

論 説 報 告

第26巻第10號 昭和15年10月

トラスの安定不安定の判別に就て

會員 工學博士 福 田 武 雄*

1. 緒 論

平面トラスに於て、格點數を k 、部材數を m 、反力數を r とすると、 $m+r < 2k$ ならば不安定、 $m+r = 2k$ ならば靜定、 $m+r > 2k$ ならば不靜定であると言はれてゐるが、 $m+r = 2k$ であつても不安定なトラスがあり、また同じ型式のトラスでも、格間の數に依つて、安定になつたり不安定になつたりするものがある。この様な不安定なトラスは、單に考へられるだけであつて、實際の用途には用ひられないから、これに就て特に研究する必要もないのであるが、トラスの安定不安定の條件、又はその判別方法を攻究することは、トラスの性質を明確にする上に於て、可成り重要なことであると思へて、敢て古來幾多の先賢の研究に蛇足を加へて本文を草した次第である。

2. 安定と不安定及び靜定と不靜定

構造物が、荷重の如何に拘らず、常に靜止の状態を保ち得る場合を安定、然らざる場合を不安定と定義しやう。安定には、力の釣合が必要條件である。然し、力の釣合の條件は、充分な條件ではない。何となれば、不安定であつても、釣合を保ち得る場合があるからである。安定に對して、必要且つ充分なる條件は、如何なる荷重状態に於ても常に釣合が成立することである。

安定と不安定の判別には、これを外部的と内部的とに分けて考へる方が、混亂を起しにくい。

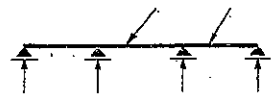
(1) 外部的安定 (位置の安定)

これは、構造物が常にその位置を保ち得ることであつて、安定に對する根本的の事柄である。何となれば、内部的に如何に安定な構造物でも、その位置を保ち得ないならば、これを全體的に見て安定であるとは言へないからである。

構造物が靜止してゐる場合には、その外力、即ち荷重と反力との間に $\sum X = 0$ 、 $\sum Y = 0$ 及び $\sum M = 0$ の釣合條件が成立し、また成立しなければならない。故に、反力數を r とすると、 $r < 3$ の場合には、前記の釣合條件が、常に成立することは出来ない。従つてこの場合には不安定になる。但しこの場合でも、特定の荷重に對しては、釣合が成立し、所謂、不安定釣合の状態が起り得る。

前記の釣合條件を常に満足するためには、 $r \geq 3$ でなければならない。故に $r \geq 3$ は構造物の安定に對する第一の必須條件である。そして、如何なる荷重に對しても釣合を保ち得るためには、 r 個の反力のうち、少なくとも 1 個は、他のものとその方向を異にしなければならない。然らざれば、たとへば、圖-1 の如き場合には $r = 4 > 3$ ではあるが、明かに釣合を、従つて安定を保ち得ない。

圖-1.



(2) 内部的安定 (形状の安定)

これは、反力の如何に拘らず、構造物が常にその形状を保ち得ることである。トラスの場合には、その各格點が安定であることが、必要にして充分な條件である。このためには、トラスの各格點に於て、部材の内力と、その點に作用する荷重 (若し支點ならば更に反力) との間に、釣合が成立しなければならない。

平面トラスの格點に於ける釣合條件は、衆知の如く $\sum X = 0$ と $\sum Y = 0$ の 2 個であるから、格點數を k とすると、全體で $2k$ 個の式が成立する。然しトラスが外部的に安定である場合には、 $2k$ 個のうち $2k-3$ 個の式が獨立の式である。従つてトラスの内部的安定に對する獨立の釣合條件は $2k-3$ 個である。

* 東京帝國大學助教授

部材数を m とすると、 $m < 2k - 3$ の場合には、釣合条件に對して部材数が不足するのであるから、一般に内部的に不安定である。然し、特定の荷重に對しては、所謂、不安定な釣合の状態が起り得る。

故に $m \geq 2k - 3$ が内部的釣合、從つて内部的安定に對する必要條件である。このうち $m = 2k - 3$ の場合には、部材應力はすべて $2k - 3$ 個の釣合条件のみによつて決定することが出来る。即ち内部的に靜定の場合である。之に反して $m > 2k - 3$ のときには、部材應力は釣合条件のみでは決定出来ない。即ち内部的に不靜定の場合である。

(3) トラス全體の安定

トラスが全體として安定であるためには、トラスの全格點が安定であればよいので、 $m + r \geq 2k$ が必要條件である。但し、前述の如く、 $r \geq 3$ でなければならない。

内部的に不安定なトラスでも、全體として $m + r \geq 2k$ ならば、全體として安定である。

$m + r \geq 2k$ のうち、 $m + r = 2k$ のときには、各部材應力と各反力は、すべて釣合条件のみによつて決定し得る。即ち全體として靜定の場合である。之に反して $m + r > 2k$ の場合は、言ふまでもなく全體として不靜定の場合である。

3. 判別行列式

圖-2 に於て

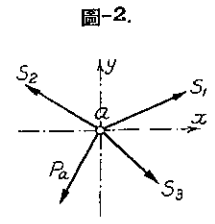
S_1, S_2, \dots = 格點 a に集る部材の應力,

P_a = 格點 a に作用する荷重の合力,

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = x$ 軸に對する S_1, S_2, \dots, P_a の方向餘弦

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n = y$ 軸に對する S_1, S_2, \dots, P_a の方向餘弦

とある。若しこの格點に反力が作用する場合には、その反力の代りに、これに相當する部材を假想すればよい。そうすると、格點 a に於ける釣合の條件は、次の如くに書きあらはされる。



$$\left. \begin{aligned} \sum X &= \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_n P_a = 0 \\ \sum Y &= \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \dots + \mu_n P_a = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

このやうな式が各格點に於て成立し、トラス全體として合計 $2k$ 個の式が得られ、之に對して $m + r = 2k$ のときには、部材應力と反力は、前記の $2k$ 個の式を聯立方程式として解くことにより、たとへば

$$S_i = -\frac{\Delta_i}{\Delta} \dots \dots \dots (2)$$

の形で決定することが出来る。但し Δ は、釣合条件式の S の係数 λ 及び μ によつて作られる行列式であり、 Δ_i は、 Δ のうちの S_i の係数の列を、すべて荷重項で置き換へた行列式である。

