

論 說 報 告

第 26 卷 第 10 號 昭和 15 年 10 月

撓角撓度法による構造物の安定論 (其の一)

會 員 樋 浦 大 三*

要 旨 撓角撓度法の基本式を擴張して軸壓縮應力の作用する場合を包含せしめ、平衡條件式を求め、撓屈條件式を誘導し撓屈荷重又は撓屈應力を計算する方法を述べたものである

目 次

緒 論	第 1 節 總説
第 1 章 軸壓縮應力を考慮したる撓角撓度法の基本式	第 2 節 撓角撓度法による一般解法
第 1 節 基本公式の誘導	1. 兩端鉸剛支點なる場合
第 2 節 $C(x), S(x)$ 並に其の誘導函數の値	2. 兩端鉸彈性支點なる場合
第 3 節 比例係數 α の値	3. 兩端固定剛支點なる場合
第 2 章 變断面長柱の撓屈荷重の計算法	第 3 節 特別なる場合
第 1 節 總説	1. 2 徑間兩端鉸剛支點なる場合
第 2 節 撓屈荷重の計算法	2. 3 徑間兩端鉸剛支點なる場合
1. 兩端鉸端の場合	3. 4 徑間兩端鉸剛支點なる場合
2. 兩端固定端の場合	第 4 節 計算例
第 3 節 計算例	第 5 章 ポー・トラスの上弦材の構面外への撓屈強度の計算法
第 3 章 多數の剛支點を有する連續長柱の撓屈強度の計算法	第 1 節 總説
第 1 節 撓角撓度法による一般解法	1. 従來の研究
1. 兩端鉸端の場合	2. ラーメン抵抗
2. 兩端固定端の場合	3. 連續の條件
第 2 節 特別なる場合	第 2 節 平行弦ポー・トラスの上弦材の撓屈強度の計算法
1. 兩端鉸端の場合	1. 平衡條件式
2. 兩端固定端の場合	2. 撓屈條件式
第 3 節 計算例	3. 計算例
第 4 章 多數の彈性支點を有する連續長柱の撓屈強度の計算法	第 3 節 曲弦ポー・トラスの上弦材の撓屈強度の計算法
	1. 平衡條件式
	2. 撓屈條件式
	結 論

緒 論

柱の撓屈に關し L. Euler の公式を知らぬ者はない。L. Euler が 1774 年最初に論文を發表して以來、之の問題程多くの研究論文の發表されたものは他にあるまい。單一なる柱に關し軸壓縮應力度が彈性限度を超過する場合、斷面の慣性モーメントが一樣ならざる場合、兩端が彈性固定なる場合等あらゆる種類の柱に就き論ぜられてゐる。斯の如く構造物より一本の部材を取り出し、單一なる柱として之が撓屈を研究することも勿論必要であるが構造物全體を一體としての撓屈を論ずることは更に實際に忠實であり望ましいことである。

柱の撓屈荷重を計算する方法を大別すると柱が彎曲を起した場合の彈性曲線の微分方程式の解を求め、終端條件を用ひて撓屈條件式を誘導し、之より撓屈荷重を計算する方法とエネルギー式による方法とがある。

然し彎曲を起した場合の彈性曲線の微分方程式は必ず解があるとは限らない。只慣性モーメントが一樣か又は極く單純な法則に従つて變化する特別なる場合のみが解き得るに過ぎない。従つて如何なる種類の柱に對しても

撓屈条件式が誘導せられるとは限らないものである。

エネルギー法により撓屈荷重を計算するには、柱が撓曲を起した場合の弾性曲線の方程式を假定しなければならない。之の假定した曲線が全く實際の撓曲の曲線に一致する場合には眞の撓屈荷重を與へるが、然らざる場合は近似値を與へるに過ぎない。従つて出来るだけ實際の弾性曲線に近い曲線を假定する必要があるが、之のことは決して簡単なことではない。

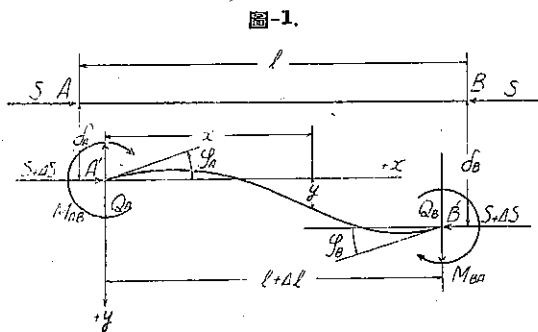
撓角撓度法による撓屈荷重の計算方法は理論上何等の無理がなく、柱の慣性モーメント及斷面が如何なる變化をなす場合でも、兩端の支持条件が如何なる場合でも、部分的に軸壓縮應力度が弾性限度を超過する場合でも等しく適用することが出来るのみならず、必要に應じ精度を高めることも可能である。

本文は撓角撓度法による構造物の撓屈荷重又は軸壓縮應力の計算方法を研究せるもので、第 1 章に於ては軸壓縮應力を考慮したる場合の撓角撓度法の基本公式を誘導し、撓屈荷重又は撓屈應力の計算に必要な種々の函數の値を求め、第 2 章に於ては變斷面長柱、第 3 章に於ては多數の剛支點を有する連續長柱、第 4 章に於ては多數の彈性支點を有する連續長柱、第 5 章に於てはポーン・トラス上弦材の構面外への撓屈強度の計算方法を述べたものである。

第 1 章 軸壓縮應力を考慮したる撓角撓度法の基本式

第 1 節 基本式の誘導

軸壓縮應力 S の作用する直線部材 AB が値に安定を破られて、次の圖-1 に示すやうに左端 A が A' に、右端 B が B' に移動し、撓曲を起した場合を考へる。此の場合撓曲を起したため、新に部材に添加せられる軸壓縮應力を ΔS 、左端に於ける剪斷力を Q_A 、右端に於ける剪斷力を Q_B 、左端に於ける曲げモーメントを M_{AB} 、右端に於ける曲げモーメントを M_{BA} とし、左端の垂直變位を δ_A 、右端の垂直變位を δ_B 、 A' と B' の水平距離を $(l + \Delta l)$ とする。



直角座標の原點を A' に選び、 x 軸を部材が撓曲を起さない以前の原位置の方向にとり、任意の點 x に於ける變位を y とすれば、變位と曲げモーメントとの間には次の關係がある。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ\tau} \dots\dots\dots (1)^{(1)}$$

茲に M は任意の點 x に於ける曲げモーメント、 E は部材の材料のヤング係數、 J は部材の斷面の慣性モーメント、 τ は T を撓屈係數 (Knickmodul) とすれば $\tau = \frac{T}{E}$ で Fr. Bleich は比例係數 (Verhältniszahl) と呼んでゐる。

任意の點 x に於ける曲げモーメントは

$$\begin{aligned} M &= M_{AB} + Q_A x + (S + \Delta S)y \\ &= M_{AB} + Q_A x + S y + \Delta S y \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。上式中 $\Delta S y$ なる量を考へるとその他の諸量に比較して高次の微少量であるから之を省略すると

$$M = M_{AB} + Q_A x + S y \dots\dots\dots (3)$$

となる。即ち撓曲を生じた爲め、新に部材を添加せられる軸壓縮應力の影響は之を省略して考へても支障ないこととなる。

次に兩端に於ける剪斷力を求めれば

(1) Fr. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, S. 130.

$$\begin{aligned}
 Q_A = Q_B &= -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l + \Delta l} - S \frac{\delta_B - \delta_A}{l + \Delta l} \\
 &= -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right)} - S \frac{\delta_B - \delta_A}{l \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right)} \dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

となる。上式中分母の括弧中の $\frac{\Delta l}{l}$ なる値は 1 に比較すると極めて微小であるから省略しても差支へない。従つて (4) 式は

$$Q_A = Q_B = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} - S \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \dots \dots \dots (5)$$

となる。即ち部材の變長の影響は省略して考へても差支へないこととなる。(5) 式の剪斷力の値を (3) 式に代入すると

$$M = M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} x - S \frac{\delta_B - \delta_A}{l} x + Sy \dots \dots \dots (6)$$

となる。之の (6) 式の値を (1) 式の彈性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_{AB}}{EJ_T} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \frac{1}{EJ_T} x - \frac{S}{EJ_T} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} x - \frac{S}{EJ_T} y \dots \dots \dots (7)$$

となる。今若し

$$z^2 = \frac{Sl^2}{EJ_T}$$

を表すものとして上記の微分方程式を積分すれば

$$y = A_1 \cos \frac{zx}{l} + A_2 \sin \frac{zx}{l} + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} x + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{EJ_T} \frac{lx}{z^2} - \frac{M_{AB} l^2}{EJ_T z^2} \dots \dots \dots (8)$$

となる。上式中 A_1 及 A_2 は積分常數で終端條件より決定せられる。即ち

$$(a) \quad x=0 \quad \text{に於て} \quad y=0$$

なる條件より

$$A_1 = \frac{M_{AB} l^2}{EJ_T z^2}$$

となる。又

$$(b) \quad x=l \quad \text{に於て} \quad y = \delta_B - \delta_A$$

なる條件より

$$A_2 = \frac{1}{EJ_T} \frac{l^2}{z^2} (-M_{AB} - M_{BA} \cos z) \frac{1}{\sin z}$$

となる。之等の値を (8) 式に代入すると彈性曲線の方程式は

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{M_{AB} l^2}{EJ_T z^2} \cos \frac{zx}{l} - \frac{1}{EJ_T} \frac{l^2}{z^2} \frac{1}{\sin z} (M_{AB} \cos z + M_{BA}) \sin \frac{zx}{l} \\
 &\quad + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} x + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{EJ_T} \frac{l}{z^2} x - \frac{M_{AB} l^2}{EJ_T z^2} \dots \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

となる。従つて (9) 式を微分すれば

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M_{AB} l}{EJ_T z} \sin \frac{zx}{l} - \frac{1}{EJ_T} \frac{l}{z} \frac{1}{\sin z} (M_{AB} \cos z + M_{BA}) \cos \frac{zx}{l} + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{EJ_T} \frac{l}{z^2} \dots \dots (10)$$

となる。

今部材の兩端に於ける撓角を夫々 φ_A, φ_B を以つて表すものとするれば

$$\varphi_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0}$$

$$\varphi_B = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l}$$

となり、(10) 式より次の (11), (12) の兩式が得られる。

$$\frac{EJ_T}{l} \varphi_A = M_{AB} \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{\cot z}{z} \right\} - M_{BA} \left\{ \frac{1}{z \sin z} - \frac{1}{z^2} \right\} + \frac{EJ_T}{l} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \dots (11)$$

$$\frac{EJ_T}{l} \varphi_B = -M_{AB} \left\{ \frac{1}{z \sin z} - \frac{1}{z^2} \right\} - M_{BA} \left\{ \frac{\cot z}{z} - \frac{1}{z^2} \right\} + \frac{EJ_T}{l} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \dots (12)$$

となる。次に

$$s(z) = \frac{1}{z \sin z} - \frac{1}{z^2} \dots (13)$$

$$c(z) = -\frac{\cot z}{z} + \frac{1}{z^2} \dots (14)$$

を表すものとすれば (11) 及 (12) 式は

$$\frac{EJ_T}{l} \varphi_A = M_{AB}c(z) - M_{BA}s(z) + \frac{EJ_T}{l} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \dots (15)$$

$$\frac{EJ_T}{l} \varphi_B = -M_{AB}s(z) + M_{BA}c(z) + \frac{EJ_T}{l} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \dots (16)$$

となる。之の (15) 及 (16) 式より M_{AB}, M_{BA} を求めれば

$$M_{AB} = \frac{EJ_T}{l} \frac{1}{c^2(z) - s^2(z)} \left[c(z)\varphi_A + s(z)\varphi_B - \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \{c(z) + s(z)\} \right] \dots (17)$$

$$M_{BA} = \frac{EJ_T}{l} \frac{1}{c^2(z) - s^2(z)} \left[s(z)\varphi_A + c(z)\varphi_B - \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \{c(z) + s(z)\} \right] \dots (18)$$

となる。上記の (17), (18) の兩式は軸壓縮應力を考慮したる場合の撓角撓度法の基本公式で撓角撓度法により捩屈条件を求める場合の基本をなす重要な公式である。

軸壓縮應力が存在しない場合には

$$\lim_{z \rightarrow 0} c(z) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} s(z) = \frac{1}{6}$$

となり、部材の両端の曲げモーメントは

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \left\{ 2\varphi_A + \varphi_B - 3\frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots (19)$$

$$M_{BA} = \frac{2EJ}{l} \left\{ \varphi_A + 2\varphi_B - 3\frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots (20)$$

となる。之の (19), (20) 式は普通の撓角撓度法の基本式の荷重の項を缺いたものである。

次に剪断力を部材の両端に於ける撓角 φ_A, φ_B 部材の両端に於ける變位 δ_A, δ_B を以て表すこととする。

既に求めた如く

$$Q_A = Q_B = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} - S \frac{\delta_B - \delta_A}{l}$$

なるを以つて (17), (18) 兩式の値を代入すれば

$$Q_A = Q_B = -\frac{EJ_T}{l^2} \left[\frac{1}{c(z) - s(z)} \{ \varphi_A + \varphi_B \} + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \left\{ 2 - \frac{2}{c(z) - s(z)} \right\} \right] \dots (21)$$

となる。軸壓縮應力の存在しない場合に於ては

$$Q_A = Q_B = -\frac{6EJ}{l^2} \left\{ \varphi_A + \varphi_B - 2\frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots (22)$$

となる。

左端 A が鉸端の場合は $M_{AB} = 0$ であるから

$$M_{BA} = \frac{EJ_T}{l} \left\{ \frac{1}{c(z)} \varphi_B - \frac{1}{c(z)} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots (23)$$

となる。之の場合若し軸壓縮應力が存在しないものとすれば

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \left\{ 1.5 \varphi_B - 1.5 \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

となる。又逆に右端 B が鉸端の場合に於ては $M_{BA} = 0$ であるから

$$M_{AB} = \frac{EJ\tau}{l} \left\{ \frac{1}{c(z)} \varphi_A - \frac{1}{c(z)} \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

となる。之の場合若し軸壓縮應力が存在しないものとすれば

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \left\{ 1.5 \varphi_A - 1.5 \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

となる。従つて剪断力を求めれば次の通りとなる。

左端 A が鉸端の場合に於ては

$$Q_A = Q_B = -\frac{EJ\tau}{l^2} \left[\frac{1}{c(z)} \varphi_B + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \left\{ z^2 - \frac{1}{c(z)} \right\} \right] \dots\dots\dots (27)$$

となる。之の場合軸壓縮應力が存在しないものとすれば

$$Q_A = Q_B = -\frac{3EJ}{l} \left\{ \varphi_B - \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。又右端 B が鉸端の場合に於ては

$$Q_A = Q_B = -\frac{EJ\tau}{l^2} \left[\frac{1}{c(z)} \varphi_A + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \left\{ z^2 - \frac{1}{c(z)} \right\} \right] \dots\dots\dots (29)$$

となる。之の場合軸壓縮應力が存在しないものとすれば

$$Q_A = Q_B = -\frac{3EJ}{l} \left\{ \varphi_A - \frac{\delta_B - \delta_A}{l} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

となる。

以上の諸公式は孰も撓角撓度法により挫屈条件を求める場合基本をなす重要な公式である。

第 2 節 $c(z)$, $s(z)$ 竝に其の誘導函数の値

前記の如く

$$c(z) = -\frac{\cos z}{z \sin z} + \frac{1}{z^2}$$

$$s(z) = \frac{1}{z \sin z} - \frac{1}{z^2}$$

を表す。従つて

$$c(z) + s(z) = \frac{1 - \cos z}{z \sin z},$$

$$c(z) - s(z) = \frac{2}{z^2} - \frac{1 + \cos z}{z \sin z}$$

となる。之等の關係より挫屈強度の計算に必要な諸函数の値を計算することが出来る。表-1 は之等の諸函数の値を示すもので、 z を 0 乃至 2π とし、 $z=0.01\pi$ 毎の値を計算したものである。Fr. Bleich の Theorie und Berechnung der eisernen Brücken には $z=0.05\pi$ 毎の $c(z)$ 及 $s(z)$ の値を示してあるが變断面を有する長柱の挫屈強度、多數の支點を有する連続長柱の挫屈強度、ポネ・トラスの挫屈強度等の計算には不十分である。

第 3 節 比例係數 (Verhältniszahl) τ の値

S_k を柱の挫屈荷重、 T を挫屈係數 (Knickmodul)、 J を柱の斷面の慣性モーメント、 l を柱の長さとするれば

$$S_k = \pi^2 \frac{TJ}{l^2} \dots\dots\dots (31)^{(2)}$$

となる。Euler の公式のヤング係數 E の代りに挫屈係數 T を置き換へたものである。長柱の非弾性的挫屈に関する論文は Engesser に依り 1889 年始めて發表され、挫屈應力曲線が公にされたが、Kármán が 1910 年同様の

(2) Fr. Bleich, Stahlhochbauten, S. 130.

