2)(a^2-7\cdot 8\cdot p^2)A_0$$

…………………………………………

之等の値を (5) 式に代入して $\lambda=1$ に於て $y=0$ と置き a^2 に就き整理し直せば (10) 式と同様な形で次の (11) 式を得る。

$$0=1-\phi_{2,2}(p)a^2+\phi_{2,4}(p)a^2-\phi_{2,6}(p)a^6+\phi_{2,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

茲に

$$\phi_{2,2}(p)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}p^2+\frac{1}{5\cdot 6}p^4+\cdots\cdots+\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}p^{m}+\cdots\cdots$$
$$\phi_{2,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{5\cdot 6}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)p^2+\frac{1}{7\cdot 8}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}\right)p^4+\frac{1}{9\cdot 10}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8}\right)p^6+\cdots\cdots$$
$$\phi_{2,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{7\cdot 8}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\right)p^2+\frac{1}{9\cdot 10}\left(\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{7\cdot 8}\right.$$

$$+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\Big)p^4+\frac{1}{11\cdot12}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\Big)p^6+\cdots\cdots$$

$$\phi_{2,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{9\cdot10}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\Big)p^2$$
$$+\frac{1}{11\cdot12}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\Big)p^4$$
$$+\frac{1}{13\cdot14}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\Big)p^6+\cdots\cdots$$

$$\phi_{2,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{11\cdot12}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}$$
$$+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\Big)p^2$$
$$+\frac{1}{13\cdot14}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\Big)p^4+\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$n=1$ の場合と同様に各係數の間には次の關係式を見出し得る。

$$\phi_{2,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{\nu,2}p^2+B_{\nu,4}p^4+\cdots\cdots+B_{\nu,2m}p^{2m}+\cdots\cdots,\qquad \nu=2,4,6\cdots\cdots$$

$$B_{2,2m}=\frac{1}{(2m+1)(2m+2)},\qquad m=0,$$

$$B_{4,2m}=\frac{1}{(2m+3)(2m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,2m}$$

$$B_{6,2m}=\frac{1}{(2m+5)(2m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,2m}$$

$$B_{8,2m}=\frac{1}{(2m+7)(2m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,2m}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(iii)　**$n=3$ の場合**

$n=1,\ 2$ の場合と同樣の手續きに依つて $n=3$ の場合の $\phi(p)$ を求むれば次の如くである。

$$0=1-\phi_{3,2}(p)a^2+\phi_{3,4}(p)a^4-\phi_{3,6}(p)a^6+\phi_{3,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\phi_{3,2}(p)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}p^3+\frac{1}{7\cdot8}p^6+\cdots\cdots+\frac{1}{(3m+1)(3m+2)}p^{3m}+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{6\cdot7}\Big(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}\Big)p^3+\frac{1}{9\cdot10}\Big(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{7\cdot8}\Big)p^6+\frac{1}{12\cdot13}\Big(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{10\cdot11}\Big)p^9+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{8\cdot9}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\Big)p^3$$
$$+\frac{1}{11\cdot12}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\Big)p^6$$
$$+\frac{1}{14\cdot15}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{10\cdot11}\cdot\frac{1}{12\cdot13}\Big)p^9+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{10\cdot11}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\Big)p^3$$
$$+\frac{1}{13\cdot14}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\Big)p^6$$
$$+\frac{1}{16\cdot17}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{10\cdot11}\cdot\frac{1}{12\cdot13}\cdot\frac{1}{14\cdot15}\Big)p^9+\cdots\cdots$$

$$\phi_{3,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{12\cdot13}\Big(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\cdot\frac{1}{10\cdot11}$$
$$+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\cdot\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\frac{1}{8\cdot9}\cdot\frac{1}{10\cdot11}\Big)p^3+\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

各係數の間には次の關係がある。

$$\phi_{3,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{3,\nu}p^3+B_{\nu,6}p^6+\cdots\cdots+B_{\nu,3m}p^{3m}+\cdots\cdots,\qquad \nu=2,4,6,\cdots\cdots$$