さて、式 (2) に依つて部材應力又は反力が決定されるためには、即ちトラスが安定であり、しかも靜定であるためには $m + r = 2k$ (内部的性質だけを考へるときには $m = 2k - 3$) の条件だけでは不充分であつて、式 (2) の分母の行列式 Δ が零であつてはいけない。實際に使はれるトラスでは、大抵 $\Delta \neq 0$ であるから、 Δ に就ては餘り注意が拂はれてゐないが、若し $\Delta = 0$ のときには、たとへ $m + r = 2k$ (内部的には $2k - 3$) であつても、不安定になる。

$\Delta = 0$ の場合にも、二つの場合があつて、便宜上これを第一種及び第二種と名付けやう。

第一種の不安定 ($\Delta = 0, \Delta_i = 0$ の場合)。このときには、部材應力と反力とは、一般に $0/0$ の不定値になる。さて分母の行列式 Δ を構成する各要素は、すべて部材又は反力の方向餘弦であり、 Δ 中に於けるこれ等の要素の配列は、部材の連結状態と反力の位置とに依るものである。 $\Delta_i = 0$ は、 Δ 中の任意の要素を任意の荷重項で置き換へても、矢張り零になることであるから、 $\Delta = 0$ 及び $\Delta_i = 0$ であることは、 Δ を構成する各要素の値に依るものではなく、單にその配列に基くものである。從つて此の場合の不安定は、部材又は反力の方向によるものではなく、部材の連結状態又は反力の位置に基因するものである。

然し、場合に依つては、 Δ 中の要素が或る特定値のとき、即ち或るトラスでは、その部材又は反力が特定の方向である場合に、 Δ も Δ_i も同時に零になることがある。

此の種の不安定トラスは、形状の安定を保ち得ず、自由に變形することが出来る。

第二種の不安定 ($\Delta=0, \Delta_i \neq 0$ の場合)。このときには部材應力又は反力は無限大になる。これは、 $2k$ 個の釣合条件式の中に成立不可能の式が含まれてゐて、應力又は反力の有限の値では、釣合の条件が成立しない場合である。 $\Delta=0$ であつて $\Delta_i \neq 0$ であることは、 Δ 中の要素の任意の一つを他の値の荷重項で置き換へると、零でなくなるのであるから、此の場合の $\Delta=0$ は、要素の配列によるものではなく、その要素の値そのものに基因するものである。即ち、部材の連結状態又は反力の位置に依るものではなくて、單に部材又は反力の方向に基因する事柄である。従つて、一般に安定且つ靜定なトラスでも、その部材又は反力が或る特定の方向であるときに、此の種の不安定状態になり、また $\Delta=0$ になる条件を求めることによつて、不安定になる条件を求めることも出来る。

此の種の不安定の場合には、若し部材が無限大の應力に堪へ得るものと假定すれば、トラスの微小の變形は可能であるが、無限に變形することは出来ない。何となれば、最初の位置より少しでも變形すれば、直ちに部材の方向が變化し、従つて Δ 中の要素である方向餘弦の値が變化して $\Delta=0$ ではなくなり、安定の状態になるからである。

たとへば圖-3 のトラスでは、一般に

$$S_1 = S_2 = -\frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad S_3 = +\frac{P}{2 \tan \alpha}$$

であつて、安定且つ靜定であるが、若し部材 AB と AC とが一直線になれば $\alpha=0$ になり、従つて部材應力は無限大、トラスは不安定になる。此の場合には、格點 A は移動し得るわけであるから、若し A が微小の距離移動して A' の位置になつたとすれば、此の状態に於ては

$$S_1 = S_2 = +\frac{P}{2 \sin \alpha'}, \quad S_3 = -\frac{P}{2 \tan \alpha'}$$

であつて、明かに安定が成立し且つ安定である。但し α' は、單に釣合の条件のみでは決まらず、部材の應力と歪との関係によつて決定されるものである。この様に此の種の不安定は、考へ方によつては不靜定の一様とも見做すことが出来る。大部分の不安定トラスは此の種類のものである。

上記の如く、トラスの安定又は不安定は、式 (2) の分母の行列式 Δ が零でないか否かによつて、判別し得るわけであるが、格點数の多い實際のトラスに於て、格點数の 2 倍の行と列とより成る行列式に就て判別することは殆んど不可能に近いことである。然し、この行列式は、前述の如くトラスの純幾何學的性質に基くものであるから行列式を代數的に取扱ふ代りに、トラスの幾何學的性質を調べれば、その目的を達することが出来る。以下、トラスの安定又は不安定を判別する幾何學的方法及び其他の方法に就て記述する。

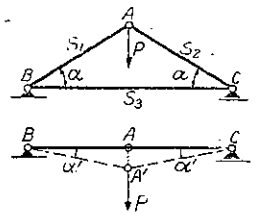
4. 部材消去法

平面トラスの或格點の位置を安定且つ靜定に定めるには、この格點を、方向の異なる 2 部材に依つて、位置の安定なる 2 點に連結することが必要であり、且つ充分である。一つの格點に對して、かかる部材が若し 2 個以上あれば、それは必要且つ充分なる以上に、餘計の部材が存在することを意味し、従つて不靜定の場合になる。このことは、格點の釣合条件が $\sum X=0$ と $\sum Y=0$ の 2 個であることから了解される。

たとへば圖-4 に示す諸種のトラスの内部的安定を検討せんとするに、先づ (a) の場合では、その中央部分 $abcd$ は明かに安定且つ靜定な部分であつて、これを基準とすれば、圖示の如く、他の格點はすべて 2 個の部材によつて其の位置が安定且つ靜定に定められる。従つて (a) のトラスは、全體として内部的に安定且つ靜定なトラスである。實際、 $m=29, k=16$ であつて $m=2k-3$ である。

上述のことを逆に考へれば、兩端の格點に於て、これ等を安定且つ靜定に定めるべき 2 部材を消去し、以下圖示

圖-3.



