

# 論 說 報 告

第 26 卷 第 8 號 昭 和 15 年 8 月

## 偏 歪 修 正 の 諸 問 題

准 員 武 田 通 治\*

**要 旨** 空中寫眞測量の一重要部門たる偏歪修正に關する種々の疑問に對して筆者の私見を一括提起した。即ち (1) 偏歪修正に對する數學的條件と幾何光學的條件の關係, (2) 偏歪修正機の自由度に關する解釋, (3) 一樣に傾いた平坦面に對する偏歪修正に關する問題等に就て從來の所説を批判し, (4) シャイムプルーグの條件を證明し, 最後に 5mm 方眼板を用ひて, (5) 斜寫眞の偏歪修正, (6) 偏歪修正の達し得る精度に就て實驗した。

### 目 次

- |                            |                     |
|----------------------------|---------------------|
| 1. 序 論                     | 7. 原板の横移動 $q$ の作用   |
| 2. 解答の無限大性                 | 8. 基準點の數其他          |
| 3. シャイムプルーグの條件             | 9. 等角點の不變性          |
| 4. 偏歪修正機の自由度               | 10. 5mm 方眼による實驗 I   |
| 5. ツァイス製舊型自動偏歪修正機のレンズ傾斜の意義 | 11. 5mm 方眼板による實驗 II |
| 6. 一樣に傾いた平坦面の偏歪修正          | 12. ピタゴラス反比例機の作動機構  |

### 1. 序 論

偏歪修正は平坦地に於ける空中寫眞測量特に地籍測量の如き大梯尺測量に對して重要な位置を占むるものであるが之に對する從來の所説は中心投影に關する數學的概點と鮮明な投影像を得る爲の幾何光學的條件とを交錯させて混亂して隔つてゐる場合が少なくなつた。依つて以下筆者の理解した處並びに實驗結果の一部に就て私見を述べる。但し從來の書籍其他で明瞭な處は必要な最小限に止めた。

今寫眞レンズ及び投影レンズを無歪像と考へれば偏歪修正は幾何學的な中心投影の問題に他ならぬ。而して中心投影としての數學的條件は偏歪修正機の構造特に標定の自由度並びに偏歪修正實施に必要な基準點の數を規定する。之に對して幾何光學的條件は鮮明な投影像を得る爲に實技的に必要となる條件であつて、若し焦點深度が無限大な理想的レンズを假定すれば無くとも宜しいものである。依つて以下先づ中心投影の問題として所謂“偏歪修正機の自由度”の意味に就て吟味する。

### 2. 解答の無限大性

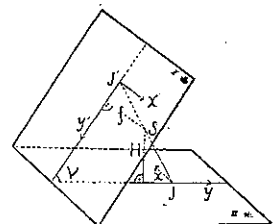
圖-1 に於て I: 晝面, II: 地表面, S: 投影中心, J, J': 地上及び晝面等角點とし, J, J' を原點とし主切線を  $y, y'$  軸として  $(x, y)$  及び  $(x', y')$  座標系を定めれば

$$x = \frac{x'H'}{f' - y'}; y = \frac{y'H'}{f' - y'} \dots \dots (1) \text{ 但し } f' = \frac{f}{\sin \nu}, H' = \frac{H}{\sin \nu}$$

なる變換式が成立する事は既述の通りである。)

而して (1) 式の函數形を決定するものは明かに  $f', H'$  の 2 項を出でない。然るに  $f', H'$  は  $f' = f/\sin \nu; H' = H/\sin \nu \dots (2)$  の如く 3 個の未知量  $f, H, \nu$  から成つてゐるから一定の變換式を得る爲換言すれば地面と其の寫眞とを互に正しく對應させる様な關係位置に置く爲には  $f', H'$  が一定値になる様に (2) 式を解

圖-1. 地表面と陰晝面の投影關係



\* 理學士 陸地測量師 陸地測量部

1) “輻射線法の理論” 土木學會誌第 26 卷第 2 號 194 頁

けば良いのであるから  $f, H, v$  の中の一量は全く自由に選べる。即ち  $\infty^1$  の解答が存在し得る。但し注意すべき事は、 $f$  とか  $H$  とかは撮影の際にこそ焦点距離及び飛行高度として具体的内容を持つてゐるが、現在に於ては單に數學的量たる畫面距離即ち投影中心から各面に下した垂線長を意味するに過ぎぬ。

以上の性質から次の事を誘導出来る。即ち“偏歪修正に於ては撮影の内部定位及び外部定位を再現するの必要は無く唯だ  $f, H'$  を一致させれば宜しい”。而して圖-2 から明かな様に  $f, H'$  は投影中心  $S$  の位置を規定する量である。