表-1. (其の1)

Z	Z^2	$c(z)$	$s(z)$	$c(z)+s(z)$	$c(z)-s(z)$	$c^2(z)-s^2(z)$	$d(z)$	$s(z)$	I	I	Z^2	I
									$c(z)-s(z)$	$c(z)$	$c(z)-s(z)$	I
0	0	0.3333	0.1667	0.5000	0.1666	0.0833	4.000	2.000	6.000	3.000	-12.000	-3.000
0.01π	0.0009 9	0.3334	0.1667	0.5000	0.1666	0.0833	4.000	2.000	6.000	3.000	-11.999	-2.999
0.02π	0.0039 5	0.3334	0.1668	0.5001	0.1666	0.0833	3.999	2.000	6.000	2.999	-11.996	-2.995
0.03π	0.0088 8	0.3335	0.1668	0.5003	0.1666	0.0833	3.999	2.000	6.000	2.999	-11.991	-2.990
0.04π	0.0157 9	0.3336	0.1670	0.5006	0.1667	0.0834	3.999	2.000	6.000	2.997	-11.988	-2.982
0.05π	0.0246 7	0.3339	0.1672	0.5010	0.1667	0.0834	3.997	2.000	5.998	2.995	-11.971	-2.971
0.06π	0.0355 3	0.3342	0.1674	0.5015	0.1667	0.0834	3.994	2.000	5.994	2.992	-11.952	-2.957
0.07π	0.0485 6	0.3344	0.1676	0.5020	0.1668	0.0834	3.992	2.000	5.992	2.990	-11.938	-2.942
0.08π	0.0631 7	0.3348	0.1679	0.5026	0.1668	0.0834	3.990	2.001	5.991	2.987	-11.919	-2.924
0.09π	0.0799 4	0.3351	0.1682	0.5033	0.1669	0.0834	3.990	2.003	5.991	2.984	-11.904	-2.904
0.10π	0.0987 0	0.3356	0.1686	0.5042	0.1670	0.0834	3.987	2.003	5.990	2.980	-11.881	-2.881
0.11π	0.1194 2	0.3360	0.1690	0.5050	0.1670	0.0834	3.984	2.004	5.989	2.976	-11.850	-2.857
0.12π	0.1421 2	0.3365	0.1694	0.5060	0.1671	0.0855	3.981	2.004	5.985	2.971	-11.828	-2.829
0.13π	0.1668 0	0.3371	0.1699	0.5071	0.1672	0.0855	3.977	2.004	5.981	2.966	-11.795	-2.799
0.14π	0.1934 4	0.3377	0.1705	0.5082	0.1672	0.0855	3.974	2.006	5.980	2.961	-11.767	-2.768
0.15π	0.2220 7	0.3384	0.1711	0.5095	0.1673	0.0855	3.971	2.008	5.979	2.955	-11.736	-2.733
0.16π	0.2526 6	0.3391	0.1717	0.5108	0.1674	0.0855	3.966	2.009	5.975	2.949	-11.697	-2.696
0.17π	0.2852 3	0.3398	0.1724	0.5122	0.1675	0.0855	3.962	2.010	5.972	2.943	-11.659	-2.657
0.18π	0.3197 8	0.3407	0.1731	0.5138	0.1676	0.0856	3.957	2.011	5.968	2.935	-11.616	-2.616
0.19π	0.3562 9	0.3415	0.1739	0.5154	0.1676	0.0856	3.953	2.013	5.966	2.930	-11.576	-2.572
0.20π	0.3947 8	0.3425	0.1747	0.5171	0.1678	0.0857	3.947	2.013	5.960	2.920	-11.525	-2.525
0.21π	0.4352 5	0.3434	0.1755	0.5190	0.1679	0.0857	3.942	2.015	5.956	2.912	-11.477	-2.477
0.22π	0.4776 9	0.3445	0.1764	0.5209	0.1680	0.0858	3.936	2.016	5.952	2.903	-11.426	-2.425
0.23π	0.5221 0	0.3455	0.1774	0.5230	0.1681	0.0858	3.931	2.018	5.949	2.894	-11.376	-2.372
0.24π	0.5684 9	0.3467	0.1784	0.5251	0.1683	0.0858	3.923	2.019	5.944	2.884	-11.320	-2.316
0.25π	0.6168 5	0.3479	0.1795	0.5274	0.1684	0.0859	3.917	2.021	5.938	2.874	-11.259	-2.258
0.26π	0.6671 9	0.3492	0.1806	0.5298	0.1686	0.0859	3.910	2.023	5.933	2.864	-11.199	-2.197
0.27π	0.7194 9	0.3505	0.1818	0.5323	0.1687	0.0900	3.903	2.025	5.928	2.853	-11.137	-2.134
0.28π	0.7737 8	0.3519	0.1831	0.5350	0.1689	0.0900	3.896	2.026	5.922	2.842	-11.070	-2.068
0.29π	0.8300 3	0.3534	0.1843	0.5377	0.1690	0.0911	3.888	2.028	5.916	2.830	-11.002	-2.000
0.30π	0.8882 6	0.3549	0.1857	0.5406	0.1692	0.0911	3.880	2.030	5.911	2.818	-10.934	-1.929
0.31π	0.9484 7	0.3565	0.1872	0.5437	0.1694	0.092	3.872	2.031	5.905	2.805	-10.862	-1.857
0.32π	1.0106 5	0.3582	0.1887	0.5469	0.1695	0.093	3.864	2.035	5.899	2.792	-10.787	-1.781
0.33π	1.0748 0	0.3600	0.1902	0.5502	0.1697	0.093	3.855	2.037	5.892	2.778	-10.709	-1.703
0.34π	1.1409 3	0.3618	0.1919	0.5537	0.1699	0.094	3.846	2.040	5.885	2.764	-10.629	-1.623
0.35π	1.2090 3	0.3637	0.1936	0.5573	0.1701	0.095	3.837	2.042	5.879	2.749	-10.549	-1.540
0.36π	1.2791 0	0.3657	0.1954	0.5611	0.1704	0.096	3.826	2.044	5.870	2.734	-10.461	-1.455
0.37π	1.3511 5	0.3678	0.1973	0.5651	0.1705	0.096	3.817	2.047	5.864	2.719	-10.377	-1.368
0.38π	1.4251 7	0.3700	0.1993	0.5693	0.1708	0.097	3.806	2.050	5.856	2.703	-10.287	-1.277
0.39π	1.5011 7	0.3723	0.2013	0.5736	0.1710	0.098	3.796	2.052	5.848	2.686	-10.195	-1.185
0.40π	1.5791 4	0.3747	0.2035	0.5782	0.1712	0.099	3.785	2.055	5.840	2.669	-10.101	-1.090
0.41π	1.6590 8	0.3772	0.2057	0.5829	0.1715	0.100	3.774	2.059	5.833	2.651	-10.007	-0.992
0.42π	1.7410 0	0.3798	0.2081	0.5879	0.1717	0.101	3.763	2.062	5.824	2.633	-9.907	-0.892
0.43π	1.8248 9	0.3825	0.2106	0.5931	0.1720	0.102	3.751	2.065	5.815	2.614	-9.805	-0.789
0.44π	1.9107 6	0.3854	0.2131	0.5985	0.1722	0.103	3.739	2.068	5.806	2.595	-9.701	-0.684
0.45π	1.9985 9	0.3883	0.2158	0.6042	0.1725	0.104	3.725	2.071	5.797	2.575	-9.595	-0.577
0.46π	2.0884 0	0.3914	0.2187	0.6101	0.1728	0.105	3.714	2.075	5.788	2.555	-9.488	-0.466
0.47π	2.1802 0	0.3947	0.2216	0.6163	0.1730	0.107	3.701	2.078	5.779	2.534	-9.378	-0.354
0.48π	2.2739 6	0.3980	0.2247	0.6227	0.1733	0.108	3.687	2.082	5.769	2.512	-9.264	-0.238
0.49π	2.3696 9	0.4016	0.2279	0.6295	0.1737	0.109	3.673	2.085	5.759	2.490	-9.148	-0.120
0.50π	2.4674 0	0.4053	0.2313	0.6366	0.1739	0.111	3.660	2.089	5.749	2.467	-9.031	0
0.51π	2.5670 8	0.4092	0.2349	0.6441	0.1743	0.112	3.645	2.093	5.738	2.444	-8.909	0.123
0.52π	2.6687 4	0.4132	0.2386	0.6519	0.1746	0.114	3.631	2.097	5.728	2.420	-8.787	0.249
0.53π	2.7723 7	0.4175	0.2426	0.6600	0.1749	0.115	3.616	2.101	5.717	2.395	-8.662	0.377
0.54π	2.8779 8	0.4219	0.2467	0.6686	0.1753	0.117	3.601	2.105	5.706	2.370	-8.534	0.508
0.55π	2.9855 6	0.4266	0.2510	0.6776	0.1756	0.119	3.585	2.110	5.695	2.344	-8.404	0.641
0.56π	3.0951 1	0.4315	0.2556	0.6871	0.1760	0.121	3.570	2.114	5.683	2.317	-8.271	0.778
0.57π	3.2066 3	0.4367	0.2604	0.6971	0.1763	0.123	3.553	2.119	5.672	2.290	-8.137	0.917
0.58π	3.3201 3	0.4421	0.2654	0.7075	0.1767	0.125	3.537	2.123	5.660	2.262	-8.000	1.058
0.59π	3.4356 1	0.4478	0.2708	0.7186	0.1771	0.127	3.520	2.128	5.648	2.233	-7.860	1.203

表-1. (其の2)