の如く順次各格點に於て 2 部材づつ消去して行けば、中央部分に安定且つ静定なる *abcd* が残る。

(b) のトラスに就て、兩端の格點から順次圖示の如く 2 部材づつ消去して行けば、中央に *abcde* 部分が残る。

この *abcde* は一般に安定且つ静定

であるから、(b) のトラスは一般に

安定且つ静定である。實際 $m=37$,

$k=20$ であつて $m=2k-3$ である。

然し若し *a, e* 及び *d* が一直線にあ

り且つ *bc* に平行の場合には、*abcde*

は後述の如く不安定になり、従つて

トラス全體が不安定になる。此の

場合の不安定は、部材の特定の方向

に基因するものであるから、前述の

第二種の不安定である。

(c) のトラスでは *abcdef* の部分が残る。このうち *bcde* は内部的に安定であり且つ二次の不静定であるが、その兩側の *ab* 及び *ef* は明かに不安定である。即ち格點 *a* 及び *f* の位置が不安定である。従つてこのトラスは $m=33$, $k=18$ であつて $m=2k-3$ の條件を満足するに拘らず不安定になる。此の場合の不安定は、部材の連結方法に基因するものであるから、第一種の不安定である。

このやうに、各格點に於て 2 部材づつ消去し得る場合には、この方法により極めて簡単に安定不安定を判別することが出来る。これを部材消去法といふのは、筆者がかりに名付けたものである。

次に (d) のトラスに於て同様の方法を行はうとすれば、格點 *B, C* 及び *B', C'* に於ては、消去すべき部材が各 3 個あつて、これ以上進むことは出来ない。このやうな場合には、後述の部材置換法と同様に、部材 1 及び 2 を除去して、その代りに假想部材 *1', 2'* を *ab* 及び *cd* 間に挿入すれば、格點 *B, C* 及び *B', C'* に於て 2 部材づつ消去することが出来、結局中央に *abcd* の部分が残る。この *abcd* は假想部材を含めて明かに一次の不静定であるから、(d) のトラスは全體として内部的に一次の不静定なることがわかる。實際 $m=18$, $k=10$ であつて、 m は $2k-3$ より 1 だけ多い。

之と同様の方法を (e) に適用すると、殘存部分 *abcd* が不安定になり、従つてトラスは不安定なることがわかる。(e) では $m=16$, $k=10$ であつて、 m は $2k-3$ より 1 だけ少い。

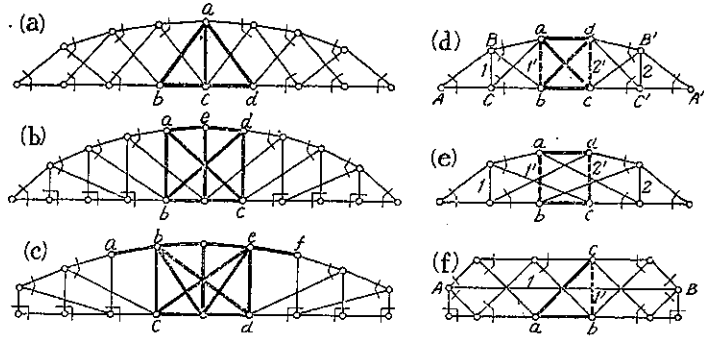
(f) のトラスでは *AB* 間の部材 1 を除去し、その代りに假想部材 *1'* を *bc* 間に挿入すれば、各格點で 2 部材づつ消去することが出来、たとへば *abc* の三角形が残り、*abc* が安定且つ静定であるから、(f) のトラスは内部的に安定なトラスと判断されるが、之は誤りであつて、(f) のトラスは $m=2k-3$ なるに拘らず、後述の如く不安定トラスである。

従つて、上述の部材消去法は、各格點に於て 2 部材づつ消去し得る場合には間違ひなく適用することが出来、且つ部材の置換を必要とする場合でも、 $m \neq 2k-3$ の場合には、不安定度又は不静定度を誤りなく判別し得るが、 $m=2k-3$ の場合には、たとへば $m=2k-3$ なることを判別し得るだけであつて、その安定不安定を判別することは出来ない。此のやうな場合には、次の部材置換法によるべきである。

5. 部材置換法

圖-5 (a) のトラスは $m=9$, $r=3$, $k=6$ であつて $m+r=2k$ であるが、部材應力を求める場合、2 部材のみが集まる格點は 1 つもないから、所謂格點法は應用出来ず、また所謂斷面法も使へない。それで Henneberg 又は Müller-Breslau 等によつて提案せられた所謂部材置換法に従つて、3 部材が結合する任意の格點、たとへば *A* に於て任意の 1 部材、たとへば部材 1 を除去し、その代りに假想部材 2 を格點 *D, E* 間に挿入する。その上、反力

圖-4.



に對して之に相應する部材を考へれば、結局に於て圖-5 (b) の如きトラスになり、格點 A, B, C, \dots の順に格點法又は Cremona の圖解法を應用すれば、各格點に於て、圖示の如く 2 部材づつの應力を容易に求めることが出来る。

除去した部材 1 の應力 S_1 を圖-5 (b) のトラスの荷重と考へれば、圖-5 (b) のトラスの各部材の應力は、一般に次式で示される。

$$S = S_0 + \bar{S}_1 S_1 \dots\dots\dots(3)$$

但し S_0 は實際の荷重に依る應力、 \bar{S}_1 は $S_1=1$ のみによる應力である。上式に従つて假想部材 Z の應力をあらはすと

$$Z = Z_0 + \bar{Z}_1 S_1 \dots\dots\dots(4)$$

但し Z_0 及び \bar{Z}_1 は、夫々實際の荷重及び $S_1=1$ に

依る Z の應力である。實際のトラスには Z が無いのであるから、圖-5 (b) のトラスが圖-5 (a) の場合と同一であるためには、 $Z=0$ でなければならない。即ち

$$Z_0 + \bar{Z}_1 S_1 = 0, \quad S_1 = -\frac{Z_0}{\bar{Z}_1} \dots\dots\dots(5)$$

かくして S_1 がわかれば、之を式 (3) に代入することにより、他の部材の應力が決定される。これがためには $\bar{Z}_1 \neq 0$ でなければならない。若し $\bar{Z}_1 = 0$ の場合には S_1 が決定されず、従つて他の部材の應力を求めることも出来ない。即ち $\bar{Z}_1 = 0$ の場合には、不安定になる。圖-5 (a) の型式のトラスでは、その各格點が一つの圓錐曲線(たとへば圖-6 の圓)の上にあるときには、何れの 2 格點で支承しても、 $\bar{Z}_1 = 0$ になつて不安定になる。またこの場合には、二つの對角材、たとへば AB と CE との交點 p と、 a, b は必ず一直線の上にある。同様に c, g, e 及び d, r, f は夫々一直線上にある。

圖-7 のトラスでは $m=21, r=3, k=12$, 即ち $m+r=2k$ の條件は成立する。このトラスの安定不安定を驗す

圖-6.