以上の關係は次の様な作圖によつても證明される。

今圖-3 に於て  $S$  を投影中心  $F$  を畫面消失點 ( $SF \parallel MA$ )、對應する任意の地點を ( $A : a$ ), ( $B : b$ ) とする。然らば  $FS = f'$ ;  $MF = H'$  である。今  $F$  を中心とし、 $f'$  を半径として弧を描き、一方  $I$  面と任意の傾斜  $v'$  を爲して  $FS'$  を引き兩者の交點を新しい投影中心  $S'$  とする。次に  $aS', bS'$  を延長し、 $M$  に於て  $I$  面と  $v'$  を爲す面  $III$  との交點を  $A', B'$  とする。

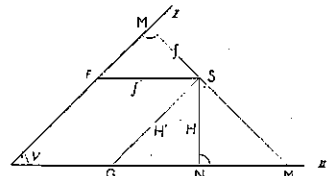
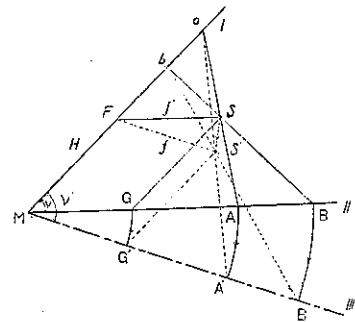


圖-2. 主切面に於ける投影關係

圖-3. 偏歪修正の多幾義性



然らば  $\Delta aMA'$  と  $\Delta aMA$  に於て

$$\begin{aligned} &FS' \parallel MA'; \quad FS \parallel MA \\ \therefore \frac{MA'}{FS'} &= \frac{aM}{aF}; \quad \frac{MA}{FS} = \frac{aM}{aF} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

然るに作圖により  $FS' = FS$  であるから

$$(3) \text{ から } MA' = MA \dots \dots \dots (4) \text{ となる。}$$

同様に  $MB = MB'$  従つて又  $A'B' = AB$  となる。換言すれば投影面の傾斜を任意に選んでも投影中心の位置を適當に選めば必ず正しい偏歪修正像を求められる。

而して此の無限大の解答可能性を實際的には唯一に限定するものは幾何光學的條件である。

### 3. Scheimpflug の條件

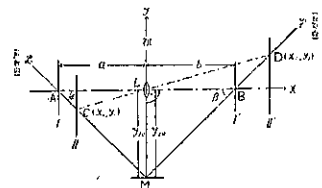
偏歪修正機の投影レンズは純數學的觀點からすれば單に投影中心を具現する「點」と考ふ可き性質のもので、元來中心投影を行ふ爲の手段にすぎず、従つて又其の大きさ或は光軸の方向等は數學的には全く無意味なものである。併しピンホール寫眞の如き無限大の焦点深度を有するレンズは別として實在のレンズに於ては斜の面を他の斜の面上に鮮明に投影する爲には次の光學的條件を満足しなければならぬ事は周知の通りである。即ち

- 1: レンズ公式  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$
- 2: シュアイムブルーグの條件 (三面交會の條件)

此の内 1 の方は今更證明を必要としないと考へるから此處では 2 個の條件を必要とする理由及び普通 Abbe の條件から誘導されるといふだけで一向に證明されてゐない Scheimpflug の條件を初等幾何光學的に證明する。

A: 2 個の條件を必要とする理由 圖-4 を偏歪修正機の要圖とし、原板面  $\mathcal{S}$  を投影面  $\mathcal{P}$  上に鮮明に投影するものとする。但しレンズの光軸は偏歪修正機の基本軸と一致し、レンズ中心  $L$  を原點として  $x, y$  座標系其の他を圖の様に定める。然らば普通のレンズ公式 (1) のみによつては  $A$  點を通り光軸に直光する平面  $I$  が  $B$  點を通り光軸に直交する平面  $I'$  上に鮮明に投影されるのであるから、原板面及び投影面上に於ては之等と  $I, I'$  面との交會線即ち  $A$  並びに  $B$  を通り紙面に直交する直線のみが共軛となるにすぎず、

圖-4. 偏歪修正機の幾何光學的機構



$\mathcal{S}$  全面を  $\mathcal{P}$  面上に鮮明に投影する爲には更に他の一直線又は一點が鮮明に投影されねばならぬ (∵ 平面は二平行線又は一直線と一點とによつて決定する)。之が爲には所謂 Scheimpflug の條件が必要である。即ち“原板