と置けば

$$B_{2,3m}=\frac{1}{(3m+1)(3m+2)},\qquad m=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

$$B_{4,3m}=\frac{1}{(3m+1)(3m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,3m}$$

$$B_{6,3m}=\frac{1}{(3m+5)(3m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,3m}$$

$$B_{8,3m}=\frac{1}{(3m+7)(3m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,3m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(iv) **$n=4$ の場合**

$$0=1-\phi_{4,2}(p)a^2+\phi_{4,4}(p)a^4-\phi_{4,6}(p)a^6+\phi_{4,8}(p)a^8-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{13}$$

$$\phi_{4,2}(p)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{5\cdot6}p^4+\frac{1}{9\cdot10}p^8+\cdots\cdots+\frac{1}{(4m+1)(4m+2)}p^{4m}+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,4}(p)=\frac{1}{4!}+\frac{1}{7\cdot8}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{5\cdot6}\right)p^4+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{9\cdot10}\right)p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,6}(p)=\frac{1}{6!}+\frac{1}{9\cdot10}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\right)p^4+\frac{1}{13\cdot14}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\right)p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,8}(p)=\frac{1}{8!}+\frac{1}{11\cdot12}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\right)p^4$$

$$+\frac{1}{15\cdot16}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\cdot\frac{1}{13\cdot14}\right)p^8+\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,10}(p)=\frac{1}{10!}+\frac{1}{13\cdot14}\left(\frac{1}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{1}{5\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot8}\cdot\frac{1}{9\cdot10}\cdot\frac{1}{11\cdot12}\right)p^4+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi_{4,\nu}(p)=B_{\nu,0}+B_{\nu,4}p^4+B_{\nu,8}p^8+\cdots\cdots+B_{\nu,4m}p^{4m}+\cdots\cdots,\qquad \nu=2,4,6,\cdots\cdots$$

と置けば各係數の間には次の關係が成立する。

$$B_{2,4m}=\frac{1}{(4m+1)(4m+2)},\qquad m=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$B_{4,4m}=\frac{1}{(4m+3)(4m+4)}\sum_{m=0}^{m}B_{2,4m}$$

$$B_{6,4m}=\frac{1}{(4m+5)(4m+6)}\sum_{m=0}^{m}B_{4,4m}$$

$$B_{8,4m}=\frac{1}{(4m+7)(4m+8)}\sum_{m=0}^{m}B_{6,4m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$n=1,2,3,4$ の場合を通じて $p^n=0$ と置けば (10), (11), (12), (13) の各式は

$$0=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}+\frac{a^6}{6!}+\cdots\cdots\qquad =\cos a$$

となり，明らかに

$$a=\frac{\pi}{2}$$

であつて，此れは Euler の限界荷重 $P=\pi^2\dfrac{EI_0}{L^2}$ を與へる。

$n=5$ 以下の場合も以上の結果より類推して容易に導かれるであらう。

$n=\infty$ の場合は曲げ剛さ EI_c なる等斷面の壓縮材と同じになる。

4. 數 値 計 算

$\Phi_{n,\nu}(p)$ ($n=1,2,3,4$; $\nu=2,4,6,\cdots\cdots$) は $0\leqq p^n\leqq 1$ の範圍で收斂級數である p^n の各値に對して $\phi_{n,\nu}(p)$ の數値を計算し之等の數値を夫々 (10), (11), (12), (13) の各式に代入し之等の式を滿足する α^2 の値を求むれば問題は解決される。

本計算に於ては $p^n=0.1, 0.2, 0.3, \cdots\cdots 0.8$ の場合を行つた。$p^n=0.9, 1.0$ の場合は收斂が遲いので放棄した。$p^n=0.8$ に於ても $\nu=2$ 及び 4 に對して $\phi(p)$ の値を小數第 6 位迄正確に求むる爲には 30 項程度を取らなければならなかつた。$p^n=0$ に於ては $\alpha=\frac{\pi}{2}$ となる事は前述の通りである。