λ	λ^2	$c(\lambda)$	$s(\lambda)$	$c(\lambda)+s(\lambda)$	$c(\lambda)-s(\lambda)$	$c^2(\lambda)-s^2(\lambda)$	$\frac{c(\lambda)}{c^2(\lambda)-s^2(\lambda)}$	$\frac{s(\lambda)}{c^2(\lambda)-s^2(\lambda)}$	$\frac{1}{c(\lambda)-s(\lambda)}$	$\frac{1}{c(\lambda)}$	$\frac{2}{c(\lambda)-s(\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda^2-c(\lambda)}$
0.60π	3.5530 6	0.4539	0.2764	0.7302	0.1775	0.130	3.502	2.133	5.635	2.203	-7.717	1.350
0.61π	3.6724 8	0.4602	0.2823	0.7425	0.1779	0.132	3.485	2.138	5.622	2.173	-7.572	1.409
0.62π	3.7938 8	0.4669	0.2886	0.7555	0.1783	0.135	3.467	2.143	5.610	2.142	-7.426	1.652
0.63π	3.9172 5	0.4739	0.2953	0.7692	0.1787	0.137	3.448	2.148	5.597	2.110	-7.277	1.807
0.64π	4.0425 9	0.4814	0.3023	0.7837	0.1791	0.140	3.430	2.154	5.583	2.077	-7.123	1.965
0.65π	4.1699 9	0.4893	0.3098	0.7991	0.1795	0.143	3.411	2.160	5.570	2.044	-6.970	2.126
0.66π	4.2992 0	0.4977	0.3178	0.8155	0.1800	0.147	3.391	2.165	5.556	2.009	-6.813	2.290
0.67π	4.4304 7	0.5067	0.3262	0.8329	0.1804	0.150	3.371	2.171	5.542	1.974	-6.654	2.457
0.68π	4.5637 1	0.5162	0.3353	0.8515	0.1809	0.154	3.351	2.177	5.528	1.937	-6.492	2.626
0.69π	4.6989 2	0.5263	0.3450	0.8713	0.1814	0.158	3.331	2.183	5.514	1.900	-6.329	2.799
0.70π	4.8361 1	0.5372	0.3553	0.8925	0.1819	0.162	3.310	2.189	5.499	1.862	-6.162	2.974
0.71π	4.9752 7	0.5487	0.3664	0.9151	0.1824	0.167	3.288	2.196	5.484	1.822	-5.993	3.153
0.72π	5.1164 0	0.5612	0.3783	0.9395	0.1829	0.172	3.267	2.202	5.469	1.782	-5.822	3.334
0.73π	5.2595 1	0.5746	0.3912	0.9657	0.1834	0.177	3.244	2.209	5.453	1.740	-5.646	3.519
0.74π	5.4046 0	0.5890	0.4051	0.9940	0.1839	0.183	3.222	2.216	5.437	1.698	-5.464	3.707
0.75π	5.5516 5	0.6045	0.4201	1.0246	0.1845	0.189	3.198	2.222	5.421	1.654	-5.290	3.898
0.76π	5.7006 8	0.6214	0.4364	1.0579	0.1850	0.196	3.175	2.230	5.405	1.609	-5.109	4.091
0.77π	5.8516 9	0.6398	0.4542	1.0940	0.1856	0.203	3.151	2.237	5.389	1.563	-4.926	4.289
0.78π	6.0046 7	0.6598	0.4737	1.1335	0.1862	0.211	3.127	2.245	5.372	1.516	-4.739	4.489
0.79π	6.1596 2	0.6818	0.4950	1.1768	0.1868	0.220	3.102	2.253	5.355	1.467	-4.550	4.693
0.80π	6.3165 5	0.7060	0.5186	1.2246	0.1873	0.229	3.077	2.261	5.338	1.417	-4.359	4.900
0.81π	6.4754 5	0.7327	0.5447	1.2774	0.1880	0.240	3.052	2.270	5.320	1.365	-4.165	5.111
0.82π	6.6363 2	0.7624	0.5738	1.3361	0.1886	0.252	3.025	2.277	5.302	1.312	-3.968	5.325
0.83π	6.7991 7	0.7956	0.6063	1.4109	0.1892	0.265	2.999	2.286	5.284	1.257	-3.769	5.542
0.84π	6.9639 9	0.8329	0.6430	1.4759	0.1899	0.280	2.972	2.294	5.266	1.201	-3.568	5.763
0.85π	7.1307 9	0.8752	0.6846	1.5598	0.1906	0.297	2.944	2.303	5.247	1.143	-3.363	5.988
0.86π	7.2995 6	0.9236	0.7323	1.6599	0.1913	0.317	2.916	2.312	5.229	1.083	-3.153	6.217
0.87π	7.4703 0	0.9793	0.7874	1.7667	0.1920	0.339	2.888	2.322	5.210	1.021	-2.950	6.449
0.88π	7.6430 2	1.0444	0.8518	1.8962	0.1927	0.365	2.859	2.331	5.190	0.957	-2.737	6.686
0.89π	7.8177 1	1.1213	0.9279	2.0492	0.1934	0.396	2.829	2.341	5.170	0.892	-2.524	6.926
0.90π	7.9943 8	1.2136	1.0194	2.2330	0.1942	0.434	2.799	2.351	5.150	0.824	-2.306	7.170
0.91π	8.1730 2	1.3263	1.1314	2.4578	0.1949	0.479	2.769	2.362	5.131	0.754	-2.089	7.419
0.92π	8.3536 3	1.4673	1.2715	2.7388	0.1957	0.536	2.737	2.372	5.110	0.682	-1.866	7.672
0.93π	8.5362 2	1.6484	1.4519	3.1002	0.1965	0.609	2.706	2.383	5.089	0.607	-1.642	7.930
0.94π	8.7207 8	1.8898	1.6925	3.5823	0.1973	0.707	2.673	2.394	5.068	0.529	-1.415	8.192
0.95π	8.9073 2	2.2278	2.0296	4.2373	0.1982	0.844	2.640	2.406	5.046	0.449	-1.185	8.458
0.96π	9.0958 3	2.7346	2.5356	5.2702	0.1990	1.049	2.607	2.417	5.025	0.366	-0.954	8.730
0.97π	9.2863 1	3.5792	3.3713	6.9584	0.1999	1.391	2.573	2.429	5.002	0.279	-0.718	9.007
0.98π	9.4787 7	5.2682	5.0674	10.3356	0.2008	2.075	2.538	2.442	4.980	0.190	-0.481	9.289
0.99π	9.6732 0	10.3346	10.1329	20.4676	0.2017	4.129	2.503	2.454	4.958	0.097	-0.242	9.576
1.00π	9.8696 0	±∞	±∞	±∞	0.2026	±∞	2.467	2.467	4.935	0	0	9.870
1.01π	10.0679 8	-9.9292	-10.1328	-20.0621	0.2036	-4.084	2.431	2.481	4.912	-0.101	0.244	10.169
1.02π	10.2683 4	-4.8628	-5.0674	-9.9302	0.2046	-2.032	2.394	2.494	4.888	-0.206	0.492	10.474
1.03π	10.4706 6	-3.1738	-3.3794	-6.5532	0.2056	-1.347	2.356	2.509	4.865	-0.315	0.741	10.786
1.04π	10.6749 6	-2.3291	-2.5357	-4.8649	0.2066	-1.005	2.317	2.523	4.840	-0.429	0.995	11.104
1.05π	10.8812 4	-1.8221	-2.0268	-3.8519	0.2077	-0.800	2.278	2.538	4.816	-0.549	1.249	11.430
1.06π	11.0894 9	-1.4840	-1.6928	-3.1768	0.2089	-0.653	2.237	2.551	4.788	-0.674	1.513	11.763
1.07π	11.2997 1	-1.2424	-1.4522	-2.6946	0.2099	-0.565	2.197	2.568	4.765	-0.805	1.770	12.105
1.08π	11.5119 1	-1.0610	-1.2720	-2.3330	0.2110	-0.492	2.156	2.584	4.740	-0.942	2.032	12.454
1.09π	11.7260 8	-0.9199	-1.1320	-2.0519	0.2121	-0.435	2.113	2.601	4.714	-1.087	2.298	12.813
1.10π	11.9423 2	-0.8069	-1.0202	-1.8270	0.2133	-0.390	2.070	2.618	4.688	-1.239	2.566	13.182
1.11π	12.1603 4	-0.7143	-0.9288	-1.6431	0.2145	-0.352	2.027	2.635	4.662	-1.400	2.836	13.560
1.12π	12.3804 3	-0.6371	-0.8523	-1.4899	0.2158	-0.321	1.982	2.653	4.635	-1.570	3.110	13.950
1.13π	12.6025 0	-0.5716	-0.7886	-1.3602	0.2170	-0.295	1.936	2.671	4.608	-1.749	3.387	14.352
1.14π	12.8265 4	-0.5154	-0.7337	-1.2492	0.2183	-0.273	1.890	2.690	4.580	-1.940	3.667	14.767
1.15π	13.0525 5	-0.4666	-0.6863	-1.1529	0.2197	-0.253	1.842	2.710	4.552	-2.143	3.949	15.196
1.16π	13.2805 4	-0.4239	-0.6449	-1.0688	0.2211	-0.236	1.794	2.730	4.524	-2.359	4.233	15.640
1.17π	13.5105 0	-0.3860	-0.6085	-0.9945	0.2225	-0.221	1.745	2.750	4.495	-2.591	4.521	16.101
1.18π	13.7424 4	-0.3523	-0.5762	-0.9285	0.2239	-0.208	1.695	2.772	4.466	-2.839	4.810	16.581
1.19π	13.9763 5	-0.3221	-0.5474	-0.8695	0.2254	-0.196	1.643	2.793	4.437	-3.105	5.102	17.081

表-1. (其の3)

λ	λ^2	$c(\lambda)$	$s(\lambda)$	$c(\lambda)+s(\lambda)$	$c(\lambda)-s(\lambda)$	$c^2(\lambda)-s^2(\lambda)$	$\frac{c(\lambda)}{c^2(\lambda)-s^2(\lambda)}$	$\frac{s(\lambda)}{c^2(\lambda)-s^2(\lambda)}$	$\frac{1}{c(\lambda)-s(\lambda)}$	$\frac{1}{c(\lambda)}$	$\lambda^2 - \frac{2}{c(\lambda)-s(\lambda)}$	$\lambda^2 - \frac{1}{c(\lambda)}$
1.20	14.2122 3	-0.2947	-0.5217	-0.8164	0.2269	-0.185	1.591	2.816	4.407	-3.393	5.398	17.605
1.21	14.4500 9	-0.2700	-0.4984	-0.7684	0.2285	-0.176	1.538	2.839	4.377	-3.704	5.696	18.154
1.22	14.6899 2	-0.2473	-0.4774	-0.7247	0.2301	-0.167	1.483	2.863	4.347	-4.043	5.996	18.733
1.23	14.9317 2	-0.2266	-0.4583	-0.6849	0.2317	-0.159	1.428	2.888	4.315	-4.414	6.302	19.345
1.24	15.1755 0	-0.2075	-0.4409	-0.6484	0.2334	-0.151	1.371	2.913	4.284	-4.820	6.608	19.996
1.25	15.4212 6	-0.1898	-0.4250	-0.6148	0.2352	-0.145	1.313	2.939	4.252	-5.269	6.917	20.688
1.26	15.6689 8	-0.1734	-0.4104	-0.5838	0.2370	-0.138	1.254	2.966	4.220	-5.767	7.229	21.436
1.27	15.9186 8	-0.1582	-0.3970	-0.5551	0.2388	-0.133	1.193	2.994	4.187	-6.323	7.545	22.242
1.28	16.1703 6	-0.1439	-0.3846	-0.5285	0.2407	-0.127	1.131	3.023	4.155	-6.950	7.860	23.120
1.29	16.4240 1	-0.1305	-0.3732	-0.5037	0.2427	-0.122	1.068	3.053	4.121	-7.662	8.182	24.086
1.30	16.6796 3	-0.1179	-0.3626	-0.4805	0.2447	-0.118	1.003	3.084	4.087	-8.479	8.506	25.159
1.31	16.9372 3	-0.1061	-0.3528	-0.4589	0.2467	-0.113	0.937	3.116	4.053	-9.426	8.851	26.363
1.32	17.1968 0	-0.0949	-0.3438	-0.4376	0.2489	-0.109	0.871	3.156	4.018	-10.540	9.161	27.736
1.33	17.4583 4	-0.0843	-0.3353	-0.4196	0.2511	-0.105	0.800	3.183	3.983	-11.868	9.492	29.226
1.34	17.7218 6	-0.0742	-0.3275	-0.4017	0.2533	-0.102	0.729	3.218	3.947	-13.484	9.828	31.206
1.35	17.9873 5	-0.0646	-0.3202	-0.3848	0.2557	-0.098	0.656	3.255	3.911	-15.492	10.165	33.479
1.36	18.2548 2	-0.0554	-0.3135	-0.3688	0.2581	-0.095	0.581	3.293	3.874	-18.067	10.507	36.322
1.37	18.5242 6	-0.0466	-0.3071	-0.3537	0.2606	-0.092	0.505	3.332	3.838	-21.478	10.848	40.002
1.38	18.7956 7	-0.0381	-0.3013	-0.3394	0.2632	-0.089	0.427	3.373	3.800	-26.226	11.196	45.022
1.39	19.0690 6	-0.0300	-0.2958	-0.3258	0.2658	-0.087	0.346	3.415	3.762	-33.333	11.545	52.402
1.40	19.3444 2	-0.0222	-0.2908	-0.3129	0.2686	-0.084	0.264	3.460	3.723	-45.086	11.898	64.430
1.41	19.6217 6	-0.0146	-0.2860	-0.3007	0.2714	-0.082	0.179	3.505	3.684	-68.353	12.254	87.974
1.42	19.9010 7	-0.0073	-0.2817	-0.2890	0.2744	-0.079	0.092	3.553	3.645	-136.799	12.611	156.700
1.43	20.1823 5	-0.0002	-0.2776	-0.2778	0.2774	-0.077	0.003	3.602	3.605	-4761.905	12.972	4782.087
1.44	20.4656 1	0.0067	-0.2739	-0.2672	0.2806	-0.075	-0.089	3.653	3.564	149.477	13.338	-129.011
1.45	20.7508 4	0.0134	-0.2705	-0.2570	0.2839	-0.073	-0.184	3.707	3.523	74.516	13.705	-53.765
1.46	21.0380 5	0.0200	-0.2673	-0.2473	0.2873	-0.071	-0.281	3.762	3.481	50.025	14.076	-28.987
1.47	21.3272 3	0.0264	-0.2644	-0.2380	0.2908	-0.069	-0.382	3.820	3.439	37.850	14.449	-16.523
1.48	21.6183 8	0.0327	-0.2618	-0.2290	0.2945	-0.067	-0.485	3.881	3.396	30.553	14.826	-8.935
1.49	21.9115 1	0.0389	-0.2594	-0.2204	0.2983	-0.066	-0.592	3.944	3.352	25.687	15.208	-3.776
1.50	22.2066 1	0.0450	-0.2572	-0.2122	0.3023	-0.064	-0.702	4.011	3.308	22.207	15.591	-0.001
1.51	22.5036 8	0.0511	-0.2553	-0.2043	0.3064	-0.063	-0.816	4.080	3.264	19.581	15.976	2.923
1.52	22.8027 3	0.0570	-0.2537	-0.1967	0.3107	-0.061	-0.933	4.152	3.219	17.538	16.365	5.265
1.53	23.1037 6	0.0630	-0.2523	-0.1893	0.3152	-0.060	-1.055	4.228	3.172	15.886	16.760	7.218
1.54	23.4067 5	0.0688	-0.2511	-0.1822	0.3199	-0.058	-1.181	4.307	3.126	14.529	17.155	8.878
1.55	23.7117 2	0.0747	-0.2501	-0.1754	0.3248	-0.057	-1.311	4.390	3.079	13.389	17.554	10.323
1.56	24.0186 7	0.0806	-0.2494	-0.1688	0.3299	-0.056	-1.446	4.477	3.031	12.415	17.957	11.604
1.57	24.3275 9	0.0864	-0.2489	-0.1624	0.3353	-0.054	-1.587	4.570	2.982	11.570	18.364	12.758
1.58	24.6384 8	0.0923	-0.2486	-0.1563	0.3409	-0.053	-1.733	4.667	2.933	10.832	18.772	13.807
1.59	24.9513 5	0.0982	-0.2486	-0.1503	0.3468	-0.052	-1.885	4.768	2.884	10.179	19.183	14.772
1.60	25.2661 9	0.1042	-0.2483	-0.1445	0.3528	-0.051	-2.044	4.879	2.835	9.595	19.596	15.671
1.61	25.5830 0	0.1103	-0.2492	-0.1390	0.3595	-0.050	-2.208	5.004	2.782	9.069	20.019	16.514
1.62	25.9017 9	0.1164	-0.2499	-0.1335	0.3664	-0.049	-2.380	5.109	2.730	8.590	20.442	17.311
1.63	26.2225 5	0.1227	-0.2509	-0.1283	0.3736	-0.048	-2.559	5.236	2.677	8.153	20.869	18.069
1.64	26.5452 9	0.1290	-0.2522	-0.1232	0.3812	-0.047	-2.748	5.371	2.624	7.752	21.297	18.793
1.65	26.8700 0	0.1355	-0.2537	-0.1182	0.3893	-0.046	-2.945	5.514	2.569	7.379	21.732	19.491
1.66	27.1966 8	0.1422	-0.2556	-0.1134	0.3978	-0.045	-3.152	5.666	2.514	7.033	22.169	20.163
1.67	27.5253 4	0.1491	-0.2578	-0.1087	0.4068	-0.044	-3.370	5.828	2.458	6.709	22.609	20.816
1.68	27.8559 7	0.1561	-0.2603	-0.1042	0.4164	-0.043	-3.599	6.000	2.401	6.405	23.054	21.451
1.69	28.1885 8	0.1635	-0.2632	-0.0997	0.4267	-0.043	-3.842	6.186	2.344	6.117	23.501	22.072
1.70	28.5231 6	0.1711	-0.2665	-0.0954	0.4376	-0.042	-4.098	6.383	2.285	5.845	23.953	22.679
1.71	28.8597 1	0.1790	-0.2702	-0.0912	0.4493	-0.041	-4.370	6.698	2.226	5.585	24.408	23.274
1.72	29.1982 4	0.1873	-0.2744	-0.0871	0.4618	-0.040	-4.658	7.023	2.166	5.338	24.866	23.860
1.73	29.5387 4	0.1961	-0.2791	-0.0831	0.4752	-0.039	-4.967	7.072	2.104	5.100	25.331	24.438
1.74	29.8812 1	0.2053	-0.2844	-0.0792	0.4897	-0.039	-5.294	7.336	2.042	4.872	25.797	25.009
1.75	30.2256 6	0.2150	-0.2903	-0.0753	0.5053	-0.038	-5.647	7.626	1.979	4.652	26.268	25.574
1.76	30.5720 9	0.2253	-0.2969	-0.0716	0.5222	-0.037	-6.026	7.941	1.915	4.438	26.742	26.134
1.77	30.9204 8	0.2363	-0.3043	-0.0680	0.5406	-0.037	-6.433	8.282	1.850	4.231	27.220	26.689
1.78	31.2708 5	0.2482	-0.3125	-0.0644	0.5607	-0.036	-6.874	8.657	1.784	4.030	27.703	27.241
1.79	31.6232 0	0.2609	-0.3224	-0.0615	0.5833	-0.036	-7.371	9.086	1.714	3.833	28.195	27.790

表-1. (其の4)