面  $\Sigma$ , レンズの中心面  $\Sigma'$ , 投影面  $\Sigma''$  が一直線上に於て交はらねばならぬ”のである。

B: Scheimpflug の条件

今圖-4 に於て  $\Sigma$  面上の A 線以外の任意の線 C が  $\Sigma''$  面上の D 線に鮮明に投影されてゐるとする。然らば C, D を通り光軸に直交する平面 II が II' に投影されうる筈である。而して之が成立する爲の条件を考へるには主切面上に於て C 點  $(x_1, y_1)$  が D 點  $(x_2, y_2)$  に投影される条件を求めれば良い。今圖に於て

$$\text{直線 AC は } y_1 = -(x_1 - a) \tan \alpha \dots\dots\dots(1) \quad (\text{但し } a < 0)$$

$$\text{直線 BD は } y_2 = (x_2 - b) \tan \beta \dots\dots\dots(2) \quad \text{で表される。}$$

然るに A 點が B 點に投影され、C 點が D 點に投影される事によつて幾何光學的には

$$\frac{+1}{-a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{及び } \frac{1}{-x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \dots\dots\dots(4) \quad \text{とならねばならぬ。}$$

$$\text{又 CLD が一直線上にある事から } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \dots\dots\dots(5) \quad \text{となる。}$$

$$\text{今 (5) の } y_1, y_2 \text{ に (1), (2) を代入すれば } \frac{-(x_1 - a) \tan \alpha}{x_1} = \frac{(x_2 - b) \tan \beta}{x_2}$$

$$\text{或は } -\tan \alpha + \frac{a}{x_1} \tan \alpha - \tan \beta + \frac{b}{x_2} \tan \beta = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{然るに (4) によつて } \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1} \text{ であるから之を (6) に代入すれば } +\tan \alpha - \frac{a}{x_1} \tan \alpha + \tan \beta - \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{x_1}\right) b \tan \beta$$

$$= 0 \quad \text{或は } -\frac{1}{x_1} (a \tan \alpha + b \tan \beta) + \tan \alpha + \tan \beta - \frac{b}{f} \tan \beta = 0 \dots\dots\dots(7)$$

然るに又 (3) を變形すると  $\frac{b}{f} = 1 - \frac{b}{a}$  となるから之を (7) に代入すると

$$\frac{1}{x_1} (a \tan \alpha + b \tan \beta) + \tan \alpha + \tan \beta \left(1 - 1 + \frac{b}{a}\right) = 0$$

$$\text{即ち } \frac{1}{x_1} (a \tan \alpha + b \tan \beta) + \frac{1}{a} (a \tan \alpha + b \tan \beta) = 0$$

$$\text{或は } (a \tan \alpha + b \tan \beta) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x_1}\right) = 0 \dots\dots\dots(8)$$

而して一般に  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x_1}\right) \neq 0$  と考へられるから鮮明な投影像を得る爲には

$$a \tan \alpha + b \tan \beta = 0$$

$$\text{或は } a \tan \alpha = -b \tan \beta \dots\dots\dots(9) \quad \text{とならなければならぬ。}$$

さて (1), (2) に於て各々  $x_1 = 0, x_2 = 0$  とおけば

$$y_{10} = a \tan \alpha, \quad y_{20} = -b \tan \beta \quad \text{であるから (9) によつて兩直線の } y \text{ 軸上の割線 } y_{10} \text{ と } y_{20} \text{ は}$$

相等しくなければならぬ。即ち兩直線は  $y$  軸上に於て相交らねばならぬ。然るに  $y$  軸はレンズの中心面を代表するものと考へられるから之によつて Scheimpflug の条件が證明されたことになる。

以上の證明に於てはレンズの投影中心を一點と考へ實際のレンズが前側、後側兩節點に分離してゐるのを無視してゐるが元來レンズ公式 1 も同一前提の下に出發してゐるのであるから之で一應差支無いと思ふ。又偏歪修正機の各種反比例機の構造も節點間距離の短いレンズを使用する事によつて之を無視してゐるものが多い様に見受けられる。

以上によつて幾何光學的条件を 2 個説明したが、2 章に述べた處によれば數學的に見た場合の偏歪修正の多義性は  $\infty^1$  に過ぎぬから今更に 2 個の条件が追加せられると過剰条件となつて解答が不可能となる様に見へるが之に就ては次の様に考察すれば良い。即ち

2 章の圖-1 或は圖-3 に關聯して證明したものは、數學的な點と考へた場合の投影中心の位置の多義性に他ならぬ。然るに實際の偏歪修正機に於ては投影レンズが有限の焦點深度を有する爲に主切面内に於てレンズの光軸を何の方向に向けるかに就て更に  $\infty^1$  の多義性を生じ、鮮明な投影条件を求める爲には此の多義性を唯一解に制