$\phi_{n,\nu}(p)$ の計算値を示せば **表-1** の如くである。以上で $\phi_{n,\nu}(p)$ の數値が決定された故 (10) 乃至 (13) 式に依つて $n=1\sim4$ の場合の α^2 の値が決定される筈である。小數第 6 位迄を問題とする時 $\phi_{n,12}(p)\alpha^{12}$ 以下の項は無視する事が出來，結局 α^2 に關して 5 次の代數方程式を解く事になるが，之は代數的には解き得ないので試算法に依り (10)〜(13) 式を滿足する α^2 の値を決定した。

α^2 の近似値は前に發表した“勢力式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法”（土木試驗所報告第 44 號）に於て求められてあるので非常に便利である。**圖-2** に於ける破線は此の近似値を示す。**圖-2** は $4\alpha^2$（限界荷重を $\alpha\frac{EI_c}{L^2}$ で表はした時の α に相當する數値）と $p^n=1-\frac{I_e}{I_c}$ の關係を示す曲線である。

$n=1$ の場合に於ける α^2 の數値推定の仕方を說明すれば次の通りである。$n=1$ の場合の $p=0$, $p=1$ に對しては限界荷重は夫々 $9.8696\frac{EI_c}{L^2}$ (Euler の限界荷重), $5.764\frac{EI_c}{L^2}$（田中博士，土木學會誌 15 卷 p. 230）となる。

表-1. $\phi_{n,\nu}(p)$ の 數 値

p^n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\phi_{1,2}(p)$	0.5175 54	0.5371 29	0.5591 95	0.5844 04	0.6137 06	0.6485 66	0.6914 45	0.7470 50
$\phi_{1,4}(p)$	0.0452 71	0.0495 14	0.0545 90	0.0607 82	0.0685 27	0.0785 52	0.0921 66	0.1121 18
$\phi_{1,6}(p)$	0.0015 871	0.0018 336	0.0021 464	0.0025 539	0.0031 026	0.0036 748	0.0050 328	0.0069 502
$\phi_{1,8}(p)$	0.0000 298	0.0000 364	0.0000 453	0.0000 577	0.0000 756	0.0001 030	0.0001 484	0.0002 332
$\phi_{1,10}(p)$	0.0000 0035	0.0000 0045	0.0000 0060	0.0000 0081	0.0000 0115	0.0000 0171	0.0000 0273	0.0000 0490
$\phi_{1,12}(p)$	0.0000 0000 2	0.0000 0000 38	0.0000 0000 53	0.0000 0000 78	0.0000 0001 19	0.0000 0001 93	0.0000 0003 40	
$\phi_{2,2}(p)$	0.5086 86	0.5181 63	0.5285 96	0.5402 04	0.5533 03	0.5683 67	0.5861 68	0.6080 95
$\phi_{2,4}(p)$	0.0437 29	0.0460 62	0.0487 32	0.0518 36	0.0555 13	0.0599 81	0.0656 17	0.0731 51
$\phi_{2,6}(p)$	0.0015 067	0.0016 449	0.0018 095	0.0020 094	0.0022 580	0.0025 776	0.0030 080	0.0036 315
$\phi_{2,8}(p)$	0.0000 278	0.0000 315	0.0000 361	0.0000 419	0.0000 494	0.0000 597	0.0000 744	0.0000 975
$\phi_{2,10}(p)$	0.0000 0032	0.0000 0038	0.0000 0045	0.0000 0054	0.0000 0067	0.0000 0087	0.0000 0115	0.0000 0163
$\phi_{3,2}(p)$	0.5051 88	0.5107 97	0.5169 09	0.5236 33	0.5311 26	0.5396 19	0.5494 86	0.5614 12
$\phi_{3,4}(p)$	0.0430 43	0.0445 72	0.0462 88	0.0482 38	0.0504 92	0.0531 55	0.0564 04	0.0605 72
$\phi_{3,6}(p)$	0.0014 699	0.0015 624	0.0016 693	0.0017 950	0.0019 456	0.0021 312	0.0023 691	0.0026 935
$\phi_{3,8}(p)$	0.0000 269	0.0000 294	0.0000 323	0.0000 359	0.0000 413	0.0000 460	0.0000 537	0.0000 649
$\phi_{3,10}(p)$	0.0000 0031	0.0000 0034	0.0000 0039	0.0000 0045	0.0000 0052	0.0000 0062	0.0000 0076	0.0000 0096
$\phi_{4,2}(p)$	0.5034 50	0.5071 61	0.5111 82	0.5155 78	0.5204 42	0.5259 12	0.5322 07	0.5397 25
$\phi_{4,4}(p)$	0.0426 63	0.0437 57	0.0449 72	0.0463 35	0.0478 87	0.0496 92	0.0518 53	0.0545 60
$\phi_{4,6}(p)$	0.0014 490	0.0015 165	0.0015 933	0.0016 817	0.0017 855	0.0019 103	0.0020 656	0.0022 701
$\phi_{4,8}(p)$	0.0000 264	0.0000 282	0.0000 303	0.0000 328	0.0000 359	0.0000 396	0.0000 445	0.0000 512
$\phi_{4,10}(p)$	0.0000 0030	0.0000 0033	0.0000 0036	0.0000 0040	0.0000 0045	0.0000 0051	0.0000 0060	0.0000 0072