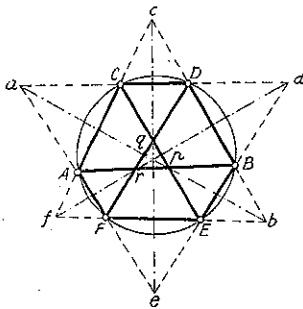
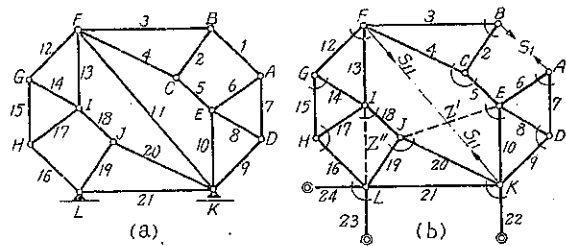


圖-7.



るには、たとへば圖に示すが如く、部材 1 と 11 とを除去し、その代りに假想部材 Z' 及び Z'' を格點 E, J 及び I, L 間に挿入する。かくすれば (b) の如きトラスになり、これに實際の荷重の他に、除去した部材の應力 S_1 と S_{11} とが外力として作用するものとする。之等の外力によつて、(b) のトラスの各部材に生ずる應力は、 A, B, C, \dots の順に、各格點の釣合條件より容易に之を求めることが出来る。そのうち假想部材の應力 Z' 及び Z'' は、一般に次の如くあらはすことが出来る。

$$Z' = Z'_0 + \bar{Z}'_1 S_1 + \bar{Z}'_{11} S_{11}, \quad Z'' = Z''_0 + \bar{Z}''_1 S_1 + \bar{Z}''_{11} S_{11} \dots\dots\dots(6)$$

但し、 Z'_0, Z''_0 は、實際荷重に依る Z' 及び Z'' の應力、 $\bar{Z}'_1, \bar{Z}'_{11}, \bar{Z}''_1, \bar{Z}''_{11}$ は、 $S_1=1$ 又は $S_{11}=1$ のみによつて生ずる Z' 及び Z'' の應力である。

(b) のトラスが、(a) のトラスに等しいためには $Z'=0$ 及び $Z''=0$ でなければならない。故に

$$\bar{Z}'_1 S_1 + \bar{Z}'_{11} S_{11} + Z'_0 = 0, \quad \bar{Z}''_1 S_1 + \bar{Z}''_{11} S_{11} + Z''_0 = 0 \dots\dots\dots(7)$$

これより S_1 及び S_{11} の値を決定し得るためには

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{Z}_1' & \bar{Z}_{11}' \\ \bar{Z}_1'' & \bar{Z}_{11}'' \end{vmatrix} = \bar{Z}_1' \bar{Z}_{11}'' - \bar{Z}_1'' \bar{Z}_{11}' \neq 0 \dots \dots \dots (8)$$

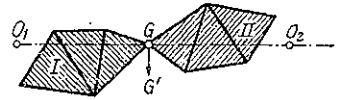
でなければならない。若し $\Delta=0$ の場合には S_1 及び S_{11} , 従つて他の部材の應力も之を決定することが出来ず、トラスは不安定になる。

2 個以上の假想部材が必要な場合にも、その要領は前と同様である。極めて複雑なトラスでも、假想部材を 3 個以上必要とする場合は殆んど稀であるから、此の方法によれば、比較的簡単に代数的方法によつてトラスの安定不安定を判別することが出来る。

6. 同轉中心又はヒンジの位置による判別方法

圖-8 に於て、I 及び II を一つのヒンジ G によつて連結された安定なトラスとする。安定なトラスは之を一つの剛體平盤と考へることが出来る。今、何等かの原因によつて、I のトラスが或點 O_1 を同轉中心とし、剛體平盤として微小角回轉し、ヒンジ G が G' の方向に變位するものとすれば、 GG' はその動徑即ち O_1G に垂直である筈である。ヒンジ G が變位すれば、右方のトラス II も一般に變位する筈であつて、その同轉中心を O_2 とすれば、 GG' はまた O_2G に垂直である。従つて O_1, G 及び O_2 は一直線上になければならない。

圖-8.



故に、2 個のトラスが一つのヒンジ G によつて連結され、G の微小變位が可能である場合には、各々のトラスの同轉中心 O_1 と O_2 は、G を通過し G の變位の可能方向に垂直な一直線上にある。逆に、 O_1, G 及び O_2 が一直線上にある場合には、ヒンジ G は O_1O_2 に垂直の方向に變位可能であつて、かゝるトラス系は不安定になる。

たとへば圖-9 の如きトラス系は不安定である。然し G が O_1O_2 の直線以外、たとへばその上部にあれば、明かに三鉸アーチとなつて安定になる。このことは圖-3 の場合と同様である。

圖-9.

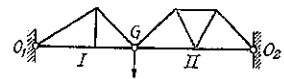
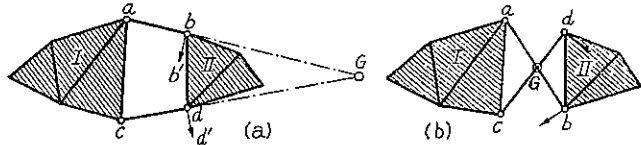


圖-10 の如く、2 個のトラスの部分

圖-10.

一つのヒンジに依らず、2 個の部材により連結される場合に於ては、Föppl の提案せる如く、假想ヒンジ又は假想同轉中心を考へればよい。

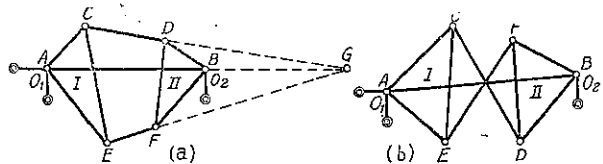


たとへば圖-10 (a) に於て、假りに I の部分を不動とし、II が I に對して動くものとするれば、部材 ab 及び cd は、夫々 a 及び c を中心として回轉する。然るに b は、部材 ab とトラス II とを連結するヒンジと考へられるから、トラス II の同轉中心 G は、ab の延長線上になければならない。同様にして G はまた cd の延長上にもなければならぬから、結局、ab 及び cd の延長線の交點 G が、II の I 對する相對變位の同轉中心になり、同様にして、I の II 對する相對變位の同轉中心にもなる。従つてこのやうな場合には、I と II は G の位置にある一つのヒンジに依つて連結されるものと見做すことが出来る。

圖-10 (b) の如く ab, cd が交叉する場合には、その交點が假想ヒンジになる。

圖-11.