限する爲のもう一個の条件が必要となり合計 2 個の条件によつて實在の偏歪修正機に對する偏歪修正条件が決定されるのである。

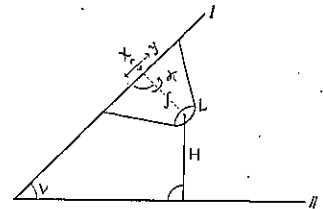
### 4. 偏歪修正機の自由度

偏歪修正の任務は周知の通り次の二點にある。即ち

- 1: 斜或は略近垂直寫眞から嚴密垂直寫眞を作る。
- 2: 撮影高度の差による寫眞梯尺差を統一して所要の一定梯尺とする。

而して此の任務を完全に遂行する爲には偏歪修正機は 5 個の自由度を有し撮影時に於ける寫眞機の狀態と affin な狀態を再現しなければならぬとされてゐる。依つて以下其の理由を説明し併せて Gruber の著者等に現れてゐる誤つた表現を訂正する。

圖-5. 理想的偏歪修正機の自由度



A: 無限大の焦點深度を有する投影レンズによる偏歪修正:

投影レンズとして撮影レンズと同一焦點距離で無限大の焦點深度を有するレンズ L を使用して撮影時と同一の内部定位(投影中心と原板との關係位置)並びに外部定位(投影中心の空間に於ける位置及び撮影方向)を再現すれば正しい偏歪修正が行はれる事は論を俟たぬ。而して圖-5 から明かな通り原板面 I 上に於て任意の狀態にある原板の内部定位を正しく行ふには原板を直交する二

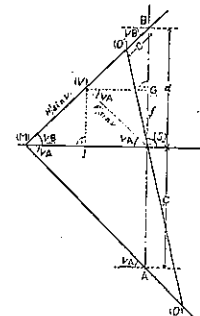
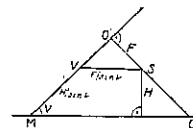
方向  $x, y$  方向に動かし得る装置が必要である(但し  $f$  は正しい値になつてゐるものとする)。又外部定位を再現する爲には投射器を傾け得る ( $\nu$  の變化) と共に正しく最大傾斜線の方向を標定する爲に 投射器又は原板架が回轉し得なければならぬ ( $k$  の變化)。更に又梯尺を一定にする爲には投射器の高さ  $H$  を變化し得なければならぬ。此の様に  $x, y, k, \nu, H$  の 5 個の標定可能性即ち自由度があれば偏歪修正は可能である。但し回轉  $k$  と傾斜  $\nu$  の代りに  $x, y$  方向に分解した傾斜即ち旋回  $\varphi$  及び俯仰  $\omega$  を用ひても宜しい。

此の種の偏歪修正は一定範囲内ではあるがマルチプレクスに於て最も端的に具體化されてゐる。此の場合注意すべきは豫め  $f$  に一定値を與へておいた爲に解答が一義的となつたのであつて 2 章の所説と矛盾しない。

B: 實際の偏歪修正機に於ける自由度.

焦點深度が有限な投影レンズを使用する實際の場合に就ても其の自由度は A の場合と平行であらうといふ事は直に想像される。但し A に於ける  $\nu$  と  $H$  の變化は 2 章に述べた投影中心を決定する量  $f, H'$  と同格であると考へねばならぬ。尙又實際の偏歪修正機に與ふ可き自由度は偏歪修正機の基本的構造に多少支配されるものであるから以下先づ撮影条件と偏歪修正条件との關係を吟味してみる。但し注意すべき事は 2 章の數式 (1) 或は圖-3 から判る様に例へ數學的には無限大の解答が可能であつても其れは主切面内に於ける投影中心の位置が多義的であるといふに止まり、原板の主點が主切面を外れる事或は最大傾斜線方向が變化する等といふ事はない。

圖-6. 撮影条件 圖-7. 偏歪修正の条件



今圖-6 を撮影時の條件、圖-7 を之に對應する偏歪修正時の條件とする。各の場合に於て各種の量並びに記號を圖の通り定め互に對應する點は ( ) に包んで同一符號を使用してある。又  $F$  は撮影機の焦點距離、 $f$  は偏歪修正機の其れである。

圖に於て、 $V, (V)$  は消失點であるから消失點としての性質上各、 $MO$  面或は  $(M)A$  面上の無限遠點の投影點を意味する。一方レンズの光學的性質から考へれば無限遠點は焦點面上に結像しなければならぬから  $(V)$  から光軸上へ下した垂線の足  $G$  は投影レンズの中心  $(S)$  から  $(S)G=f$  の距離になければならぬ。同様に  $(V)$  から  $(S)(M)$  へ下した垂線の長さは矢張り  $(V)J=f$  となる。

而して圖-7 の關係に於て正しい偏歪修正が行はれる爲には  $(M)(V)=H/\sin \nu, (V)(S)=F/\sin \nu$  が成立しなけ

ればならぬ事は既に2章に於て述べた通りである。

然らば Δ(V)(S)G に於て  $\frac{F'}{\sin \nu} \cdot \sin \nu_A = f$

即ち  $\sin \nu_A = \frac{f}{F'} \sin \nu = \frac{f}{F'} \left( \text{但し } F' = \frac{F}{\sin \nu} \right) \dots\dots\dots(1)$  となり、