之に對して著者の近似計算法に依る計算値は夫々 $10\frac{EI_c}{L^2}$, $6\frac{EI_c}{L^2}$ となる。$p=0$, $p=1$ に於ける之等の誤差を $p=0.1$ ～0.8 の間に直線的に配分し斯くして第 1 次的に a^2 の値を推定した。此の推定値は充分正確であつて試算を 3 回以上繰返す必要はなかつた。

$n=1$ の場合に就て試算の經過を示せば次の如くである。$n=2,3,4$ の場合も同樣に行はれた。

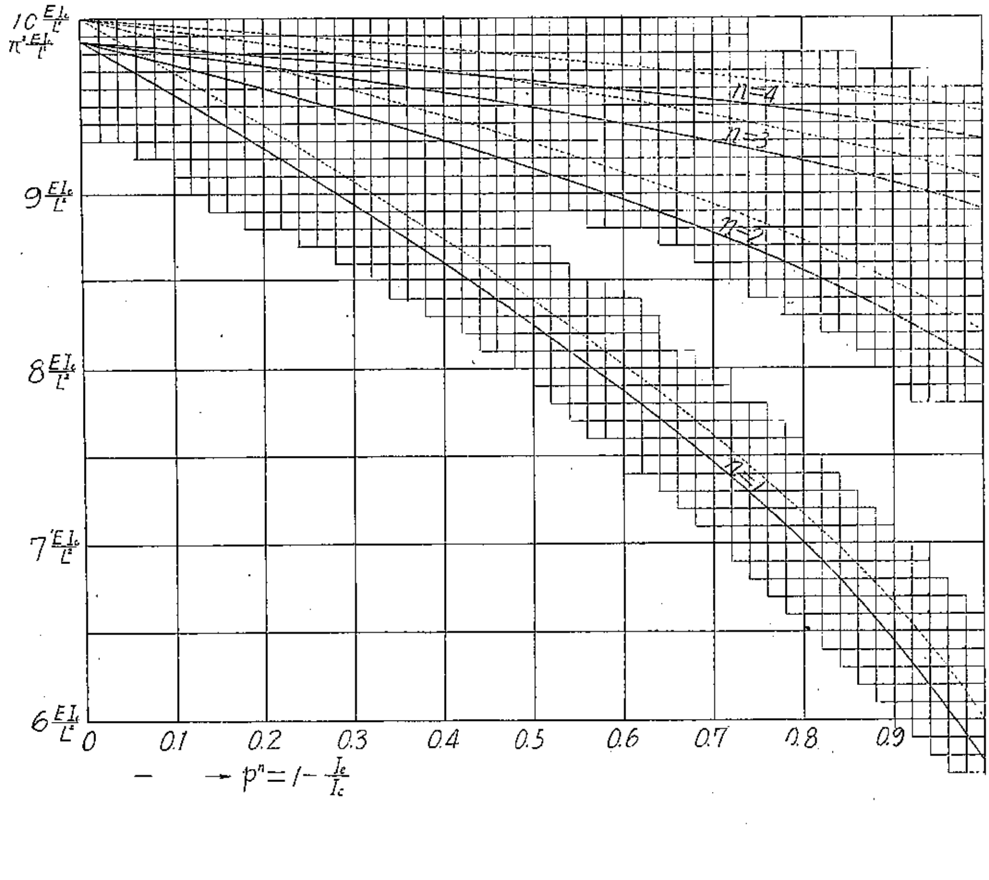
第 1 次試算と第 2 次試算の結果より比例部分の法則に依つて $4a^2$ の値を算出すれば **表-2** の如くである。