圖-11 に示すトラスは、兩者ともに $m=9$, $r=3$, $k=6$ であつて $m+r=2k$ である。A は固定端、B は可動端であるが、部材 AB を剛體の棒と考へるから、B も固定端になる。それで、此のトラスを、三角形 ACE 及び BDF を、2 部材 CD と EF に依つて連結して構成したものと考へれば

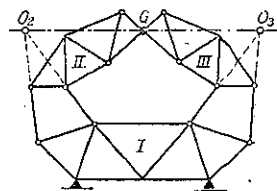


で、此のトラスを、三角形 ACE 及び BDF を、2 部材 CD と EF に依つて連結して構成したものと考へれば

ACE 及び BDF の回轉中心は、夫々 A 及び B であり、その假想ヒンジ G は、 CD 及び EF の交點、又はその延長線の交點になる。従つて此の型式のトラスは、一般には安定且つ靜定であるが、特に圖の如く G が AB 線上にある場合には、不安定になることがわかる。

圖-12 は 3 個のトラスが各々 2 個の部材によつて連結されたもので、全體として $m=31$, $r=3$, $k=17$ であつて、 $m+r=2k$ の條件は満足する。トラス I は安定であつて、之に對し II 及び III が微小の變位をするものとすれば、その回轉中心は、夫々 O_2 及び O_3 である。従つて II と III の假想ヒンジ G が、圖の如く O_2 及び O_3 を結ぶ直線上にある場合には不安定になる。

圖-12.



7. 變位圖又は速度圖を利用する方法

圖-13 に於ける 4 點 A, B, C 及び D が、お互に無關係に夫々微小の變位をして A', B', C' 及び D' に移動したものと考へる。この時の變位を夫々 da, db, dc 及び da とし、この變位が極めて短時間 dt の間に同時に行はれたものとすれば、各點の速度は次の如くなる。

$$v_a = \frac{da}{dt}, \quad v_b = \frac{db}{dt}, \quad v_c = \frac{dc}{dt}, \quad v_d = \frac{dd}{dt}$$

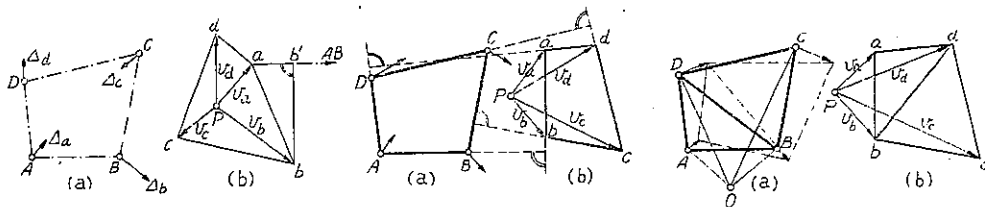
今、或る極 P より之等の速度を示す射線を引き、その端點を連結すれば、圖-13 (b) の如き速度圖が得られる。然るに、之等の速度はすべて變位の $1/dt$ 倍であるから、圖-13 (b) はまた擴大尺で描いた變位圖とも考へられる。

かく考へれば、圖-13 (b) のうちたとへば ab は、點 B の點 A に對する相對變位を示し、従つて ab' 及び $b'b$

圖-13.

圖-14.

圖-15.



は、夫々、點 B の點 A に對する AB の方向及び之に垂直の方向の分變位を示す。従つて

$$\epsilon = \frac{ab'}{AB}, \quad \omega = \frac{b'b}{AB}$$

とすれば、 ϵ は AB の長さの方向の縦歪、 ω は AB の回轉角に相當する。故に、點 A 及び B が一つの剛體の棒で連結されてある場合には、 $\epsilon=0$ 、即ち $ab'=0$ でなければならない。即ち ab は AB に垂直でなければならない。

圖-14 は點 A, B, C, D が夫々剛體の部材で連結された場合であつて、 ab, bc, \dots は夫々 AB, BC, \dots に垂直になる。此の場合には、各點の變位はお互に無關係ではなく、たとへば任意の 3 點の變位が決まれば、残りの 1 點の變位は必然的に決定される。

更に點 A, B, C, D がすべて剛體上にあるとき、或はたとへば圖-15 (a) の如く BD 間にも部材があるときには、各點間の距離は不變であるのみならず、四邊形 $ABCD$ は剛體として回轉し、その各邊の回轉角は同一になる。即ち ϵ はすべて零に等しく、且つ各邊の ω は一定になる。従つて變位圖 $abcd$ の各邊は、位置圖 $ABCD$ の各邊に垂直なるのみならず

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD = da : DA$$

になる。故に變位圖 $abcd$ は位置圖 $ABCD$ に相似形になる。また $ABCD$ の回轉中心を O とすれば、 $OABCD$ と $Pabcd$ とは明かに相似形になる。

圖-15 の場合には、任意の2點の變位が與へられれば、他のすべての點の變位は、必然的に決定される。

上記の速度圖又は變位圖は、Mohr 又は Föppl 等によつて提案せられたものであつて、これを利用してトラスの安定不安定を判別することが出来る。

たとへば圖-16 (a) のトラスでは $m+r=2k$ である。故に若し任意の一部材、たとへば部材 S を除けば $m+r < 2k$ になつて、自由に變形し得る不安定なトラスが得られる (b)。この場合 A 及び D は變位しないから、變位圖 (c) に於ける點 a 及び d は極 P に一致する。次に、部材 AB (1)、 AF (6) 及び DC (3)、 DE (4) は夫々 A 及び D を中心として回轉するから、 B, F 及び C, E の變位を示す射線 $1', 6'$ 及び $3', 4'$ は夫々 1, 6 及び 3, 4 に垂直になる。今、部材 AB が變位圖の ab にてあらはされる微小變位をしたものとすれば、

$$bc \perp BC, \quad cf \perp CF, \quad fe \perp FE$$

と作圖することによつて (b) の各點の變位が得られる。

このうち be は、點 E の點 B に対する相對變位を示し、若し be が丁度 BE に垂直になれば、上述の理由により、 BE 間の距離が變化しないことになる。即ち此の場合には、 BE 間に部材 S を連結しても、トラスは自由に變位するわけであつて、従つて此の様な場合には圖-15 (a) のトラスは不安定であることがわかる。實際、部材 2 と 6、3 と 5、7 と 8 との交點 G, J, H が一直線上にある場合には、上記の如く $be \perp BE$ になつて、不安定になる。

かくの如く $m+r=2k$ のトラスの安定不安定を驗するには、任意の一部材を除去して不安定なトラスを形作り、その變位圖を描いて除去した部材の兩端の格點間の相對變位を求め、之が除去した部材に垂直であれば、もとのトラスは不安定であり、然らざれば安定であることがわかる。