又 Δ(V)J(M) に於て  $\frac{H}{\sin \nu} \cdot \sin \nu_B = f$

即ち  $\sin \nu_B = \frac{f}{H} \sin \nu = \frac{f}{H'} \left( \text{但し } H' = \frac{H}{\sin \nu} \right) \dots\dots\dots(2)$

となる事は極めて明瞭である。

次に ΔB(S)(M) に於て  $d = (S)(M) \tan \nu_B$

然るに (S)(M) = (S)J + J(M) =  $f \cot \nu_A + f \cot \nu_B$

∴  $d = f(\cot \nu_A + \cot \nu_B) \tan \nu_B = f(1 + \tan \nu_B \cot \nu_A) \dots\dots\dots(3)$

同様にして Δ(S)(M)A に於て  $e = f(1 + \tan \nu_A \cot \nu_B) \dots\dots\dots(4)$  となる。

又  $e \equiv B(O') = (M)B - (M)(O')$  は、

$(M)B = \frac{(S)(M)}{\cos \nu_B} = \frac{f(\cot \nu_A + \cot \nu_B)}{\cos \nu_B} = f \left( \frac{\cot \nu_A}{\cos \nu_B} + \frac{1}{\sin \nu_B} \right)$

$(M)(O') = MO' = F' \cot \nu + \frac{H}{\sin \nu} = F' \cot \nu + \frac{f}{\sin \nu_B} \dots\dots\dots[(2) \text{ による}]$

∴  $e = f \left( \frac{\cot \nu_A}{\cos \nu_B} + \frac{1}{\sin \nu_B} \right) - \left( F' \cot \nu + \frac{f}{\sin \nu_B} \right)$   
 $= f \frac{\cot \nu_A}{\cos \nu_B} - F' \cot \nu = f \frac{\cot \nu_A}{\cos \nu_B} - \frac{f \cdot \cos \nu}{\sin \nu_A}$   
 $= \frac{f}{\sin \nu_A \cos \nu_B} (\cos \nu_A - \cos \nu \cos \nu_B) \dots\dots\dots(5)$

斯くして撮影条件  $F, H, \nu$  及び偏歪修正機、レンズの  $f$  が與へられれば  $\nu_A, \nu_B, c, d, e$  の偏歪修正条件を計算出来る。併し實際には之等5量は凡て獨立なものではなく、 $c$  と  $d$  は  $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$  なる条件によつて結ばれ、又  $\nu_A$  と  $\nu_B$  との関係は(1)と(2)から  $\frac{\sin \nu_A}{\sin \nu_B} = \frac{f \sin \nu / F'}{f \sin \nu / H} = \frac{H}{F'}$  なる条件に結ばれて居り、結局獨立變數としては  $\nu_A, c, e$  の3量に限られる。他の2量は各種反比例器によつて自動的に決定される。併し偏歪修正の獨立變量としては此の他に圖-7が、原板の主點が偏歪修正機の主切面内にある事、及び最大傾斜線の方が正しく再現されてゐる事を前提としてゐるから之等の2變量即ち原板の傾斜軸に平行な横移動  $g$  及び原板の回轉  $\kappa$  を加へて合計5個の獨立變量を考へねばならぬ。従つて完全な偏歪修正機は之等5變量に對應する5自由度を有しなければならぬ。而して例へ正確な撮影条件は不明であるにせよ、何の寫眞も必ず一定の撮影条件下に撮影された事は自明の理であり、一方に於て自動偏歪修正機により偏歪修正の条件は一義的に定る性質のものである事は既述の通りであるから之等5變量を系統的に變化しつゝ1枚の寫眞上の4個の基準點が合ふ様に操作すれば正しい解答を得られる事も推定出来る。

尙補足的説明を行へば次の様になる。

$e$ : 偏歪修正の基本軸は A(S)B であるから作業開始に當つては先づ主點 (O') を A に置いてから開始するのを原則とする。従つて圖-7の様な状態にするには原板を原板架上に於て傾斜軸(Aを通り紙面に直交してゐる軸)に直角に動かす装置がなければならぬ。之即ち  $c$  の意味である。

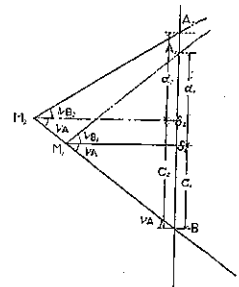
$g$ : 偏歪修正機に原板を取付ける場合には通常原板と原板架の指標を合せるのが普通であるが、此の様に操作すると主點が偏歪修正機の主切面内になければならぬといふ條件が自ら満足されて了ふ。従つて偏歪修正に際して實際に調整する變量は4個になり、4種類の操作で作業が完了する事になる。又撮影条件を與へられて偏歪修正条件を計算する場合にも當然  $\nu_A, c, e, \kappa$  の4量で良い。併し之は決して偏歪修正の自由度が4である事を意