此の計算に於て a^2 は常に 1 より大である爲に $\phi_{1,2}(p)$, $\phi_{1,4}(p)$ は小數第 6 位迄, $\phi_{1,6}(p)$ $\phi_{1,8}(p)$ は小數第 7 位迄, $\phi_{1,10}(p)$ は小數第 8 位迄を夫々採らなければ試算に於ける小數第 6 位迄の正確さを揃へる事が出來なかつた。

第 1 次 試 算 ($n=1$).

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.57	9.26	8.94	8 61	8.25	7.88	7.47	7.00
a^2	2.3925	2.3150	2.2350	2.1525	2.0625	1,9700	1.8675	1.7500
1	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0009 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00
$-\phi_{1,2}(p)a^2$	−1.2382 49	−1.2434 54	−1.2498 01	−1.2579 30	−1.2657 69	−1.2776 75	−1.2912 74	−1.3073 38
$+\phi_{1,4}(p)a^4$	+0.2591 34	+0.2653 58	+0.2726 89	+0.2816 19	+0.2915 07	+0.3048 52	+0.3214 34	+0.3433 61
$-\phi_{1,6}(p)a^6$	−0.0217 35	−0.0227 49	−0.0239 63	−0.0254 70	−0.0272 21	−0.0296 24	−0.0327 78	−0.0372 48
$+\phi_{1,8}(p)a^8$	+0.0009 76	+0.0010 46	+0.0011 30	+0.0012 38	+0.0013 68	+0.0015 51	+0.0018 05	+0.0021 87
$:\phi_{1,10}(p)a^{10}$	−0.0000 27	−0.0000 30	−0.0000 33	−0.0000 37	−0.0000 43	−0.0000 51	−0.0000 62	−0.0000 80
$+\phi_{1,12}(p)a^{12}$	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 02
計	+0.0001 00	+0.0001 72	+0.0000 23	−0.0005 79	−0.0001 57	−0.0009 46	−0.0008 74	+0.0008 84

圖-2.



第 2 次 試 算 ($n=1$).

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$4a^2$	9.58	9.27	8.95	8.60	8.24	7.87	7.46	7.01
a^2	2.3950	2.3175	2.2375	2.1500	2.0600	1.9675	1.8650	1.7525
1	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00
$-\phi_{1,2}(p)a^2$	−1.2395 42	−1.2447 96	−1.2511 20	−1.2564 69	−1.2642 34	−1.2760 54	−1.2895 45	−1.3092 05
$+\phi_{1,4}(p)a^4$	+0.2596 76	+0.2659 30	+0.2733 00	+0.2809 65	+0.2908 01	+0.3040 79	+0.3205 74	+0.3443 43
$-\phi_{1,6}(p)a^6$	−0.0218 03	−0.0228 23	−0.0140 44	−0.0253 82	−0.0271 22	−0.0295 12	−0.0326 47	−0.0374 09
$+\phi_{1,8}(p)a^8$	+0.0009 80	+0.0010 50	+0.0011 35	+0.0012 33	+0.0013 61	+0.0015 43	+0.0017 95	+0.0022 00
$-\phi_{1,10}(p)a^{10}$	−0.0000 28	−0.0000 30	−0.0000 34	−0.0000 37	−0.0000 43	−0.0000 50	−0.0000 62	−0.0000 81
$-\phi_{1,12}(p)a^{12}$	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 01	+0.0000 02
計	−0.0007 16	−0.0006 68	−0.0007 62	+0.0003 11	+0.0007 64	+0.0000 07	+0.0001 16	−0.0001 50