Z	Z^2	$c(z)$	$s(z)$	$c(z)+s(z)$	$c(z)-s(z)$	$c^2(z)-s^2(z)$	$\frac{c(z)}{c^2(z)-s^2(z)}$	$\frac{s(z)}{c^2(z)-s^2(z)}$	$\frac{1}{c(z)-s(z)}$	$\frac{1}{c(z)}$	$\frac{Z^2-1}{c(z)-s(z)}$	$\frac{1}{Z^2-c(z)}$
1.80°	31.9775 2	0.2747	-0.3321	-0.0575	0.6068	-0.035	-7.877	9.525	1.648	3.641	28.682	28.337
1.81°	32.3338 1	0.2897	-0.3438	-0.0541	0.6335	-0.034	-8.453	10.032	1.579	3.452	29.176	28.882
1.82°	32.6920 8	0.3062	-0.3570	-0.0508	0.6632	-0.034	-9.086	10.593	1.508	3.266	29.676	29.426
1.83°	33.0523 2	0.3244	-0.3720	-0.0476	0.6963	-0.033	-9.791	11.227	1.436	3.083	30.180	29.970
1.84°	33.4145 3	0.3446	-0.3890	-0.0444	0.7336	-0.033	-10.577	11.940	1.363	2.902	30.689	30.513
1.85°	33.7787 2	0.3673	-0.4086	-0.0413	0.7759	-0.032	-11.463	12.753	1.289	2.723	31.201	31.056
1.86°	34.1448 8	0.3930	-0.4312	-0.0383	0.8242	-0.032	-12.467	13.681	1.213	2.545	31.719	31.600
1.87°	34.5130 2	0.4223	-0.4576	-0.0353	0.8799	-0.031	-13.610	14.746	1.136	2.368	32.241	32.145
1.88°	34.8831 3	0.4553	-0.4886	-0.0323	0.9449	-0.031	-14.951	16.009	1.058	2.192	32.767	32.692
1.89°	35.2552 1	0.4962	-0.5256	-0.0294	1.0217	-0.030	-16.522	17.501	0.979	2.015	33.297	33.240
1.90°	35.6292 7	0.5437	-0.5702	-0.0265	1.1139	-0.030	-18.392	19.290	0.898	1.839	33.833	33.790
1.91°	36.0053 0	0.6014	-0.6251	-0.0237	1.2265	-0.029	-20.673	21.488	0.815	1.663	34.375	34.342
1.92°	36.3833 1	0.6732	-0.6941	-0.0209	1.3673	-0.029	-23.514	24.245	0.731	1.485	34.921	34.898
1.93°	36.7632 9	0.7651	-0.7833	-0.0182	1.5483	-0.028	-27.139	27.785	0.646	1.307	35.471	35.456
1.94°	37.1452 4	0.8871	-0.9026	-0.0155	1.7896	-0.028	-31.955	32.513	0.559	1.127	36.027	36.018
1.95°	37.5291 7	1.0573	-1.0702	-0.0128	2.1275	-0.027	-38.701	39.171	0.470	0.946	36.589	36.583
1.96°	37.9150 7	1.3119	-1.3221	-0.0102	2.6340	-0.027	-48.733	49.113	0.380	0.762	37.155	37.153
1.97°	38.3029 5	1.7355	-1.7431	-0.0076	3.4785	-0.027	-65.464	65.751	0.287	0.576	37.729	37.727
1.98°	38.6928 0	2.5811	-2.5861	-0.0051	5.1672	-0.026	-98.929	99.122	0.194	0.387	38.305	38.305
1.99°	39.0846 2	5.1153	-5.1178	-0.0025	10.2331	-0.026	-199.116	199.213	0.098	0.195	38.889	38.889
2.00°	39.4784 2	∞	-∞	0	∞	-0.025	-∞	∞	0	0	39.478	39.478

論文を發表するまで一般に餘り知られてゐなかつたものである。今日 (31) 式は Engesser-Kármán の公式と呼ばれるものである。

比例係数 τ は

$$\frac{T}{E}$$

にして、今柱の斷面積を F とし

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F}, \quad (\tau)^2 = \frac{J}{F}$$

表-2.

σ_k	τ	σ_k	τ	σ_k	τ	σ_k	τ	σ_k	τ	σ_k	τ
1 905	1.00										
1 910	0.982	2 110	0.749	2 310	0.523	2 510	0.317	2 710	0.1497	2 910	0.0382
1 920	0.971	2 120	0.738	2 320	0.512	2 520	0.308	2 720	0.1427	2 920	0.0343
1 930	0.960	2 130	0.726	2 330	0.501	2 530	0.298	2 730	0.1358	2 930	0.0307
1 940	0.948	2 140	0.714	2 340	0.491	2 540	0.289	2 740	0.1290	2 940	0.0273
1 950	0.937	2 150	0.703	2 350	0.480	2 550	0.280	2 750	0.1223	2 950	0.0242
1 960	0.925	2 160	0.692	2 360	0.460	2 560	0.271	2 760	0.1159	2 960	0.0211
1 970	0.914	2 170	0.681	2 370	0.458	2 570	0.263	2 770	0.1096	2 970	0.0183
1 980	0.902	2 180	0.670	2 380	0.447	2 580	0.254	2 780	0.1035	2 980	0.0156
1 990	0.890	2 190	0.659	2 390	0.436	2 590	0.245	2 790	0.0974	2 990	0.0132
2 000	0.879	2 200	0.648	2 400	0.425	2 600	0.236	2 800	0.0915	3 000	0.0110
2 010	0.867	2 210	0.636	2 410	0.415	2 610	0.227	2 810	0.0858	3 010	0.0089
2 020	0.855	2 220	0.624	2 420	0.406	2 620	0.219	2 820	0.0802	3 020	0.0071
2 030	0.843	2 230	0.613	2 430	0.396	2 630	0.211	2 830	0.0749	3 030	0.0054
2 040	0.831	2 240	0.602	2 440	0.386	2 640	0.202	2 840	0.0698	3 040	0.0040
2 050	0.819	2 250	0.590	2 450	0.376	2 650	0.194	2 850	0.0648	3 050	0.0028
2 060	0.808	2 260	0.579	2 460	0.366	2 660	0.187	2 860	0.0599	3 060	0.0018
2 070	0.796	2 270	0.568	2 470	0.356	2 670	0.180	2 870	0.0552	3 070	0.0010
2 080	0.784	2 280	0.557	2 480	0.346	2 680	0.172	2 880	0.0507	3 080	0.0005
2 090	0.772	2 290	0.546	2 490	0.336	2 690	0.164	2 890	0.0463	3 090	0.0001
2 100	0.760	2 300	0.534	2 500	0.327	2 700	0.157	2 900	0.0421	3 100	0

とすれば (31) 式は

$$\sigma_k = \pi^2 \frac{E\tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \dots\dots\dots (32)^{(3)}$$

となる。軟鋼に對する Tetmajer の實驗公式

$$\sigma_k = 3.1 - 0.0114 \frac{l}{i} \quad t/cm^2 \dots\dots\dots (33)^{(4)}$$

を用ひ、 $\left(\frac{l}{i}\right)$ を (32) 式から消去すると

$$\tau = \frac{\sigma_k (3.1 - \sigma_k)^2}{E \cdot 0.0358} \dots\dots\dots (34)^{(5)}$$

となる。之の (34) 式は理論式 (32) と Tetmajer の實驗公式 (33) とを組合せたものである。Tetmajer の實驗に基く τ の値を示せば表-2⁽⁶⁾の通りとなる。

第 2 章 變斷面長柱の挫屈荷重の計算方法

第 1 節 總 說

斷面の一様でない長柱の挫屈に關する問題を取扱つた論文は極めて多い。我國に於ては愛知敬一⁽⁷⁾、小野鑑正⁽⁸⁾、田中豐⁽⁹⁾、中川元⁽¹⁰⁾、⁽¹¹⁾等の諸博士、内務省土木試験所の横田周平⁽¹²⁾、⁽²⁾及著者等⁽¹³⁾、⁽¹⁴⁾に依り夫々論文が發表せられてゐる。而して之等の諸論文は孰れも斷面が一定の單純なる法則に従つて連續的に變化する場合か又は長柱の形狀が柱の中點に對し左右對稱にして左右各部の斷面が夫々連續的に變化する場合に限られてゐる。

長柱の挫屈荷重を計算する方法は大別すると彈性曲線の微分方程式を解き、終端條件よりして挫屈條件式を求め、之より挫屈荷重を計算する方法とエネルギー式を用ひて挫屈荷重を計算する方法とがある。尙取扱はれてゐる例は見當らないが、彈性曲線の微分方程式を終端條件を用ひ、直接數値積分⁽¹⁵⁾も出來得るものと思はれる。又彈性曲線の微分方程式を Differenzgleichung に書き直して、挫屈荷重を計算すべき條件式を求めることも容易である。

然し孰れにしても彈性曲線の微分方程式は斷面の變化が一定の單純な法則に従はないと解き難いものである。只或る特殊な限られた場合のみが解き得るのである。従つて如何なる場合も挫屈荷重を決定すべき條件式が得らるゝとは限らない。

エネルギー式に依る方法では長柱の彈性曲線を假定しなければならぬ。勿論之の假定した長柱の彈性曲線が實際の彈性曲線に全く一致する場合は眞實の挫屈荷重を與へるが、假定した彈性曲線が實際の彈性曲線と一致しな

(3) Fr. Bleich, Stahlhochbauten, S. 131.

(4) " " " S. 139.

(5) " " " "

(6) " " " "

(7) 愛知敬一, "Section が一様ならぬ Long strut が與へ得る Load を與ふる公式" 機械學會誌, 第 22 卷, 第 56 號, 1919.

(8) 小野鑑正, "On the Stability of Long Struts of Variable Sections." Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University, Vol. I, No. 5, 1919.

(9) 田中豐, "On Strength of Columns with Variable Cross Sections." 土木學會誌第 15 卷, 第 3 號, 昭和 4 年 3 月.

(10) 中川元, "勾配部を有する圓柱の挫屈" 九州帝國大學工學彙報第 11 卷第 7 號. 昭和 11 年 12 月.

(11) 同上, "勾配部を有する矩形板の挫屈" 同上.

(12) 横田周平, "勢力式に依る變斷面對稱長柱の挫屈荷重を求むる近似計算法" 土木試験所報告, 第 44 號, 昭和 14 年 2 月.

(13) 拙著, "端部に於て變斷面を有する長柱の安定問題" 土木學會誌第 21 卷第 5 號, 昭和 10 年 5 月.

(14) 同上, "變斷面長柱 2, 3 の挫屈荷重" 土木學會誌第 24 卷第 11 號, 昭和 13 年 11 月.

(15) 日高孝次, "數値積分法" p. 134~140 變斷面長柱の場合と同型の微分方程式の固有値を數値積分法に依り解いてゐる.

い場合は近似値を興へるに過ぎない。終端条件を満足し、出来る丈實際の弾性曲線に近い弾性曲線を假定しなければならぬこととなるが、之のことは決して簡単のことではない。

以下述べんとする撓角撓度法に依る解法は計算は若干複雑であるが、長柱の断面が如何なる變化をなす場合でも、終端の支持状態が如何なる場合でも一樣に適用出来るものである。又必要があれば其の精度も高めることが出来る。

第 2 節 挫屈荷重の計算法

撓角撓度法により變断面長柱の挫屈荷重を求めるには次の方法をとる。圖-2 は挫屈荷重を求めんとする變断面長柱を示すものとする。柱の全長を L 、断面の最大の慣性モーメントを J_c を以つて表す。今之の柱を圖のやうに n 等分する。 n は任意に選び得るものであるが、出来る丈大なる方がよい。

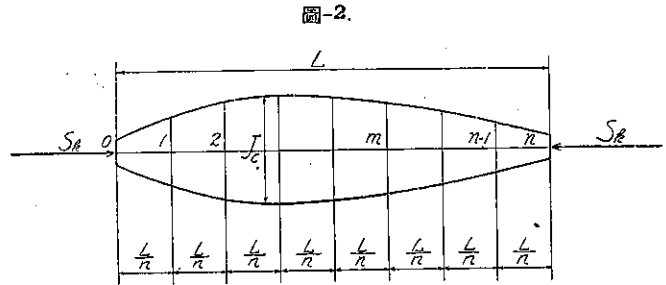
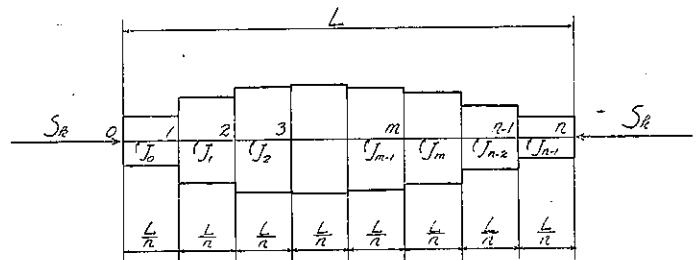


圖-2.

興へられた柱に對し適當な n を選ぶと n 等分せられた各區間の断面の慣性モーメントは近似的に直線變化をなすものと看做し得る。即ち慣性モーメントは梯形の連続したものと考へることが出来る。次に各區間毎に平均の慣性モーメントを求める。それには各區間の兩端の慣性モーメントを加へて 2 で割ればよい。斯くして求めた平均の慣性モーメントを夫々の區間の一樣なる慣性モーメントとする柱を考へる。之の柱に於ては慣性モーメントは階段狀に變化することとなる。

圖-3.

撓角撓度法による變断面長柱の計算は挫屈荷重を求めんとする變断面長柱を上記のやうに階段狀の柱に置き換へ、之の階段狀の柱に就き計算をすゝめるのである。従つて計算の結果は慣性モーメントが階段狀に變化する柱に對するもので、決して興へられた實際の柱そのものに對する値ではない。然し n を適當に選ぶことにより實用上差支へない値を得ることが出来るものである。又必要があるならば實際の柱にいくらかでも近づけ得る利點がある。



決して興へられた實際の柱そのものに對する値ではない。然し n を適當に選ぶことにより實用上差支へない値を得ることが出来るものである。又必要があるならば實際の柱にいくらかでも近づけ得る利點がある。

扱て挫屈荷重を求めんとする柱の代りに置き換へた階段狀の柱に圖-3 のやうに各分割點に $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ の番號をつけ、次の記號を用ひる。

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \kappa_0 J_c, J_1 = \kappa_1 J_c, \dots, J_m = \kappa_m J_c, \dots, J_{n-1} = \kappa_{n-1} J_c, \\
 \tau_0 &= \xi_0 \tau_c, \tau_1 = \xi_1 \tau_c, \dots, \tau_m = \xi_m \tau_c, \dots, \tau_{n-1} = \xi_{n-1} \tau_c, \\
 Z_c &= \sqrt{\frac{S_k L^2}{E J_c \tau_c}}, L = n l, \\
 Z_0 &= \sqrt{\frac{S_k l^2}{E J_0 \tau_0}} = u_0 Z_c, u_0 = \sqrt{\frac{1}{n^2 \kappa_0 \xi_0}}, \\
 Z_1 &= \sqrt{\frac{S_k l^2}{E J_1 \tau_1}} = u_1 Z_c, u_1 = \sqrt{\frac{1}{n^2 \kappa_1 \xi_1}}, \\
 &\vdots \\
 Z_m &= \sqrt{\frac{S_k l^2}{E J_m \tau_m}} = u_m Z_c, u_m = \sqrt{\frac{1}{n^2 \kappa_m \xi_m}}, \\
 &\vdots \\
 Z_{n-1} &= \sqrt{\frac{S_k l^2}{E J_{n-1} \tau_{n-1}}} = u_{n-1} Z_c, u_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n^2 \kappa_{n-1} \xi_{n-1}}}, \\
 c_0(z_0) &= c_0(u_0 z_c) = c_0, s_0(z_0) = s_0(u_0 z_c) = s_0
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1(z_1) &= c_1(u_1 z_c) = c_1, & s_1(z_1) &= s_1(u_1 z_c) = s_1 \\ c_m(z_m) &= c_m(u_m z_c) = c_m, & s_m(z_m) &= s_m(u_m z_c) = s_m \\ c_{n-1}(z_{n-1}) &= c_{n-1}(u_{n-1} z_c) = c_{n-1}, & s_{n-1}(z_{n-1}) &= s_{n-1}(u_{n-1} z_c) = s_{n-1} \end{aligned} \right\}$$