味しない。

此の事實は逆に考へると偏歪修正諸元を計算で求めるのではなく地上基準點に基いて暗探的に解答を求める場合原板の横移動装置  $q$  が可能であれば必ずしも原板の指標と偏歪修正機の原板架の指標とを厳密に合せる必要がない事を意味するもので實技上極めて重要である。併し其れかといつて原板が甚しく横にずれた位置で偏歪修正出来る筈のものではなく、主點が偏歪修正機の主切面内になければならぬ事は依然として確かである。

$v_A, v_B$ : 本節の式 (1), (2) から明かな様に偏歪修正機レンズの  $f$  は定つてゐるから  $v_A = f_n(H')$ ,  $v_B = f_n(H)$  と考へられる (但し  $f_n$  は函数を意味する)。従つて  $v_A, v_B$  を定める事は 2 章に於て説明した様に投影中心の位置を決定する事になる。然るに  $v_A, v_B$  の何れか一方は獨立變量となつてゐるから差支無いが、残の一方はといふと、之は  $c$  或は  $d$  の變化によつて置代へられてゐる。即ち圖-8 に於て  $v_A$  と  $c$  を自變量と考へる。今  $v_A$  に或る値をとらせれば之によつて  $H'$  が一定値をとつた事になる。此の場合幾何光學的條件に支配せられ、其の時の  $c_1$  の値によつて定められる値  $v_{B_1}$  即ち  $H'_1$  をとる。併し此の状態が求むる  $H'$  に相當しないならば、 $v_A$  を固定しておいて  $c$  を變化する。然らば  $S_1, M_1, A_1$  等は各  $S_2, M_2, A_2$  迄移動する ( $v_A$  は不變)。而して  $c$  と  $d$  は常に  $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$  なる關係に制扼されてゐるから圖の様に  $c$  が増加すれば  $d_2$  は必然的に減少する。一方  $M_2 S_2 > M_1 S_1$  なる事は自明の理であるから以上二理由によつて  $v_{B_2}$  即ち  $H'$  が變化し正しい  $H'$  に相當する値を求める事が出来る。

圖-8. 自變量 ( $v_A, c$ ) の作用



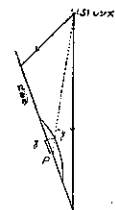
此の意味に於て自變量 ( $v_A, c$ ) 或は ( $v_B, d$ ) は投影中心の位置を決定するものだけといへる。之に對して ( $g, e, \kappa$ ) は原板架上に於ける原板の位置を決定する量である。

此の意味に於て偏歪修正機の自由度として Scheimpflug の條件なる言葉を使用してゐる場合があるのは妥當でない。

偏歪修正の限界: (1), (2) 式から明かな様に偏歪修正が可能である爲には  $\sin v_A = \frac{f}{H'} \sin v < 1$  及び  $\sin v_B = \frac{f}{H} \sin v < 1$  でなければならぬ。従つて傾斜  $v$  の大きな斜寫眞の場合には  $f/H'$  或は  $f/H$  が 1 以上になると偏歪修正が不可能になる場合がある。其れ故此の種の偏歪修正に於ては成可く偏歪修正レンズの焦點距離を短くする必要がある、又  $f/H$  を小さくする爲には偏歪修正梯尺を大にする必要がある。但し  $H$  は梯尺化された飛行高度である。又  $f/H'$  を小さくするには成可く撮影機の  $F$  を長くする方が宜しい。尙又一般的に考へても次の理由によつて  $v_A, v_B$  を成可く小さくする事は望しい。即ち

投影板が  $40^\circ$  以上も傾く様になれば地點の確認が不確實になり又圖-9 の  $q$  部に示す様に印畫紙が局部的に膨れ上つてゐると本來  $P$  點に投影せらる可き像は  $q$  點に結像し、印畫紙を引伸すと  $\overline{qP}$  の誤差を生ずる。此處に於て豫め印畫紙を水浸しにして投影板に貼付けておいて露光する方法の妥當性が發生する。印畫紙を水浸しない限り、乳劑膜面の收縮に伴ふ印畫紙の捲れ上りによつて真空焼枠式にでもしない限り之を完全に平坦にする事は困難である。此處に比較的長焦點距離レンズ ( $f=170$  mm) を使用する SE GI 型自動偏歪修正機 (圖-10) による圓鏡玉自動航空寫眞機の影像交換の結果が舊型偏歪修正機 ( $f=135$  mm) によるものよりも良好でない一因がある。同じ現象は又略近垂直寫眞と相當な斜寫眞とを同一レンズ、同一偏歪修正機によつて處置しようとする萬能機の出現を拒否する理由となる。而して此の如き萬能機材を希望する立場からはツァイスの舊型自動偏歪修正機に於ける如く同一本體によつて  $f=210$  mm と  $f=135$  mm の 2 種類の投影レンズを使用し得る構造は充分考慮に値する。之に對して最近の世界的傾向として  $f=160 \sim 170$  mm の單一投影レンズの使用が大勢を占めつゝある傾向は軍用、探検用等の特殊目的を除き、平時作業としては斜寫眞が次第に意義を失ひつゝある事を示すと共に、直角反比例機 (Rechtwinkelinversor) の使用による機構の簡易化と寫眞レンズの焦點距離の標準化 ( $f=100 \sim 200$  mm) とが原因であらうと思はれる。