斯くして $n=1$ の場合の正確な限界荷重が求められたので之と前記近似計算値の差を出し，$n=2,3,4$ の場合に就ても近似計算値に同率の誤差があるものと假定して a^2 を推定し，$n=1$ の場合と同様に大體 2 囘の試算に依つて正しい限界荷重を求むる事が出來た，計算結果は **表-2** に總括した。

表-2 をグラフで表はせば **圖-2** 實線に示される如くである (點線は著者の近似計算に依る數値を示す)。

以上は計算の都合に依つて壓縮材の中央斷面の慣性モーメント I_c を基準に取つたが實用上の便利からは I_e を基準に取る方が望ましい。

表-2. $4a^2$ の値

p^n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_e/I_c	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
PL^2/EI_c $(n=1)$	9.5712	9.2620	8.9403	8.6035	8.2483	7.8701	7.4612	7.0085
〃 $(n=2)$	9.7378	9.6000	9.4551	9.3020	9.1390	8.9636	8.7725	8.5607
〃 $(n=3)$	9.7998	9.7267	9.6498	9.5686	9.4825	9.3894	9.2887	9.1772
〃 $(n=4)$	9.8282	9.7848	9.7394	9.6915	9.6406	9.5862	9.5275	9.4630
〃 $(n\to\infty)$	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696