今之の柱が挫屈荷重を受け、撓曲を起してゐる場合、各割點を切り抜き取り出して考へると曲げモーメントの平衡條件式 $\Sigma M=0$ 及剪斷力の平衡條件式 $\Sigma Q=0$ が夫々の分割點毎に成立する。之等の平衡條件式は各分割點の撓角及變位で書き換へることが出来る。斯くして得られた聯立方程式の撓角及變位の係数で形成せられる行列式を零と置けば挫屈荷重を計算すべき條件式が得られる。

1. 兩端鉸端の場合

柱の軸壓縮應力 S が次第次第に増加して遂に挫屈荷重 S_k に達すると柱は撓曲を起し、各分割點は撓角と變位を生ずることとなる。従つて各部は曲げモーメントと剪斷力の作用を受ける。今分割點に於ける曲げモーメントの平衡條件式を求め、任意の分割點 m を考へる、端モーメントの式は

$$M_{m, m-1} = \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} \left\{ s_{m-1} \varphi_{m-1} + c_{m-1} \varphi_m - \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{l} (c_{m-1} + s_{m-1}) \right\}$$

$$M_{m, m+1} = \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_m}{c_m^2 - s_m^2} \left\{ c_m \varphi_m + s_m \varphi_{m+1} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{l} (c_m + s_m) \right\}$$

となり、 m 點の曲げモーメントの平衡條件式は

$$M_{m, m-1} + M_{m, m+1} = 0$$

を以つて表される。之に上記の値を代入すれば

$$\frac{\kappa_{m-1} s_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} \varphi_{m-1} + \left\{ \frac{\kappa_{m-1} c_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} + \frac{\kappa_m c_m}{c_m^2 - s_m^2} \right\} \varphi_m + \frac{\kappa_m s_m}{c_m^2 - s_m^2} \varphi_{m+1} + \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} \frac{\delta_{m-1}}{l} - \left\{ \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \right\} \frac{\delta_m}{l} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \frac{\delta_{m+1}}{l} = 0 \dots \dots \dots (36)$$

となる。之の (36) 式は任意の分割點に成立する曲げモーメントの平衡條件式であるが、分割點 1 及 $(n-1)$ に於ては兩端の支持條件を考慮しなければならない。

柱の兩端は鉸で支持されてゐるから $M_{0,1} = 0, M_{n,n-1} = 0$ となる、従つて $M_{1,0}$ 及 $M_{n-1,n}$ は鉸の影響を受け

$$M_{1,0} = \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_0}{c_0} \left\{ \varphi_1 - \frac{\delta_1}{l} \right\}$$

$$M_{n-1,n} = \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}} \left\{ \varphi_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{l} \right\}$$

となる。分割點 1 に於ける曲げモーメントの平衡條件式

$$M_{1,0} + M_{1,2} = 0$$

よりして

$$\left\{ \frac{\kappa_0}{c_0} + \frac{\kappa_1 c_1}{c_1^2 - s_1^2} \right\} \varphi_1 + \frac{\kappa_1 s_1}{c_1^2 - s_1^2} \varphi_2 - \left\{ \frac{\kappa_0}{c_0} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1} \right\} \frac{\delta_1}{l} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1} \frac{\delta_2}{l} = 0 \dots \dots \dots (37)$$

となる。同様にして分割點 $(n-1)$ の曲げモーメントの平衡條件式

$$M_{n-1,n-2} + M_{n-1,n} = 0$$

より

$$\frac{\kappa_{n-2} s_{n-2}}{c_{n-2}^2 - s_{n-2}^2} \varphi_{n-2} + \left\{ \frac{\kappa_{n-2} c_{n-2}}{c_{n-2}^2 - s_{n-2}^2} + \frac{\kappa_{n-1} c_{n-1}}{c_{n-1}^2 - s_{n-1}^2} \right\} \varphi_{n-1} + \frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2} - s_{n-2}} \frac{\delta_{n-2}}{l} - \left\{ \frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2} - s_{n-2}} - \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}} \right\} \frac{\delta_{n-1}}{l} = 0 \dots \dots \dots (38)$$

となる。

以上求めた曲げモーメントの平衡條件式を整理して書竝べて見ると次の (39) 式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 \rho'_1 \varphi_1 + a_1 \varphi_2 + \dots - d'_1 \frac{\delta_1}{l} - b_1 \frac{\delta_2}{l} \dots &= 0 \\
 a_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2 + a_2 \varphi_3 + \dots + b_1 \frac{\delta_1}{l} - d_2 \frac{\delta_2}{l} - b_2 \frac{\delta_3}{l} \dots &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 a_{m-1} \varphi_{m-1} + \rho_m \varphi_m + a_m \varphi_{m+1} + \dots + b_{m-1} \frac{\delta_{m-1}}{l} - d_m \frac{\delta_m}{l} - b_m \frac{\delta_{m+1}}{l} \dots &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 a_{n-3} \varphi_{n-3} + \rho_{n-2} \varphi_{n-2} + a_{n-2} \varphi_{n-1} + \dots + b_{n-3} \frac{\delta_{n-3}}{l} - d_{n-2} \frac{\delta_{n-2}}{l} - b_{n-2} \frac{\delta_{n-1}}{l} \dots &= 0 \\
 a_{n-2} \varphi_{n-2} + \rho'_{n-1} \varphi_{n-1} + \dots + b_{n-2} \frac{\delta_{n-2}}{l} - d'_{n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} \dots &= 0
 \end{aligned} \right\} (39)$$

但し上式中

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_m &= \frac{\kappa_{m-1} c_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} + \frac{\kappa_m c_m}{c_m^2 - s_m^2}, & a_m &= \frac{\kappa_m s_m}{c_m^2 - s_m^2}, \\
 \rho'_1 &= \frac{\kappa_0}{c_0} + \frac{\kappa_1 c_1}{c_1^2 - s_1^2}, & \rho'_{n-1} &= \frac{\kappa_{n-2} c_{n-2}}{c_{n-2}^2 - s_{n-2}^2} + \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}}, \\
 d_m &= \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, & b_m &= \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \\
 d'_1 &= \frac{\kappa_0}{c_0} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1}, & d'_{n-1} &= \frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2} - s_{n-2}} - \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}}
 \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

を表すものとする。

次に分割點に於ける剪斷力の平衡を考へる。之の場合も先づ任意の分割點 m をとつて見る。

m 點の左側の剪斷力を Q^l_m とすれば

$$Q^l_m = -\frac{M_{m, m-1} + M_{m, m+1}}{l} - S \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{l}$$

となる。然るに

$$\begin{aligned}
 M_{m, m-1} &= \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} \left\{ s_{m-1} \varphi_{m-1} + c_{m-1} \varphi_m - \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{l} (c_{m-1} + s_{m-1}) \right\} \\
 M_{m-1, m} &= \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} \left\{ c_{m-1} \varphi_{m-1} + s_{m-1} \varphi_m - \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{l} (c_{m-1} + s_{m-1}) \right\}
 \end{aligned}$$

なるを以つて

$$Q^l_m = -\frac{EJc}{l} \left\{ \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} \varphi_{m-1} + \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} \varphi_m + \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{l} \kappa_{m-1} \left(Z_{m-1}^2 - \frac{2}{c_{m-1} - s_{m-1}} \right) \right\}$$

となる。次に m 點の右側の剪斷力を Q^r_m とすれば

$$Q^r_m = -\frac{M_{m, m+1} + M_{m+1, m}}{l} - S \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{l}$$

となり

$$\begin{aligned}
 M_{m, m+1} &= \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_m}{c_m^2 - s_m^2} \left\{ c_m \varphi_m + s_m \varphi_{m+1} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{l} (c_m + s_m) \right\} \\
 M_{m+1, m} &= \frac{EJc}{l} \frac{\kappa_m}{c_m^2 - s_m^2} \left\{ s_m \varphi_m + c_m \varphi_{m+1} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{l} (c_m + s_m) \right\}
 \end{aligned}$$

なるを以つて

$$Q^r_m = -\frac{EJc}{l} \left\{ \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \varphi_m + \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \varphi_{m+1} + \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{l} \kappa_m \left(Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right) \right\}$$

となる。

扱て m 點を切り抜き取出して考へると m 點は平衡を保つてゐるから $\Sigma Q=0$ なるを要す。即ち

$$-Q'_m + Q''_m = 0$$

となる。従つて分割點に於ける剪斷力の平衡條件式は

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1}-s_{m-1}}\varphi_{m-1} - \left\{ \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1}-s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m-s_m} \right\} \varphi_m + \frac{\kappa_m}{c_m-s_m} \varphi_{m+1} \\ & + \kappa_{m-1} \left(Z^2_{m-1} - \frac{2}{c_{m-1}-s_{m-1}} \right) \frac{\delta_{m-1}}{l} - \left\{ \kappa_{m-1} \left(Z^2_{m-1} - \frac{2}{c_{m-1}-s_{m-1}} \right) \right. \\ & \left. + \kappa_m \left(Z^2_m - \frac{2}{c_m-s_m} \right) \right\} \frac{\delta_m}{l} + \kappa_m \left(Z^2_m - \frac{2}{c_m-s_m} \right) \frac{\delta_{m+1}}{l} = 0 \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

となる。

之の (41) 式は任意の分割點に對するものであるが、1 及 $(n-1)$ には適用されない。兩端鉸の影響を考慮に入れて分割點 1 の左側の剪斷力 Q^1_1 を求めれば

$$Q^1_1 = -\frac{EJc}{l^2} \left\{ \frac{\kappa_0}{c_0} \varphi_1 + \frac{\delta_1}{l} \kappa_0 \left(Z^2_0 - \frac{1}{c_0} \right) \right\}$$

となる。又分割點 $(n-1)$ の右側の剪斷力 Q^{n-1} を求めると

$$Q^{n-1} = -\frac{EJc}{l} \left\{ \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}} \frac{\delta_{n-1}}{l} \kappa_{n-1} \left(Z^2_{n-1} - \frac{1}{c_{n-1}} \right) \right\}$$

となる。従つて分割點 1 に於ける剪斷力の平衡條件式は

$$\begin{aligned} & -\left\{ \frac{\kappa_0}{c_0} - \frac{\kappa_1}{c_1-s_1} \right\} \varphi_1 + \frac{\kappa_1}{c_1-s_1} \varphi_2 - \left\{ \kappa_0 \left(Z^2_0 - \frac{1}{c_0} \right) + \kappa_1 \left(Z^2_1 - \frac{2}{c_1-s_1} \right) \right\} \frac{\delta_1}{l} \\ & + \kappa_1 \left(Z^2_1 - \frac{2}{c_1-s_1} \right) \frac{\delta_2}{l} = 0 \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

となり、又分割點 $(n-1)$ に對する剪斷力の平衡條件式は

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2}-s_{n-2}} \varphi_{n-2} - \left\{ \frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2}-s_{n-2}} - \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}} \right\} \varphi_{n-1} + \kappa_{n-2} \left(Z^2_{n-2} - \frac{2}{c_{n-2}-s_{n-2}} \right) \frac{\delta_{n-2}}{l} \\ & - \left\{ \kappa_{n-2} \left(Z^2_{n-2} - \frac{2}{c_{n-2}-s_{n-2}} \right) + \kappa_{n-1} \left(Z^2_{n-1} - \frac{1}{c_{n-1}} \right) \right\} \frac{\delta_{n-1}}{l} = 0 \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

となる。

以上求めた剪斷力の平衡條件式を整理して書直ると次の (44) 式となる。

$$\begin{aligned} & -d'_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 + \dots\dots\dots - \bar{p}'_1 \frac{\delta_1}{l} + e_1 \frac{\delta_2}{l} \dots\dots\dots = 0 \\ & -b_1 \varphi_1 - d_2 \varphi_2 + b_2 \varphi_3 + \dots\dots\dots + e_1 \frac{\delta_1}{l} - \bar{p}_2 \frac{\delta_2}{l} + e_2 \frac{\delta_3}{l} \dots\dots\dots = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & -b_{n-1} \varphi_{m-1} - d_m \varphi_m + b_{m+1} \varphi_{m+1} + \dots\dots\dots + e_{m-1} \frac{\delta_{m-1}}{l} - \bar{p}_m \frac{\delta_m}{l} + e_m \frac{\delta_{m+1}}{l} \dots\dots\dots = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & -b_{n-3} \varphi_{n-3} - d_{n-2} \varphi_{n-2} + b_{n-2} \varphi_{n-1} + \dots\dots\dots + e_{n-3} \frac{\delta_{n-3}}{l} - \bar{p}_{n-2} \frac{\delta_{n-2}}{l} + e_{n-2} \frac{\delta_{n-1}}{l} = 0 \\ & -b_{n-2} \varphi_{n-2} - d'_{n-1} \varphi_{n-1} + \dots\dots\dots + e_{n-2} \frac{\delta_{n-2}}{l} - \bar{p}'_{n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

但し上式中

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_m &= \kappa_{m-1} \left(Z_{m-1}^2 - \frac{2}{c_{m-1} - s_{m-1}} \right) + \kappa_m \left(Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right), \\
 e_m &= \kappa_m \left(Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right), \\
 \bar{\rho}'_1 &= \kappa_0 \left(Z_0^2 - \frac{1}{c_0} \right) + \kappa_1 \left(Z_1^2 - \frac{2}{c_1 - s_1} \right), \\
 \bar{\rho}'_{n-1} &= \kappa_{n-2} \left(Z_{n-2}^2 - \frac{2}{c_{n-2} - s_{n-2}} \right) + \kappa_{n-1} \left(Z_{n-1}^2 - \frac{1}{c_{n-1}} \right) \\
 \bar{d}_m &= \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, \quad \bar{b}_m = \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, \\
 \bar{d}'_1 &= \frac{\kappa_0}{c_0} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1}, \quad \bar{d}'_{n-1} = \frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2} - s_{n-2}} - \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1}}
 \end{aligned} \tag{45}$$

を表すものである。

従つて撓屈荷重を計算すべき条件式は次の (46) 式として與へられる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho'_1 & a_1 & & & -d'_1 & -b_1 & \\
 & \rho_2 & a_2 & & b_1 & -d_2 & -b_2 \\
 & & \rho_m & a_m & & & \\
 & & & \rho_{n-2} & a_{n-2} & & \\
 & & & & \rho'_{n-1} & & \\
 -d'_1 & b_1 & & & -\bar{\rho}'_1 & e_1 & \\
 -b_1 & -d_2 & b_2 & & e_1 & -\bar{\rho}_2 & e_2 \\
 & & -d_m & b_m & & e_{m-1} & -\bar{\rho}_m & e_m \\
 & & & -d_{n-2} & b_{n-2} & & & e_{n-3} & -\bar{\rho}_{n-2} & e_{n-2} \\
 & & & & -b_{n-2} & d'_{n-1} & & & & e_{n-2} & -\bar{\rho}'_{n-1}
 \end{array} = 0 \tag{46}$$