圖-9. 印畫紙の局部的膨脹による偏歪修正誤差



以上の他偏歪修正機的设计に當つては大體何の位の擴大率を目標するかを考慮しなければならぬ。即ち略近垂

直寫眞に於ては投影レンズの焦點距離を  $f$  とすれば、レンズと投影板の間隔は  $1/1$  擴大に於ては  $2f$ ,  $3$  倍擴大に於ては  $\frac{3}{2}f$  となる。而して基準點の認定を確實にする爲には作業者がレンズの下方に樂々と頭を入れる餘裕のある事が必要であつて此の意味に於て歐洲製の器材が大體  $1/5000$  以上の大標尺圖を目的とし相當な擴大率を前提としてゐる關係上比較的單焦點距離のレンズを使用してゐるらしい事は特殊の使用目的によつては必ずしも妥當ではないものゝ様に思はれる。同様な選擇は周邊に到る光度減退の程度或は投影板の大きさ、種類等に就ても考慮の餘地がある様である。

5. ツァイス製舊型自動偏歪修正機のレンズ傾斜の意義

既述の如く數學的觀點からは投影レンズは單に投影中心を表す一點を考へらる可きもので光軸の方向如何は偏歪修正には本質的な意味を持たぬと言つたが、ツァイス製の舊型自動偏歪修正機ではレンズの傾斜を一自由度として考へて居り、上の記述を裏切つてゐる様である。併し之は光軸の方向變化によつて自動的に原板架の傾斜を變化し前節の  $e$  と同一の結果を引起すのである。即ち圖-11 に於て BSA を偏歪修正機の主軸とすれば B には寫眞主點がある。今レンズ S の俯仰前の狀態を實線並びに接尾字 1 で表し俯仰後の狀態を破線並びに接尾字 2 で表せば投影レンズの光軸と原板面との交點 (B) 即ち前節の偏歪修正機に於ける構造の基本軸上點たる (B) に相當する點は (B)<sub>1</sub> から (B)<sub>2</sub> に移り之によつて寫眞主點との距離は (B)<sub>1</sub>B から (B)<sub>2</sub>B に變化する。之即ち前節に於ける縱移動  $e$  に他ならぬ。

6. 一樣に傾いた平坦面の偏歪修正

土地が水平で平坦であれば 4 個の操作によつて偏歪修正が可能であり、又平坦ではあるが一樣に傾いてゐる場合には第 5 の操作即ち原板の横移動  $q$  によつて偏歪修正が完了すると從來言はれてゐた<sup>2)</sup> 之はどうも疑問であつて、筆者の考によれば“一樣に傾いた平面に對しては嚴密な偏歪修正は不可能であつて唯だ土地の傾斜角  $\varphi$  の精度に於て之が成立し而も  $q$  は必要でない”と思はれる。

之を證明する爲に原板面、水平面及び一樣に傾いた地表面が同一直線上に於て交會する特別な場合を考へる。然らば主切面に於ける切口は圖-12 となる。今一樣に傾いた地表面 III 上の A, B 等を考へれば之等は原板面 I 上に於て a, b 等に投影されてゐる。一方 A, B 等の直下の點を A', B' 等とすれば、嚴密な意味に於て偏歪修正が成立する爲には a, b 等と A', B' 等が中心投影の關係によつて結ばれねばならぬ。然るに A, B 等と a, b 等は中心投影的關係にあるが、A, B 等と A', B' 等とは平行投影的關係にあり、最大傾斜線に平行な方向と之に直交する方向とに於ては大きさを異にし、例へば III 面上で AB を一邊とする正方形は II 面上では主切面に直角な方向では其の儘で、之に平行な方向では  $A'B' = AB \cos \varphi$  となる矩形となる。然るに中心投影では正方形を梯形にする事は出来るが矩形にする事は出来ない事は少し考へれば判るから筆者の意見の正當性を推定される。此の關係は又次の様にして上の特例に對して證明出来る。