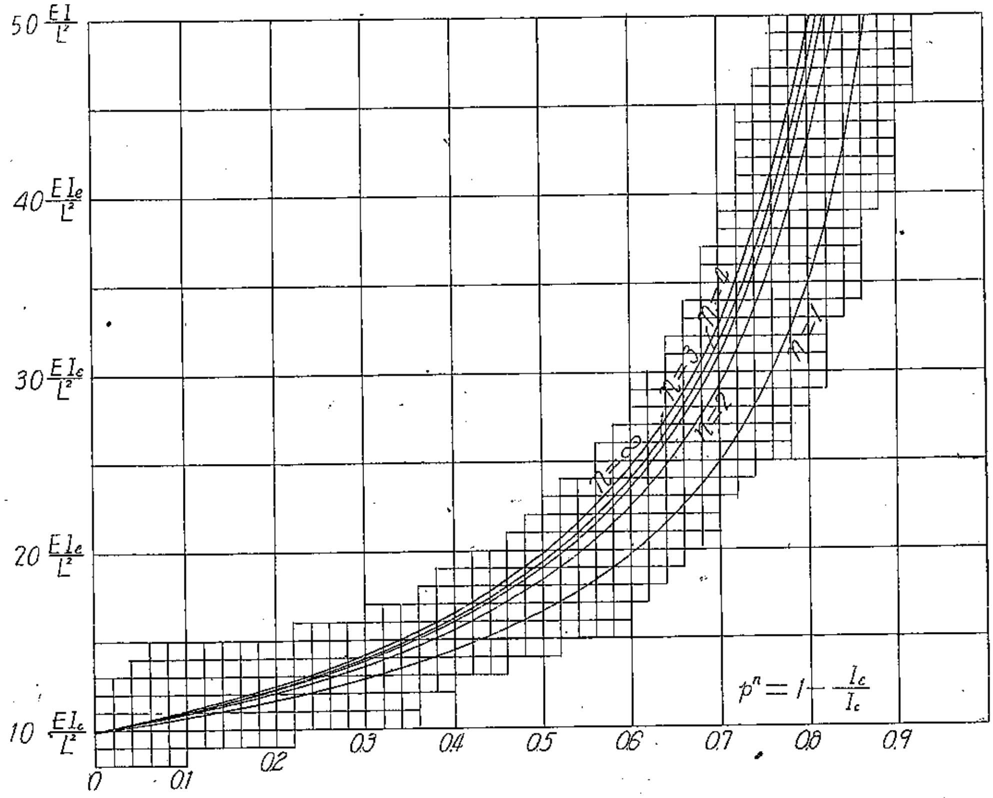
表-3. PL^2/EI_e と I_e/I_c の關係

p^n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_e/I_c	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
PL^2/EI_e $(n=1)$	10.635	11.578	12.772	14.339	16.497	19.675	24.871	35.043
〃 $(n=2)$	10.820	12.000	13.507	15.503	18.278	22.409	29.242	42.804
〃 $(n=3)$	10.889	12.158	13.785	15.948	18.965	23.474	30.962	45.886
〃 $(n=4)$	10.920	12.231	13.913	16.153	19.281	23.966	31.758	47.315
〃 $(n\to\infty)$	10.966	12.337	14.099	16.449	19.739	24.674	32.899	49.348

I_e を基準に取つて **表-2** を書き直せば **表-3** の如くなる。之をグラフに表はしたものが **圖-3** である。**圖-3** に依れば壓縮材が與へられた荷重に對して挫屈しない爲にはその中央を如何に膨ましたならば良いかゞ簡單に求められる。

$n\to\infty$ の場合は I_e なる慣性モーメントを有する等斷面壓縮材の場合に收斂する筈である。此の場合をも I_e 基準に換算すれば **圖-3** $n\to\infty$ に相等する曲線で示される。之に依つて $n=5$ 以上の場合が如何なる範圍に限られるかゞ判るであらう。

圖-3.



5. 結　言

變斷面壓縮材の撓曲線に對する微分方程式を冪級數に展開して解いて挫屈荷重を求むる事が出來る。微分方程式が既知の函數の形で解ける場合であつても その函數の數表を新に作製しなければ限界荷重が求められない樣な場合には却つて最初から冪級數に展開して解いた方が計算が樂な場合もあり得るであらう。

實用的な變斷面壓縮材の斷面の慣性モーメントは柱の中央を原點に取り (2) 式卽ち

$$I(x)=I_c-(I_c-I_e)\left(\frac{2x}{L}\right)^n$$

で最も簡單に表はされ，又此れで充分であらうと思はれる。かゝる變斷面壓縮材に關して上記の方法で $n=1, 2, 3, 4$ の場合の限界荷重を計算した結果は **表-2, 3** 或は **圖-2**（實線），**圖-3** に總括されてゐる。

前に發表した著者の勢力式に依る近似計算法に依る計算結果と本結果との比較は **圖-2** に示す如くであるが誤差は大體 2〜3% 程度で最も甚だしい場合で ($n=1$, $p=1$) 4% である。特殊な變斷面壓縮材で微分方程式を既知の函數に依つても解き得ず，又冪級數に展開しても甚だしく複雑となる樣な場合には著者の勢力式の 近似計算法に依つて 2〜3% の誤差の範圍で比較的簡單に挫屈荷重を求むる事が出來るであらう。

$n=1$ の場合は微分方程式は Bessel の函數で解から從來屢々取扱はれた。著者の結果を Timoshenko 著 Theory of Elastic Stability に蒐錄されてゐる A. N. Dinnik の表中の相應する數字と比較すれば **表-4** の如くである。

表-4. $\frac{PL^2}{EI_c}$ **の比較値** ($n=1$)

I_e/I_c	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
Dinnik の値		9.27		8.61		7.87		7.01	6.48
著者の値	9.5712	9.2620	8.9403	8.6035	8.2483	7.8701	7.4612	7.0085	

數値に僅かながら差があるが此れは計算方法の簡明なる點より考へて著者の方が正確であると思つてゐる。