然し上の行列式は行と列との数が多く計算は決して簡単でないから次の様に計算する。 Z_0 に或る數値を假定する。然る時は (39), (44) 兩式の係数は總て數字で與へられる。先づ (39) 式から φ を δ/l で表す。之は比較的簡単に解くことが出来る。一般解は

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \alpha_{1,1} \frac{\delta_1}{l} + \alpha_{1,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \alpha_{1,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \alpha_{1,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} \\
 \varphi_2 &= \alpha_{2,1} \frac{\delta_1}{l} + \alpha_{2,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \alpha_{2,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \alpha_{2,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} \\
 &\vdots \\
 \varphi_m &= \alpha_{m,1} \frac{\delta_1}{l} + \alpha_{m,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \alpha_{m,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \alpha_{m,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} \\
 &\vdots \\
 \varphi_{n-1} &= \alpha_{n-1,1} \frac{\delta_1}{l} + \alpha_{n-1,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \alpha_{n-1,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \alpha_{n-1,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l}
 \end{aligned} \tag{47}$$

となる。 α は總て數字を表すものである。次に之の値を (44) 式に代入する。然るときは次の (48) 式となる。

$$\begin{aligned}
 \beta_{1,1} \frac{\delta_1}{l} + \beta_{1,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \beta_{1,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \beta_{1,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} &= 0 \\
 \beta_{2,1} \frac{\delta_1}{l} + \beta_{2,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \beta_{2,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \beta_{2,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \beta_{m,1} \frac{\delta_1}{l} + \beta_{m,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \beta_{m,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \beta_{m,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \beta_{n-1,1} \frac{\delta_1}{l} + \beta_{n-1,2} \frac{\delta_2}{l} + \dots + \beta_{n-1,m} \frac{\delta_m}{l} + \dots + \beta_{n-1,n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} &= 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

但し上式中

$$\left. \begin{aligned} \rho_m &= \frac{\kappa_{m-1}c_{m-1}}{c_{m-1}^2 - s_{m-1}^2} + \frac{\kappa_m c_m}{c_m^2 - s_m^2}, & \alpha_m &= \frac{\kappa_m s_m}{c_m^2 - s_m^2}, \\ d_m &= \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, & b_m &= \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

を表すものである。

次に分割點に於ける剪斷力の平衡條件式を求める。之の場合も曲げモーメントの平衡條件式と同様に 2, 3, …… (n-2) に於ては兩端鉸端の場合と全く同様である。只分割點 1 に於ける平衡條件式は

$$\begin{aligned} - \left\{ \frac{\kappa_0}{c_0 - s_0} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1} \right\} \varphi_1 + \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1} \varphi_2 - \left\{ \kappa_0 \left(Z_0^2 - \frac{2}{c_0 - s_0} \right) + \kappa_1 \left(Z_1^2 - \frac{2}{c_1 - s_1} \right) \right\} \frac{\delta_1}{l} \\ + \kappa_1 \left(Z_1^2 - \frac{2}{c_1 - s_1} \right) \frac{\delta_2}{l} = 0 \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

となり、分割點 (n-1) に於ける剪斷力の平衡條件式は

$$\begin{aligned} - \left\{ \frac{\kappa_{n-2}}{c_{n-2} - s_{n-2}} - \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1} - s_{n-1}} \right\} \varphi_{n-2} + \frac{\kappa_{n-1}}{c_{n-1} - s_{n-1}} \varphi_{n-1} + \kappa_{n-2} \left(Z_{n-2}^2 - \frac{2}{c_{n-2} - s_{n-2}} \right) \frac{\delta_{n-2}}{l} \\ - \left\{ \kappa_{n-2} \left(Z_{n-2}^2 - \frac{2}{c_{n-2} - s_{n-2}} \right) + \kappa_{n-1} \left(Z_{n-1}^2 - \frac{2}{c_{n-1} - s_{n-1}} \right) \right\} \frac{\delta_{n-1}}{l} = 0 \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

となる。剪斷力の平衡條件式を整理すると

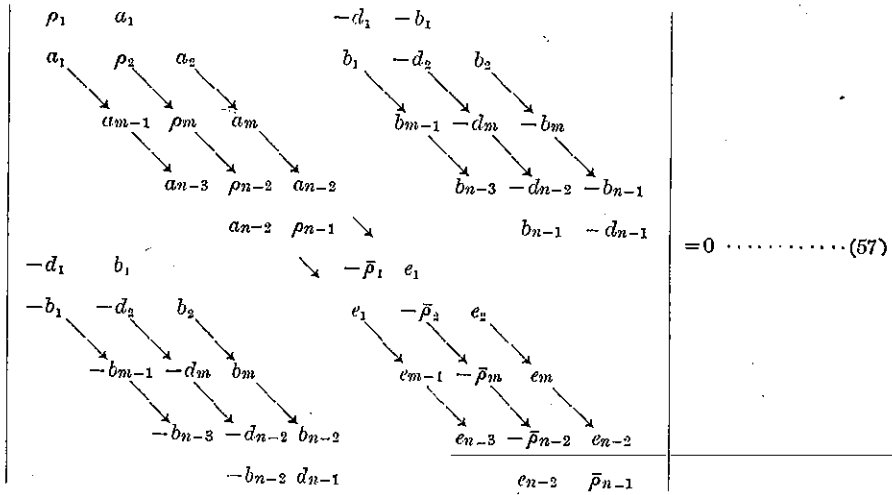
$$\left. \begin{aligned} -d_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 \dots\dots\dots - \bar{\rho}_1 \frac{\delta_1}{l} + e_1 \frac{\delta_2}{l} \dots\dots\dots &= 0 \\ -b_1 \varphi_1 - d_2 \varphi_2 + b_2 \varphi_3 \dots\dots\dots + e_1 \frac{\delta_1}{l} - \bar{\rho}_2 \frac{\delta_2}{l} + e_2 \frac{\delta_3}{l} \dots\dots\dots &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ -b_{m-1} \varphi_{m-1} - d_m \varphi_m + b_m \varphi_{m+1} \dots\dots\dots + e_{m-1} \frac{\delta_{m-1}}{l} - \bar{\rho}_m \frac{\delta_m}{l} + e_m \frac{\delta_{m+1}}{l} \dots\dots\dots &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ -b_{n-3} \varphi_{n-3} - d_{n-2} \varphi_{n-2} + b_{n-1} \varphi_{n-1} \dots\dots\dots + e_{n-3} \frac{\delta_{n-3}}{l} - \bar{\rho}_{n-2} \frac{\delta_{n-2}}{l} + e_{n-2} \frac{\delta_{n-1}}{l} &= 0 \\ -b_{n-2} \varphi_{n-2} - d_{n-1} \varphi_{n-1} \dots\dots\dots + e_{n-2} \frac{\delta_{n-2}}{l} - \bar{\rho}_{n-1} \frac{\delta_{n-1}}{l} &= 0 \end{aligned} \right\} (55)$$

となる。但し上式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_m &= \kappa_{m-1} \left(Z_{m-1}^2 - \frac{1}{c_{m-1} - s_{m-1}} \right) + \kappa_m \left(Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right), \\ e_m &= \kappa_m \left(Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right), \\ d_m &= \frac{\kappa_{m-1}}{c_{m-1} - s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, & b_m &= \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

を表はすものである。

撓屈條件式を求めれば次の (57) 式となる。



之の場合も (57) 式から直接 Z_c の最小根 Z_c^0 を見出すことは行列式の行と列との数が多いため困難であるから、両端鉸端の場合と同様の計算方法による方がよい。即ち Z_c に或る値を假定する。然る時は (51), (55) の兩式は係数が總て既知となる。先づ (51) 式より φ を δ/l で表し、之を (55) 式に代入し δ/l のみの聯立方程式を作る。之の聯立方程式の係数の作る行列式 $\Delta(\beta)$ の値を計算する。之の方法を Z_c の種々なる値に對し繰返すとグラフにより丁度行列式を零ならしめる Z_c^0 の値を見出すことが出来る。 Z_c^0 がわかれば (35) 式より撓屈荷重が計算される。

第3節 計算例

次の圖-5 に示す如く、慣性モーメントが菱形をなす長柱の撓屈強度を求めて見る。柱の全長を L 、中央の最大の慣性モーメントを J_c で表す。之の長柱は慣性モーメントが直線變化をなすから弾性曲線の微分方程式はベッセル函数として解かれ、撓屈荷重の理論値は弾性限度内に於ては

$$S_k = 0.58 \frac{\pi^2 E J_c}{L^2}$$

となる。

今 $n=10$ とすれば圖-6 に示す如く、實際の柱に置換へて計算を行ふこととなる階段状の柱も左右對稱となる。各間區の平均の慣性モーメントを求めると $J_0=J_9=0.1 J_c$ 、 $J_1=J_8=0.3 J_c$ 、 $J_2=J_7=0.5 J_c$ 、 $J_3=J_6=0.7 J_c$ 、 $J_4=J_5=0.9 J_c$ となり

$$\kappa_0 = \kappa_9 = 0.1, \kappa_1 = \kappa_8 = 0.3, \kappa_2 = \kappa_7 = 0.5, \kappa_3 = \kappa_6 = 0.7, \kappa_4 = \kappa_5 = 0.9$$

となる。又柱の斷面積が全長を通じ變らないものとするれば

$$\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = \xi_8 = 1$$

となる。従つて

$$u_0 = u_9 = 0.316$$

$$u_1 = u_8 = 0.188$$

$$u_2 = u_7 = 0.141$$

圖-5.

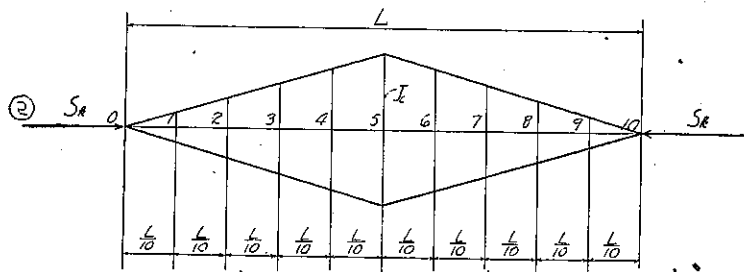
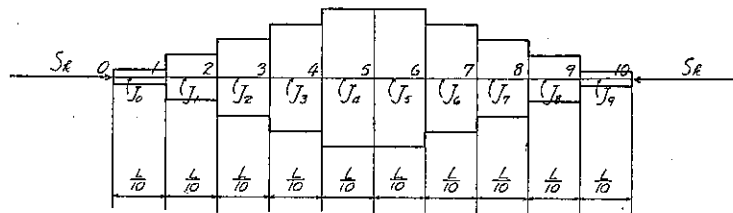


圖-6.



$$u_3 = u_6 = 0.119 \quad u_4 = u_5 = 0.105$$

となる。

柱は左右対称であるから挫屈荷重の計算には対称形の撓曲を考へれば充分である。

各分割點に於ける曲げモーメントの平衡條件式は

$$\left. \begin{aligned} \rho'_1 \varphi_1 + a_1 \varphi_2 \dots \dots \dots - d'_1 \frac{\delta_1}{l} - b_1 \frac{\delta_2}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ a_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 \dots \dots + b_1 \frac{\delta_1}{l} - d_2 \frac{\delta_2}{l} - b_2 \frac{\delta_3}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ a_2 \varphi_2 + \rho_3 \varphi_3 + a_4 \varphi_4 \dots \dots + b_2 \frac{\delta_2}{l} - d_3 \frac{\delta_3}{l} - b_3 \frac{\delta_4}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ a_3 \varphi_3 + \rho_4 \varphi_4 \dots \dots \dots + b_3 \frac{\delta_3}{l} - d_4 \frac{\delta_4}{l} - b_4 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (i)$$

となる。但し上式中

$$\left. \begin{aligned} \rho_m &= \frac{\kappa_m - 1 c_{m-1}}{c_m^2 - s_m^2} + \frac{\kappa_m c_m}{c_m^2 - s_m^2}, & a_m &= \frac{\kappa_m s_m}{c_m^2 - s_m^2} \\ d_m &= \frac{\kappa_m - 1}{c_m - s_m} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, & b_m &= \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \\ \rho'_1 &= \frac{\kappa_0}{c_0} + \frac{\kappa_1 c_1}{c_1^2 - s_1^2}, & d'_1 &= \frac{\kappa_0}{c_0} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (ii)$$

となる。又剪断力の平衡條件式は

$$\left. \begin{aligned} -d'_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 \dots \dots \dots - \bar{\rho}'_1 \frac{\delta_1}{l} + e_1 \frac{\delta_2}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ -b_1 \varphi_1 - d_2 \varphi_2 + b_2 \varphi_3 \dots \dots + e_1 \frac{\delta_1}{l} - \bar{\rho}_2 \frac{\delta_2}{l} + e_2 \frac{\delta_3}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ -b_2 \varphi_2 - d_3 \varphi_3 + b_3 \varphi_4 \dots \dots + e_2 \frac{\delta_2}{l} - \bar{\rho}_3 \frac{\delta_3}{l} + e_3 \frac{\delta_4}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ -b_3 \varphi_3 - d_4 \varphi_4 \dots \dots \dots + e_3 \frac{\delta_3}{l} - \bar{\rho}_4 \frac{\delta_4}{l} + e_4 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \\ -b_4 \varphi_4 \dots \dots \dots + e_4 \frac{\delta_4}{l} - e_4 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (iii)$$

となる。但し上式中

$$\left. \begin{aligned} d_m &= \frac{\kappa_m - 1}{c_m - 1 - s_{m-1}} - \frac{\kappa_m}{c_m - s_m}, & b_m &= \frac{\kappa_m}{c_m - s_m} \\ \bar{\rho}_m &= \kappa_m - 1 \left(Z_m^2 - 1 - \frac{2}{c_m - 1 - s_{m-1}} \right) + \kappa_m \left[Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right], & e_m &= \kappa_m \left(Z_m^2 - \frac{2}{c_m - s_m} \right), \\ d'_1 &= \frac{\kappa_0}{c_0} - \frac{\kappa_1}{c_1 - s_1}, & \bar{\rho}'_1 &= \kappa_0 \left(Z_0^2 - \frac{1}{c_0} \right) + \kappa_1 \left(Z_1^2 - \frac{2}{c_1 - s_1} \right) \end{aligned} \right\} (iv)$$

を表すものとする。

今 $Z_0 = 0.7 \pi$ とすれば曲げモーメントの平衡條件式は

$$\left. \begin{aligned} 1.4843 \varphi_1 + 0.6012 \varphi_2 \dots \dots \dots + 1.5040 \frac{\delta_1}{l} - 1.7943 \frac{\delta_2}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ 0.6012 \varphi_1 + 3.1866 \varphi_2 + 1.0015 \varphi_3 \dots \dots + 1.7943 \frac{\delta_1}{l} + 1.2007 \frac{\delta_2}{l} - 2.9950 \frac{\delta_3}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ 1.0015 \varphi_2 + 4.7865 \varphi_3 + 1.4007 \varphi_4 \dots \dots + 2.9950 \frac{\delta_2}{l} + 1.1987 \frac{\delta_3}{l} - 4.1937 \frac{\delta_4}{l} \dots \dots \dots &= 0 \\ 1.4007 \varphi_3 + 6.3858 \varphi_4 \dots \dots \dots + 4.1937 \frac{\delta_3}{l} + 1.1900 \frac{\delta_4}{l} - 5.3837 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