8. 平行圖形に依り判別する方法

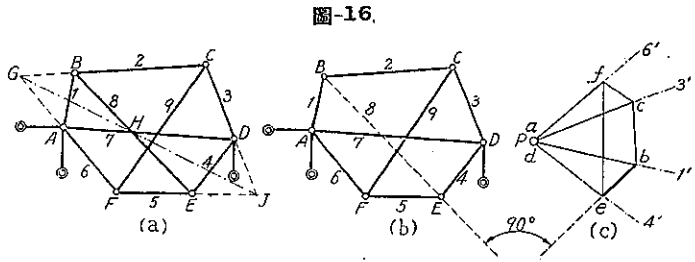
前記圖-14 及び圖-15 の $ABCD$ をトラスと考へれば、圖-14 は不安定、圖-15 は安定なトラスである。そしてその變位圖 $abcd$ の各邊は、前述の如く、すべて $ABCD$ の相對邊に垂直であるから、この變位圖を時計の針の進行方向に逆に 90° 回轉すれば、變位圖の各邊は原形の相對邊に平行になる。そのうち圖-14 の變位圖は、原形に相似でなく、圖-15 の場合には全く相似形である。一般に、トラスの各部材に夫々平行な線を以て圖形を描く場合、圖-14 の如き不安定なトラスでは、之に相似でない任意の圖形を描くことが出来る、圖-15 の如き安定トラスでは、之に相似でない圖形を描くことは不可能である。

故に、トラスの各部材に平行なる線を以て、トラスに不相似の圖形を描き得る場合には、そのトラスは不安定であり、之が不可能の場合には、そのトラスは安定であるといふ定理が得られる。

この定理は、また別の考へ方からも導き得るものであつて、トラスの安定不安定の判別に對しては、前述の諸種の方法に比べて遙かに簡單且つ便利である。

圖-17 乃至 圖-19 に示す各トラスは、すべて $m=2k-3$ の條件を満足して、内部的に安定であり得るトラスの型式ではあるが、圖に示すが如く、各部材に平行である線によつて任意の不相似形を描き得るから、すべて内部的に不安定なトラスであることがわかる。

内部的には不安定であるが、支承状態に依つて全體として安定となるトラスでは、その支承條件を考慮して、或は反力に對して假想部材を考へて、上記の定理を應用しないと、思はぬ間違を起すことがある。



たとへば圖-20 (a) の三鉸アーチのトラスは、全體として安定であるとは言ふまでもない。然るに、トラスの各
部材に平行な線を以て (b) の如き不相似形を描くことが出来、前記の定理によれば不安定と判断される。然し之

圖-17.

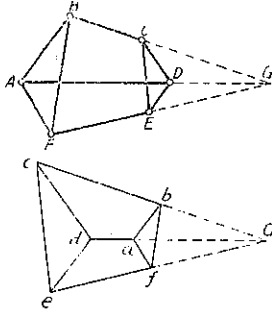


圖-18.

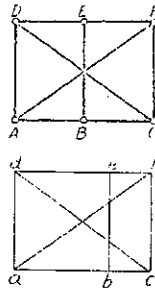


圖-19.

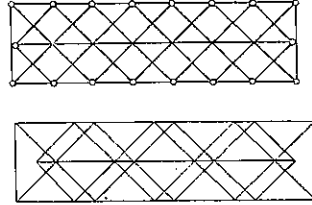
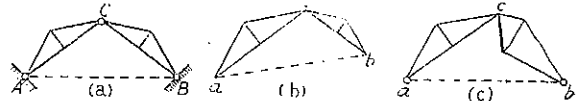


圖-20.



は支承条件を無視し、たとへばトラスの部材だけを考へたからであつて、若し支點の水平反力の代りに AB 間に一つ
の部材を假想すれば、(b) に於て之に相當する線 ab は AB に平行ではなく、若し ab を AB に平行にしよう
とすれば、(b) の如き不相似形は描けない筈である。また最初から ab を AB に平行にして不相似形を描かうと
すれば、(c) に示すが如く、或る一つの部材に對する線は平行ではなくなる。結局、(a) のトラスに對しては、各
邊が部材に平行な不相似形は描けず、従つてこのトラスは安定であることがわかる。

圖-21 は、 A, C を同轉端、 B を移動端とし、ヒンジ E 及び F によつて連結された 3 個の三角形トラスで
あつて、 $m=9, r=5, k=7, m+r=2k$ である。支點の反力の代りに圖の如き部材を假想する。この構造の安定不安
定を驗するために、假りに B に於

圖-21.

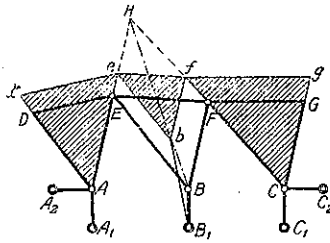
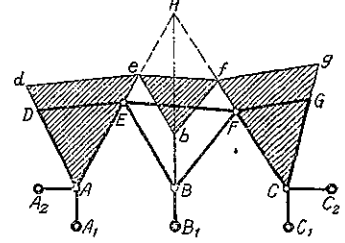


圖-22.

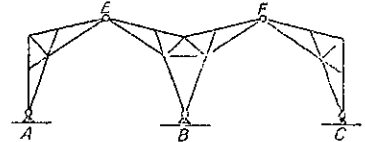


ける反力の假想部材 B_1B を取除き、
 B が自由に移動し得るものとすれば、
この構造は不安定になり、圖の如き
不相似形が描ける。然し實際には、 B
には反力の假想部材 B_1B が存在し、
之に對する線 B_1b は B_1B に平行

ではない。従つて此の構造では、各部材に平行な線を以て不相似形を描くことは出来ない。即ち安定である。

然し、 AE, CF の延長線の交點を H とすると、特に B に於ける反力の假想部材が BH の方面に一致する場合、
即ち支點 B の移動可能方向が BH に垂直な場合には、上述の不
相似形を描くことが出来、不安定な構造になる。たとへば、圖-22 の如き
ものは不安定である。これと同様に圖-23 の如き構造は不安定構造である。
之を安定にするには、 A, B を同轉端、 C を移動端とすればよい。

圖-23.