となる。又剪断力の平衡条件式は

$$\left. \begin{aligned}
 1.5040 \varphi_1 + 1.7943 \varphi_2 & \dots \dots \dots + 3.7630 \frac{\delta_1}{l} - 3.5385 \frac{\delta_2}{l} \dots \dots \dots = 0 \\
 -1.7943 \varphi_1 + 1.2007 \varphi_2 + 2.9950 \varphi_3 & \dots \dots \dots - 3.5385 \frac{\delta_1}{l} + 9.4790 \frac{\delta_2}{l} - 5.9405 \frac{\delta_3}{l} \dots \dots \dots = 0 \\
 -2.9950 \varphi_2 + 1.1987 \varphi_3 + 4.1937 \varphi_4 & \dots \dots \dots - 5.9405 \frac{\delta_2}{l} + 14.2838 \frac{\delta_3}{l} - 8.3433 \frac{\delta_4}{l} \dots \dots \dots = 0 \\
 -4.1937 \varphi_3 + 1.1900 \varphi_4 & \dots \dots \dots - 8.3433 \frac{\delta_3}{l} + 19.0875 \frac{\delta_4}{l} - 10.7442 \frac{\delta_5}{l} = 0 \\
 -5.3837 \varphi_4 & \dots \dots \dots - 10.7442 \frac{\delta_4}{l} + 10.7442 \frac{\delta_5}{l} = 0
 \end{aligned} \right\} (b)$$

となる。(a) 式より φ を δ/l で表せば

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -0.837 \frac{\delta_1}{l} + 1.396 \frac{\delta_2}{l} - 0.455 \frac{\delta_3}{l} + 0.148 \frac{\delta_4}{l} - 0.039 \frac{\delta_5}{l} \\
 \varphi_2 &= -0.436 \frac{\delta_1}{l} - 0.465 \frac{\delta_2}{l} + 1.124 \frac{\delta_3}{l} - 0.366 \frac{\delta_4}{l} + 0.097 \frac{\delta_5}{l} \\
 \varphi_3 &= +0.098 \frac{\delta_1}{l} - 0.565 \frac{\delta_2}{l} - 0.314 \frac{\delta_3}{l} + 1.077 \frac{\delta_4}{l} - 0.285 \frac{\delta_5}{l} \\
 \varphi_4 &= -0.022 \frac{\delta_1}{l} + 0.124 \frac{\delta_2}{l} - 0.588 \frac{\delta_3}{l} - 0.423 \frac{\delta_4}{l} + 0.905 \frac{\delta_5}{l}
 \end{aligned}$$

となる。之の値を (b) 式に代入すれば

$$\begin{aligned}
 1.72 \frac{\delta_1}{l} - 2.27 \frac{\delta_2}{l} + 1.33 \frac{\delta_3}{l} - 0.43 \frac{\delta_4}{l} + 0.12 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \\
 -2.27 \frac{\delta_1}{l} + 4.73 \frac{\delta_2}{l} - 4.71 \frac{\delta_3}{l} + 2.52 \frac{\delta_4}{l} - 0.67 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \\
 1.33 \frac{\delta_1}{l} - 4.71 \frac{\delta_2}{l} + 8.06 \frac{\delta_3}{l} - 7.73 \frac{\delta_4}{l} + 3.16 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \\
 -0.43 \frac{\delta_1}{l} + 2.52 \frac{\delta_2}{l} - 7.73 \frac{\delta_3}{l} + 14.07 \frac{\delta_4}{l} - 8.47 \frac{\delta_5}{l} &= 0 \\
 0.12 \frac{\delta_1}{l} - 0.67 \frac{\delta_2}{l} + 3.16 \frac{\delta_3}{l} - 8.47 \frac{\delta_4}{l} + 5.87 \frac{\delta_5}{l} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

上式の δ/l の係数の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix}
 1.72 & -2.27 & 1.33 & -0.43 & 0.12 \\
 -2.27 & 4.73 & -4.71 & 2.52 & -0.67 \\
 1.33 & -4.71 & 8.06 & -7.73 & 3.16 \\
 -0.43 & 2.52 & -7.73 & 14.07 & -8.47 \\
 0.12 & -0.67 & 3.16 & -8.47 & 5.87
 \end{vmatrix} = -0.809 \dots \dots \dots (v)$$

となる。次に $Z_0 = 0.8\pi$ とすれば曲げモーメントの平衡条件式は

$$\left. \begin{aligned}
 1.4787 \varphi_1 + 0.6024 \varphi_2 & \dots \dots \dots + 1.5063 \frac{\delta_1}{l} - 1.7937 \frac{\delta_2}{l} \dots \dots \dots = 0 \\
 0.6024 \varphi_1 + 3.1833 \varphi_2 + 1.0020 \varphi_3 & \dots \dots \dots + 1.7937 \frac{\delta_1}{l} + 1.2008 \frac{\delta_2}{l} - 2.9945 \frac{\delta_3}{l} \dots \dots \dots = 0 \\
 1.0020 \varphi_2 + 4.7829 \varphi_3 + 1.4021 \varphi_4 & \dots \dots \dots + 2.9945 \frac{\delta_2}{l} + 1.1985 \frac{\delta_3}{l} - 4.1930 \frac{\delta_4}{l} \dots \dots \dots = 0 \\
 1.4021 \varphi_3 + 6.3819 \varphi_4 & \dots \dots \dots + 4.1930 \frac{\delta_3}{l} + 1.1989 \frac{\delta_4}{l} - 5.3919 \frac{\delta_5}{l} = 0
 \end{aligned} \right\} (a')$$

となる。又剪断力の平衡条件式は

$$\begin{aligned}
 &1.5063 \varphi_1 + 1.7937 \varphi_2 \dots\dots\dots + 3.7766 \frac{\delta_1}{l} - 3.5508 \frac{\delta_2}{l} \dots\dots\dots = 0 \\
 &-1.7937 \varphi_1 + 1.2008 \varphi_2 + 2.9945 \varphi_3 \dots\dots\dots - 3.5508 \frac{\delta_1}{l} + 9.4803 \frac{\delta_2}{l} - 5.9295 \frac{\delta_3}{l} \dots\dots\dots = 0 \\
 &\quad -2.9945 \varphi_2 + 1.1985 \varphi_3 + 4.1930 \varphi_4 \dots\dots\dots - 5.9295 \frac{\delta_2}{l} + 14.2462 \frac{\delta_3}{l} - 8.3167 \frac{\delta_4}{l} \dots\dots\dots = 0 \\
 &\quad\quad -4.1930 \varphi_3 + 1.1989 \varphi_4 \dots\dots\dots - 8.3167 \frac{\delta_3}{l} + 19.0488 \frac{\delta_4}{l} - 10.7279 \frac{\delta_5}{l} = 0 \\
 &\quad\quad\quad -5.3919 \varphi_4 \dots\dots\dots - 10.7279 \frac{\delta_4}{l} + 10.7279 \frac{\delta_5}{l} = 0
 \end{aligned} \tag{b'}$$

となる。(a') 式より φ を δ/l で表せば

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -0.842 \frac{\delta_1}{l} + 1.402 \frac{\delta_2}{l} - 0.459 \frac{\delta_3}{l} + 0.150 \frac{\delta_4}{l} - 0.040 \frac{\delta_5}{l} \\
 \varphi_2 &= -0.435 \frac{\delta_1}{l} - 0.465 \frac{\delta_2}{l} + 1.126 \frac{\delta_3}{l} - 0.368 \frac{\delta_4}{l} + 0.098 \frac{\delta_5}{l} \\
 \varphi_3 &= +0.097 \frac{\delta_1}{l} - 0.565 \frac{\delta_2}{l} - 0.314 \frac{\delta_3}{l} + 1.078 \frac{\delta_4}{l} - 0.287 \frac{\delta_5}{l} \\
 \varphi_4 &= -0.021 \frac{\delta_1}{l} + 0.124 \frac{\delta_2}{l} - 0.588 \frac{\delta_3}{l} - 0.425 \frac{\delta_4}{l} + 0.908 \frac{\delta_5}{l}
 \end{aligned}$$

となる。之の値を (b') 式に代入すれば

$$\begin{aligned}
 &1.73 \frac{\delta_1}{l} - 2.27 \frac{\delta_2}{l} + 1.33 \frac{\delta_3}{l} - 0.43 \frac{\delta_4}{l} + 0.12 \frac{\delta_5}{l} = 0 \\
 &-2.27 \frac{\delta_1}{l} + 4.71 \frac{\delta_2}{l} - 4.69 \frac{\delta_3}{l} + 2.52 \frac{\delta_4}{l} - 0.67 \frac{\delta_5}{l} = 0 \\
 &1.33 \frac{\delta_1}{l} - 4.69 \frac{\delta_2}{l} + 8.03 \frac{\delta_3}{l} - 7.70 \frac{\delta_4}{l} + 3.17 \frac{\delta_5}{l} = 0 \\
 &-0.43 \frac{\delta_1}{l} + 2.52 \frac{\delta_2}{l} - 7.70 \frac{\delta_3}{l} + 14.01 \frac{\delta_4}{l} + 8.44 \frac{\delta_5}{l} = 0 \\
 &0.12 \frac{\delta_1}{l} - 0.67 \frac{\delta_2}{l} + 3.17 \frac{\delta_3}{l} - 8.44 \frac{\delta_4}{l} + 5.83 \frac{\delta_5}{l} = 0
 \end{aligned}$$

となる。上式の δ/l の係数の行列式の値は

$$\begin{vmatrix}
 1.73 & -2.27 & 1.33 & -0.43 & 0.12 \\
 -2.27 & 4.71 & -4.69 & 2.52 & -0.67 \\
 1.33 & -4.69 & 8.03 & -7.70 & 3.17 \\
 -0.43 & 2.52 & -7.70 & 14.01 & -8.44 \\
 0.12 & -0.67 & 3.17 & -8.44 & 5.83
 \end{vmatrix} = +0.279 \dots\dots\dots \tag{vi}$$

となる。故に $Z_c^0 = 0.75 \pi$ を得る。之より

$$S_k = (0.75 \pi)^2 \frac{EJ_c r_0}{L^2} = 0.56 \frac{\pi^2 EJ_c r_0}{L^2}$$

となる。弾性限度内の撓屈の場合は $r_0 = 1$ とすればよい。之を前記の理論値と比較すると約 3% 小であるが、實用上差支へない。

第 3 章 多数の剛支点を有する連続長柱の撓屈強度の計算法

第 1 節 撓角撓度法による一般解法

中間に多数の剛支点を有する例へば^{(16),(17),(18)} 連続長柱の撓屈に関する問題は既に古くから多くの人々に依つて

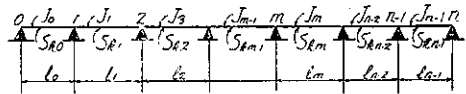
取扱はれて来た。最近には北海道帝國大學農學部金俊三助教授⁽¹⁶⁾の研究論文がある。

之の多數の剛支點を有する連續長柱の手近な例としては平行弦トラスの上弦材が其の構面内に撓屈の場合をあげることが出来る。今撓角撓度法による一般解法を示せば次

圖-7.

の通りである。

柱は次の圖-7 に示す通り、一般なる場合とし、徑間數を n とし、軸壓縮應力も断面の慣性モーメントも徑間長も夫々各徑間毎に異なるものとする。次の記號を用ひる。



$$\begin{aligned}
 J_0 &= \kappa_0 J_c, & J_1 &= \kappa_1 J_c, & \dots & J_m &= \kappa_m J_c, & \dots & J_{n-1} &= \kappa_{n-1} J_c, \\
 S_{k,0} &= \bar{\kappa}_0 S_c, & S_{k,1} &= \bar{\kappa}_1 S_c, & \dots & S_{k,m} &= \bar{\kappa}_m S_c, & \dots & S_{k,n-1} &= \bar{\kappa}_{n-1} S_c, \\
 l_0 &= \bar{\xi}_0 l_c, & l_1 &= \bar{\xi}_1 l_c, & \dots & l_m &= \bar{\xi}_m l_c, & \dots & l_{n-1} &= \bar{\xi}_{n-1} l_c, \\
 \tau_0 &= \bar{\xi}_0 \tau_c, & \tau_1 &= \bar{\xi}_1 \tau_c, & \dots & \tau_m &= \bar{\xi}_m \tau_c, & \dots & \tau_{n-1} &= \bar{\xi}_{n-1} \tau_c, \\
 Z_0 &= \sqrt{\frac{S_0 l_c^2}{E J_c \tau_c}} \\
 Z_0 &= \sqrt{\frac{S_{k,0} l_0^2}{E J_0 \tau_0}} = u_0 Z_c & u_0 &= \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_0 \bar{\xi}_0^2}{\kappa_0 \xi_0}} \\
 Z_1 &= \sqrt{\frac{S_{k,1} l_1^2}{E J_1 \tau_1}} = u_1 Z_c & u_1 &= \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_1 \bar{\xi}_1^2}{\kappa_1 \xi_1}} \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 Z_m &= \sqrt{\frac{S_{k,m} l_m^2}{E J_m \tau_m}} = u_m Z_c & u_m &= \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_m \bar{\xi}_m^2}{\kappa_m \xi_m}} \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 Z_{n-1} &= \sqrt{\frac{S_{k,n-1} l_{n-1}^2}{E J_{n-1} \tau_{n-1}}} = u_{n-1} Z_c & u_{n-1} &= \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_{n-1} \bar{\xi}_{n-1}^2}{\kappa_{n-1} \xi_{n-1}}} \\
 c_0(z_0) &= c_0(u_0 z_c) = c_0, & s_0(z_0) &= s_0(u_0 z_c) = s_0 \\
 c_1(z_1) &= c_1(u_1 z_c) = c_1, & s_1(z_1) &= s_1(u_1 z_c) = s_1 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 c_m(z_m) &= c_m(u_m z_c) = c_m, & s_m(z_m) &= s_m(u_m z_c) = s_m \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 c_{n-1}(z_{n-1}) &= c_{n-1}(u_{n-1} z_c) = c_{n-1}, & s_{n-1}(z_{n-1}) &= s_{n-1}(u_{n-1} z_c) = s_{n-1}
 \end{aligned} \tag{58}$$

1. 兩端鉸端の場合

任意の支點 m に於ける曲げモーメントの平衡條件式を求める。之の場合各支點は剛支點なるが故に支點の變位 δ は存在しないこととなる。従つて端モーメントの式は簡單に

$$\begin{aligned}
 M_{m,m-1} &= \frac{E J_c}{l_c} \frac{\kappa_{m-1}}{\bar{\xi}_{m-1}} \frac{1}{c^2_{m-1} - s^2_{m-1}} \{ s_{m-1} \varphi_{m-1} + c_{m-1} \varphi_m \} \\
 M_{m,m+1} &= \frac{E J_c}{l_c} \frac{\kappa_m}{\bar{\xi}_m} \frac{1}{c^2_m - s^2_m} \{ c_m \varphi_m + c_m \varphi_{m+1} \}
 \end{aligned}$$

となる。曲げモーメントの平衡條件式 $\sum M = 0$ は

$$M_{m,m-1} + M_{m,m+1} = 0$$

となり、上記の値を代入すると

$$\frac{\kappa_{m-1}}{\bar{\xi}_{m-1}} \frac{s_{m-1}}{c^2_{m-1} - s^2_{m-1}} \varphi_{m-1} + \left\{ \frac{\kappa_{m-1}}{\bar{\xi}_{m-1}} \frac{c_{m-1}}{c^2_{m-1} - s^2_{m-1}} + \frac{\kappa_m}{\bar{\xi}_m} \frac{c_m}{c^2_m - s^2_m} \right\} \varphi_m + \frac{\kappa_m}{\bar{\xi}_m} \frac{s_m}{c^2_m - s^2_m} \varphi_{m+1} = 0 \tag{59}$$

(16) H. Zimmerman, "Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern." Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. VI, 1909.
 (17) J. Hatzedorfer, "Durchgebende Balken mit beliebig vielen Oeffnungen durch längs und querwirkende Kräfte." Der Eisenbau 1919.
 (18) Fr. Bleich, "Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen." Der Eisenbau, 1919.
 (19) 金俊三, "眞直ぐなる多格間或は中間剛支點を有する多徑間連續長柱の撓屈強度に關する計算理論並にそれが二,三の簡易計算法に就て," 土木學會誌第 23 卷第 2 號, 昭和 15 年 2 月.

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_1 \varphi_1 + a_1 \varphi_2 &= 0 \\
 a_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2 + a_2 \varphi_3 &= 0 \\
 &\vdots \\
 a_{m-1} \varphi_{m-1} + \rho_m \varphi_m + a_m \varphi_{m+1} &= 0 \\
 &\vdots \\
 a_{n-3} \varphi_{n-3} + \rho_{n-2} \varphi_{n-2} + a_{n-2} \varphi_{n-1} &= 0 \\
 a_{n-2} \varphi_{n-2} + \rho_{n-1} \varphi_{n-1} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots (67)$$

となる。但し上式中

$$a_m = \frac{\kappa_m - s_m}{\xi_m c^2 m - s^2 m}, \quad \rho_m = \frac{\kappa_{m-1} - c_{m-1}}{\xi_{m-1} c^2 m - 1 - s^2 m - 1} + \frac{\kappa_m - c_m}{\xi_m c^2 m - s^2 m} \dots (68)$$

を表すものである。

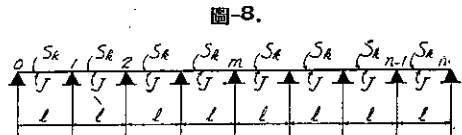
撓屈の条件式は

$$\left| \begin{array}{cccc}
 \rho_1 & a_1 & & \\
 a_1 & \rho_2 & a_2 & \\
 & a_{m-1} & \rho_m & a_m \\
 & & a_{n-3} & \rho_{n-2} & a_{n-2} \\
 & & & a_{n-2} & \rho_{n-1}
 \end{array} \right| = 0 \dots (69)$$

となる。両端鉸端の場合と同様な計算方法により撓屈荷重を求めることが出来る。

第 2 節 特別なる場合

以上述べた一般解法は軸圧縮應力，断面の慣性モーメント，
 径間長が夫々異なる場合を取扱つたのであるが，次に圖-8 に
 示す如く軸圧縮應力も慣性モーメントも径間長も夫々一定なる
 場合を考へる。



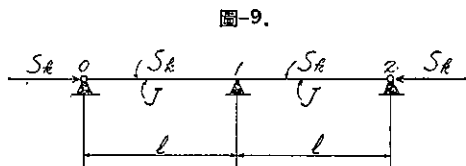
之の場合には

$$\left. \begin{aligned}
 S_{k,0} = S_{k,1} = \dots = S_{k,m} = \dots = S_{k,n-1} = S_k, \\
 J_0 = J_1 = \dots = J_m = \dots = J_{n-1} = J, \\
 l_0 = l_1 = \dots = l_m = \dots = l_{n-1} = l, \\
 \tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_m = \dots = \tau_{n-1} = \tau, \\
 Z_c = \sqrt{\frac{S_k l^2}{E J \tau}}, \\
 u_0 = u_1 = \dots = u_m = \dots = u_{n-1} = 1 \\
 z_0 = z_1 = \dots = z_m = \dots = z_{n-1} = z \\
 c_0 = c_1 = \dots = c_m = \dots = c_{n-1} = c \\
 s_0 = s_1 = \dots = s_m = \dots = s_{n-1} = s
 \end{aligned} \right\} \dots (70)$$

となり Differenzgleichung として解くことが出来る。

1. 両端鉸端の場合

(a) 2 径間連続長柱の場合 圖-9 に示す如く 2 径間連
 続長柱の場合には撓屈荷重を計算すべき条件式は次の (71) 式
 となる。



$$\frac{z}{c} = 0 \dots (71)$$

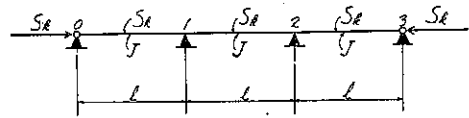
之の最小根は $c = \infty$ の場合，即ち $Z_c^0 = \pi$ となる。従つて撓屈荷重は (71) 式よりして

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ \tau}{l^2} \dots \dots \dots (72)$$

となる。

之の結果は 1 徑間兩端絞の柱と全く同じく、宛も 2 つの兩端絞の長柱を繋ぎ合せたものと同様である。Fr. Bleich⁽²⁰⁾ は 4 連モーメントの定理を用ひて同様の問題を解いてゐるが、撓角撓度法による方が簡單明瞭である。

圖-10.



(b) 3 徑間連續長柱の場合 圖-10 に示す 3 徑間連續長柱の場合に於ける挫屈條件式は

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2 - s^2} & \frac{1}{c^2 - s^2} \\ \frac{1}{c^2 - s^2} & \frac{1}{c^2 - s^2} + \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (73)$$

となる。(73) 式を展開すれば

$$\left\{ \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2 - s^2} \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{c^2 - s^2} \right\}^2$$

となる。従つて

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2 - s^2} = \frac{1}{c^2 - s^2}$$

となり

$$\frac{1}{c} = 0$$

となる。故に挫屈荷重は (72) 式と同様となる。

(c) 多徑間連續長柱の場合 多徑間連續長柱の場合は Differenzgleichung として解くことが出来る。任意の支點 m に於て曲げモーメントの平衡條件式を作れば

$$\frac{s}{c^2 - s^2} \varphi_{m-1} + \frac{2c}{c^2 - s^2} \varphi_m + \frac{s}{c^2 - s^2} \varphi_{m+1} = 0$$

となる。上式の兩邊を $\frac{s}{c^2 - s^2}$ で割れば次の Differenzgleichung が得られる。

$$\varphi_{m-1} + \frac{2c}{s} \varphi_m + \varphi_{m+1} = 0 \dots \dots \dots (74)$$

上の Differenzgleichung を解くために

$$\varphi_m = A e^{i m \theta} \dots \dots \dots (75)$$

と置き (74) 式に代入すると

$$e^{-i \theta} + e^{i \theta} + 2 \frac{c}{s} = 0$$

又は

$$\cos \theta = - \frac{c}{s} \dots \dots \dots (76)$$

となる。之の式を満足する θ を用ひると φ_m の一般解は

$$\varphi_m = A_1 e^{i \theta m} + A_2 e^{-i \theta m}$$

又は

$$\varphi_m = B_1 \cos m \theta + B_2 \sin m \theta$$

となる。次に終端條件として柱の兩端は絞であるから曲げモーメントは零となり

$$\frac{c}{s} \varphi_0 + \varphi_1 = 0$$

(20) Fr. Bleich, "Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen," Der Eisenbau, 1919.

$$\varphi_{n-1} + \frac{c}{s} \varphi_n = 0$$

が成立する。従つて之等の条件を用ひると

$$B_1 \cos \theta + B_2 \sin \theta + B_1 \frac{c}{s} = 0$$

$$B_1 \cos (n-1)\theta + B_2 \sin (n-1)\theta + (B_1 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta) \frac{c}{s} = 0$$

となり之に (76) 式の關係を代入すると

$$B_2 \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (a)$$

$$B_1 \sin n\theta \sin \theta - B_2 \cos n\theta \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (b)$$

となる。(a) 式よりして (b) 式は結局

$$B_1 \sin n\theta \sin \theta = 0$$

となり撓屈の条件式は

$$\sin n\theta \sin \theta = 0$$

となる。之より $\sin n\theta = 0, \sin \theta = 0$ が得られる。

(i) $\sin \theta = 0$ の場合

$\sin \theta = 0$ であれば $\cos \theta = \pm 1$ となる。従つて (76) 式より

$$-\frac{c}{s} = \pm 1$$

となり $z_0 = \pi$ で満足されるから撓屈荷重は

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ \tau}{l^2}$$

となる。

(ii) $\sin n\theta = 0$

Fr. Bleich は之の条件式を次の如く説明してゐる。之の条件に適する $n\theta$ を

$$n\theta = \nu\pi \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

とすれば

$$\theta = \frac{\nu}{n} \pi = \cos^{-1} \left(-\frac{c}{s} \right)$$

或は

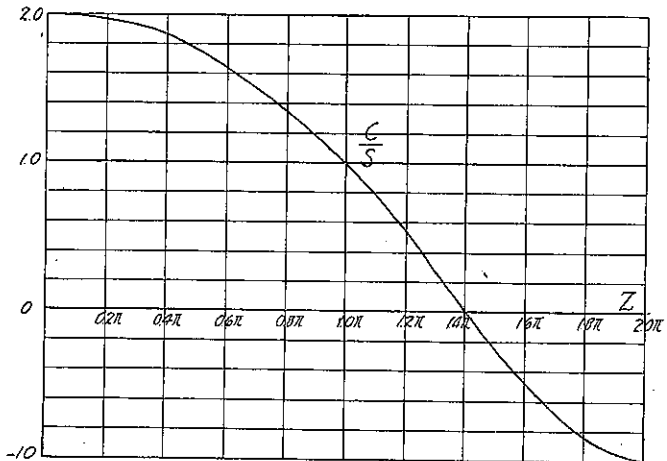
$$\cos \frac{\nu}{n} \pi = -\frac{c}{s} \dots \dots \dots (77)$$

となる。 $\cos \frac{\nu}{n} \pi$ は +1 と -1 の間にある。今 z_0 を横軸に $\frac{c}{s}$ を縦軸として曲線を畫くと次の圖-11 の如くなる。従つて (77) 式が成立するためには z は π と 2π との間にあることが知られる。 z_0 の最小根は π で $\nu = n$ の場合に相當する。故に之の場合も (i) の場合と同様に撓屈荷重は

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ \tau}{l^2}$$

となる。

圖-11.



2. 両端固定端の場合

(a) 2 径間連続長柱の場合 図-12 に示す如く 2 径間連続長柱の場合は撓屈条件式として次の (78) 式が得られる。

$$\frac{2c}{c^2 - s^2} = 0 \dots\dots\dots (78)$$

上式の最小根は $Z'_c = 1.43 \pi$ となる。従つて撓屈荷重は

$$S_c = 2.045 \frac{\pi^2 E J_T}{l^2} \dots\dots\dots (79)$$

となる。

(b) 3 径間連続長柱の場合 図-13 に示す如く 3 径間連続長柱の場合の撓屈条件式は

$$\begin{vmatrix} \frac{2c}{c^2 - s^2} & \frac{s}{c^2 - s^2} \\ \frac{s}{c^2 - s^2} & \frac{2c}{c^2 - s^2} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (80)$$

となる。或は行列式を展開すると

$$\frac{2c}{c^2 - s^2} = \frac{s}{c^2 - s^2}$$

又は

$$\frac{c}{s} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (81)$$

となる。之の最小根は $Z'_c = 1.23 \pi$ となる。故に撓屈荷重は

$$S_c = 1.513 \frac{\pi^2 E J_T}{l^2}$$

となる。

(c) 多径間連続長柱の場合 之の場合の Differenzgleichung 並に其の解は両端絞端の多径間連続長柱の場合と全く同様である。

Differenzgleichung の解は

$$\varphi_m = B_1 \cos m\theta + B_2 \sin m\theta$$

となる。然るに柱の両端に於ては $\varphi_0 = 0, \varphi_n = 0$ なるを以つて

$$B_1 = 0, \quad B_2 \sin n\theta = 0$$

となる。従つて撓屈条件式は $\sin n\theta = 0$ となり

$$\cos \frac{\nu}{n} \pi = -\frac{c}{s}$$

となる。之の最小根は $Z'_c = \pi$ なることは既に述べた通りであるが、其の場合は $\nu = n$ にして $\theta = \pi$ なるため

$$\varphi_m = 0 \times \cos m\pi + B \sin m\pi = 0$$

となり、柱は真直なることになり、問題に適しないから一般に $\nu = n - 1$ に對し最小の撓屈荷重を與へる。

第 3 節 計算例

図-14 に示す如く 3 径間連続長柱の撓屈荷重を計算してみる。但し $S_{k,0} = S_{k,1} = S_{k,2} = S_c, J_1 = 3J_0, J_2 = 2J_0, l_1 = 2l_0, l_2 = 1.5l_0$ とし、弾性限度内の撓屈のみを取扱ふものとする。今 $l_0 = l_0, J_0 = J_0$ とすれば

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 1, \quad \kappa_1 = 3, \quad \kappa_2 = 2, \\ \bar{\kappa}_0 &= \bar{\kappa}_1 = \bar{\kappa}_2 = 1, \end{aligned}$$

図-12.

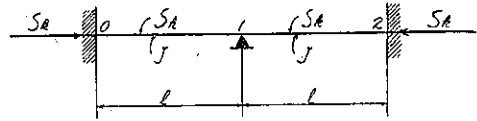


図-13.

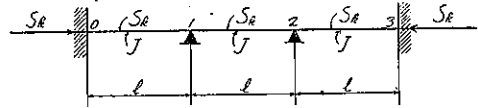
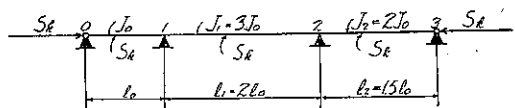


図-14.



$$\bar{\xi}_0=1, \bar{\xi}_1=2, \bar{\xi}_2=1.5$$

$$\xi_0=\xi_1=\xi_2=1, \tau_0=\tau_1=\tau_2=\tau_c=1$$

となり、 u を計算すると

$$u_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0 \bar{\xi}_0^2}{\kappa_0 \xi_0}} = \sqrt{\frac{1 \times 1^2}{1 \times 1}} = 1$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{\kappa_1 \bar{\xi}_1^2}{\kappa_1 \xi_1}} = \sqrt{\frac{1 \times 2^2}{3 \times 1}} = 1.15$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\kappa_2 \bar{\xi}_2^2}{\kappa_2 \xi_2}} = \sqrt{\frac{1 \times 1.5^2}{2 \times 1}} = 1.16$$

となる。従つて $Z_0 = Z_c, Z = 1.15Z_c, Z_2 = 1.06Z_0$ となる。

両端が鉸端の場合の撓屈条件式を示せば次の (i) 式となる。

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\kappa_0}{c_0} + \frac{\kappa_1 c_1}{c^2_1 - s^2_1} \right) & \frac{\kappa_1 s_1}{c^2_1 - s^2_1} \\ \frac{\kappa_1 s_1}{c^2_1 - s^2_1} & \left(\frac{\kappa_1 c_1}{c^2_1 - s^2_1} + \frac{\kappa_2}{c_2} \right) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (i)$$

今 $Z_c = 0.90\pi$ とすれば (i) 式の行列式の値は

$$\begin{vmatrix} 7.775 & 7.569 \\ 7.569 & 7.849 \end{vmatrix} = +3.74 \dots\dots\dots (ii)$$

となる。次に $Z_c = 0.95\pi$ とすれば

$$\begin{vmatrix} 6.788 & 7.803 \\ 7.803 & 6.137 \end{vmatrix} = -1.92 \dots\dots\dots (iii)$$

となる。之より $Z^0_c = 0.933\pi$ となる。従つて撓屈荷重は

$$S_k = 0.870 \frac{\pi^2 E J_0}{l^2_0}$$

となる。