9. 菱形トラスに就て

圖-24 (a) の如き菱形トラス (Rhombenfachwerk 又は Rautenträger) は、その菱形格間の數を n とすると、
一般に $m=4(n+1), k=2n+2, m=2k-4$ であつて、内部的に安定且つ靜定であるためには、部材が 1 本不足
する不安定なトラスである。實際このトラスに對しては、各部材に平行な線を以て (b) の如き不相似形が描ける。

このトラスを安定にするには、部材を 1 本加へればよい。たとへば (c), (d) 或は (e) の如くに部材を挿入す
ればよい。それは、之等の部材に相當する (b) 圖中の線が、それぞれ之等の部材に平行でなくなることから了解
される。然るに (f) の如く eg 間に部材を挿入した場合には、(b) に於て之に相當する線は之に平行になる。即
ち (f) の如きトラスに對しては、不相似形を描くことが可能であつて、この場合は不安定になる。

圖-24 は菱形格間の数が奇数の場合であるが、この格間数が偶数の場合でも、(c) 及び (e) の型式は一般に安定、(f) の型式は一般に不安定である。然るに (d) の型式は、菱形格間の数が偶数の場合には、圖-25 に示すが如く平行不相似形を描くことが出来て、不安定になる。以上の事柄は、すべて圖-26 に示す菱形トラスの變形圖から容易に了解し得ることである。

圖-24 (a) の菱形トラスを安定にするには、上記のやうに部材を1本増加する代りに、反力を1個附加してもよい。即ち圖-27 又は圖-28 の如く、A 及び B を固定回轉端とすればよい。此の場合、A 及び B に於ける水平反力の代りに點線で示す假想部材を考へて、その安定不安定を判別すれば、圖-27 の如く菱形格間の数が奇数の場合には安定、圖-28 の如く偶数の場合には不安定であることがわかる。これはまた變形圖からも判断される。即ち圖-27 の場合に、このトラスが圖の如く變形し得るためには、たとへば支點 B が水平に移動し得ることが必要であるが、圖-28 の場合には、たとへ A 及び B が固定回轉端であつても、圖示の如き變形が可能である。

圖-24 (a) の菱形トラスを内部的に安定にするも一つの方法は、圖-29 又は圖-30 の如く、ランガートラスの型式にすることである。この場合に菱形格間の数を n とすると、一般に $m=6n+1$, $h=3n+2$ であつて $m=2h-3$ の關係が満足される。然し、此の場合でも、圖-29 及び圖-30 に示すが如く、菱形格間の数が奇数の場合には、平行不相似形を描くことが不可能であり、偶数の場合には之が可能である。即ち菱形格間数が奇数の場合には安

圖-24.

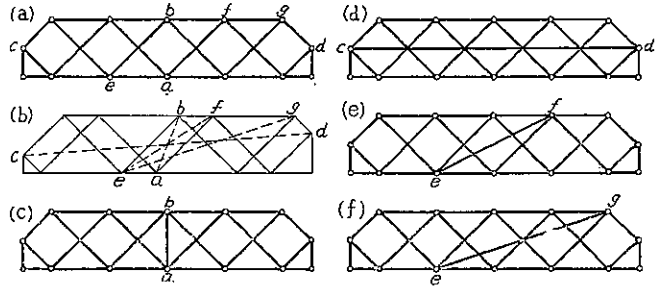


圖-25.

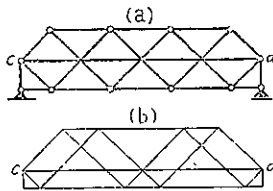


圖-27.

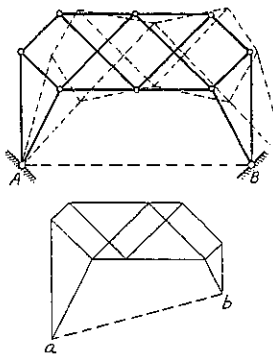


圖-26.

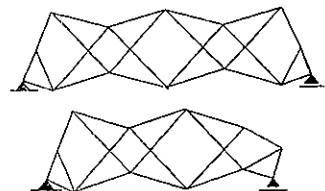


圖-28.

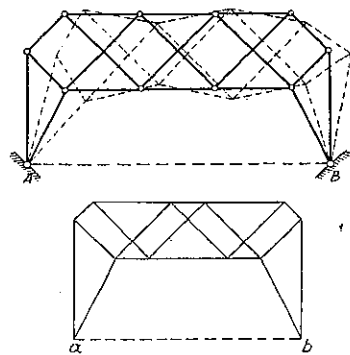


圖-29.

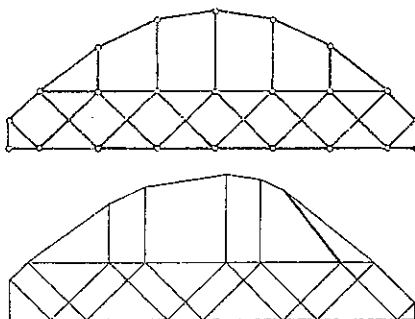
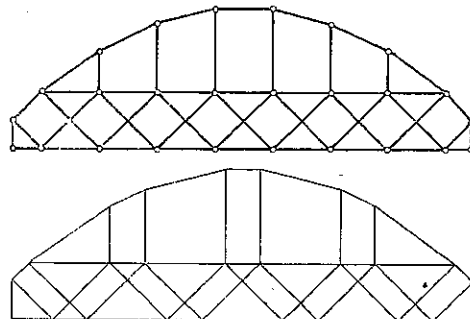


圖-30.

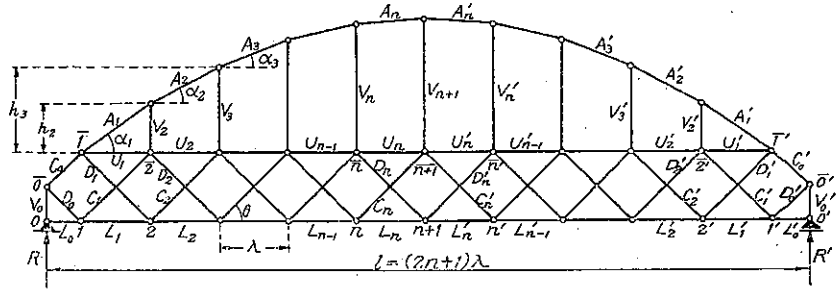


定、之が偶数の場合には不安定になる。但し後者の場合でも、トラスの形状が左右不對稱の場合には安定になる。

圖-29 の如き構造を實際に使用するの可否は別問題とし、此の機會に於て、その部材應力の解法を記述しよう。

圖-31 に示すが如く、トラスは左右對稱形、格間長は一定とし、格點、部材應力等に圖示の如き記號を採用する。荷重はすべて鉛直であつて、トラスの上弦及び下弦の格點に作用するものとする。

圖-31.



兩端の反力 R 及び R' は、外力の釣合條件より容易に求められ、之がわかれば、兩端格點の釣合條件より

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= -R, \quad U_0 = 0, \quad -C_0 = D_0 = +\frac{R}{2 \sin \theta} \\ V_0' &= -R', \quad U_0' = 0, \quad -C_0' = D_0' = +\frac{R'}{2 \sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

を得る。次に菱形トラスの任意の下弦格點の釣合條件は、圖-32 に就て

$$L_i - L_{i-1} + (C_i - D_{i-1}) \cos \theta = 0, \quad (D_{i-1} + C_i) \sin \theta = P_i \dots \dots \dots (10)$$

同様に、上弦格點の釣合條件は

$$U_i - U_{i-1} + (D_i - C_{i-1}) \cos \theta = 0, \quad V_i - (C_{i-1} + D_i) \sin \theta = \bar{P}_i \dots \dots \dots (11)$$

になる。

今、式 (10) の第二式を下弦の奇數番目の格點 $1, 3, 5, \dots, 3', 1'$ に適用し、式 (11) の第二式を上弦の偶數番目

圖-32.

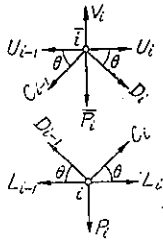
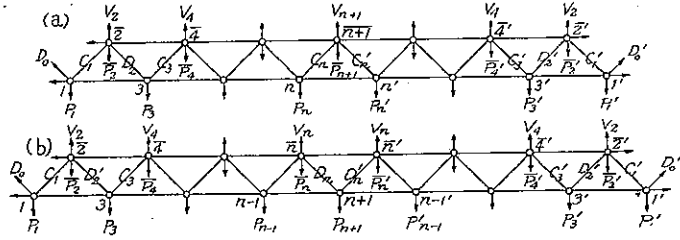


圖-33.



の格點 $2, 4, \dots, 4', 2'$ に適用し、之等の式を加へせると、圖-33 (a) の如く n が奇數の場合には

$$\begin{aligned} V_2 + V_4 + \dots + V_{n-1} + V_{n+1} + V'_{n-1} + \dots + V'_4 + V'_2 + (D_0 + D_0') \sin \theta \\ = P_1 + \bar{P}_2 + P_3 + \dots + P_n + \bar{P}_{n+1} + P_{n+1}' + \dots + P_3' + \bar{P}_2' + P_1' \dots \dots \dots (12a) \end{aligned}$$

若し (b) の如く n が偶數の場合には

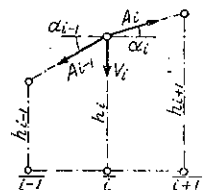
$$\begin{aligned} V_2 + V_4 + \dots + V_n + V_{n+1}' + \dots + V'_4 + V'_2 + (D_0 + D_0') \sin \theta \\ = P_1 + \bar{P}_2 + P_3 + \dots + \bar{P}_n + P_{n+1} + \bar{P}_n + \dots + P_3' + \bar{P}_2' + P_1' \dots \dots \dots (12b) \end{aligned}$$

を得る。

トラスが左右對稱の場合には、一般に $A_i' = A_i, V_i' = V_i$ である。今 A_i の水平分力は i の如何に拘らず常に相等しいから、之を H とすると、圖-34 に就て

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_i' = H \cdot \sec \alpha_i \\ V_i &= V_i' = A_i \sin \alpha_i - A_{i-1} \sin \alpha_{i-1} \\ &= H(\tan \alpha_i - \tan \alpha_{i-1}) = H \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{\lambda} \\ V_{n+1} &= -2A_n \sin \alpha_n = -2H \tan \alpha_n = -2H \frac{h_{n+1} - h_n}{\lambda} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

圖-34.



上記の V を式 (12) に代入し、且つ D_0, D_0' に式 (9) の値を代入すれば、式 (12a) 及び (12b) の左邊は

$$2H\{-2h_2+2h_3-\dots-(-1)^n 2h_n+(-1)^n h_{n+1}\}/\lambda+(R+R')/2$$

になる。上式に於て $R+R'$ は荷重の總和に相等しい。之等の關係から H を求めて一般にあらはすと次の如くなる。

$$H = - \frac{\lambda \left[\sum_{i=1}^n \{(-1)^i (\bar{P}_i + \bar{P}'_i - P_i - P'_i)\} + (-1)^n (P_{n+1} - \bar{P}_{n+1}) \right]}{4 \left[2 \sum_{i=2}^n (-1)^i h_i + (-1)^{n+1} h_{n+1} \right]} \dots \dots \dots (14)$$

本式の分母は一般に正である。若しアーチの格點が拋物線上にあるときには、本式の分母は一般に h_{n+1}/n に等しくなるから、此の場合には

$$H = - \frac{n^2}{4 h_{n+1}} \left[\sum_{i=1}^n \{(-1)^i (\bar{P}_i + \bar{P}'_i - P_i - P'_i) + (-1)^n (P_{n+1} - \bar{P}_{n+1}) \right] \dots \dots \dots (15)$$

になる。之等の式によつて H がわかれば、式 (13) より V_i 及び A_i が求められ、他の部材の應力は、格點法又は Cremona の圖解法により求めることが出来る。普通のアーチ又はランガートラスでは、 H は一般に負(壓縮力)であるが、本型式では、荷重の位置により正又は負になる。即ち張力又は壓縮力になる。従つて垂直材の應力も正又は負になる。 H の影響線は、例へば圖-35 の如くなる。但し實線は下弦載荷、點線は上弦載荷の場合の影響線である。

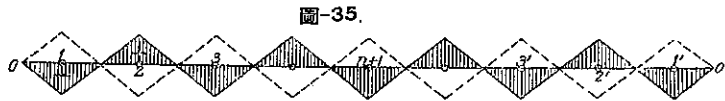


圖-35.

文 獻:

A. Föppl: Vorlesungen über Technische Mechanik, II Bd. Graphische Statik, 7 Aufl., 1926 (初版 1900)
 Otto Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, 2 Aufl., 1914 (初版 1904)
 Th. Landsberg: Handb. der Ingenieurwissenschaften, II. Teil, Der Brückenbau, Bd. III, 1909.
 Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 5. Aufl., 1924.