今 2 章の公式 (1), (2) に従つて A, B 等と a, b 等の間に

$$x = \frac{x' H'}{f' - y'} \dots \dots \dots (1) \quad y = \frac{y' H'}{f' - y'} \dots \dots \dots (2)$$

圖-10. SEGI 型自動偏歪修正機

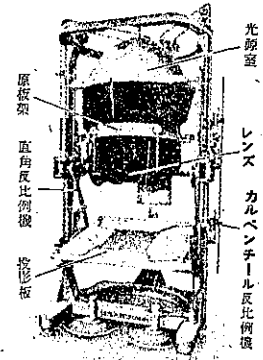


圖-11. レンズ傾斜の及ぼす影響

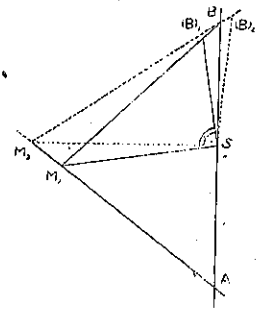
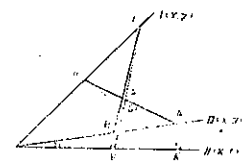


圖-12. 一樣に傾いた平坦面 III と水平面 II の投影關係



<sup>2)</sup> Gruber: Verienkurs in Photogrammetrie s. 448; Schwidewsky: Einführung in die Erd-und Luft bild-messung s. 66 同邦譯 108 頁.

なる関係が成立し、又 III 面と I 面とが中心投影的に結びれて、

$$X = \frac{x_2' h'}{F' - y_2'} \dots \dots \dots (3) \quad Y = \frac{y_2' h'}{F' - y_2'} \dots \dots \dots (4)$$

なる関係が成立してゐるとする。然るに上に説明した様に II 面と III 面との間には  $X = x \dots \dots (5)$ ,  $Y = y \cos i \dots \dots (6)$  なる関係が成立するから (1)~(6) 式から次の関係が成立する。

即ち  $\frac{x_2' h'}{F' - y_2'} = \frac{x' H'}{f' - y'} \dots \dots \dots (7) \quad \frac{y_2' h'}{F' - y_2'} = \frac{y' H'}{f' - y'} \cos i \dots \dots \dots (8)$

然るに  $x_2' = x' \quad y_2' = y' + \Delta y'$  (但し  $\Delta y'$  は  $y$  軸上の原點の移動) となるから (7) と (8) から

$$\frac{H'}{f' - y'} = \frac{y'}{y_2'} \cdot \frac{H'}{f' - y'} \cos i \dots \dots \dots (9)$$

或は  $y_2' = y' \cos i$  即ち  $y' + \Delta y' = y' \cos i$

或は  $\Delta y' = y' (\cos i - 1) \dots \dots \dots (10)$  でなければならぬ。

然るに  $\Delta y'$  は原點の移動量であるから一定値でなければならぬのに対して、右邊の  $y'$  は任意の値を取り得るから  $\Delta y'$  は不定となる。即ち (3), (4) の變換式が成立する爲には原點は不定となり。此の如き變換式は成立せぬ事を示す。

換言すれば I 面と II 面とを中心投影關係に置く事は不可能であつて嚴密な意味に於ける偏歪修正は不可能である。併し此の場合 AB と A'B' との差は

$$AB - A'B' = AB(1 - \cos i) \approx AB \frac{i^2}{2}$$

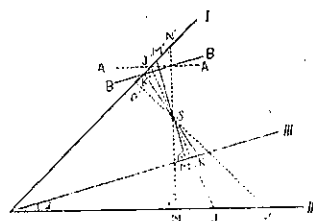
で表され、 $i$  が小さければ極めて小さい値となるから此の制限内に於て近似的に偏歪修正が成立するといへる。

例へば  $i = 2^\circ$  とすれば  $\frac{i^2}{2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{30}\right)^2 = \frac{1}{1800}$  となり 180 mm の長さに対して僅かに 0.1 mm の誤差を生ずるに過ぎず印畫紙の收縮等を考慮すれば明かに實用的な偏歪修正の精度限界内にある。

次には此の如き近似的偏歪修正に於て原板の横移動  $q$  を必要とするか否かの問題であるが之に關聯しては“圖-12 に示した關係は極めて特殊な場合で一般には水平面に對する原板の傾斜と地表面の傾斜とが一致してゐないから之を補正し投影板を地表面の傾斜方向に傾けるり代に原板を横に移動する”との所説もあるが之も亦明かに不合理である。何故ならば、地表面がこの様に傾いてゐようと之と原板面は必ず一直線に於て交會する筈である。然らば投影中心から之等兩面に下した 2 本の垂線を含む主切面を考へる事が必ず出来るから此の主切面内に於て圖-12 の I 面と III 面との關係が成立し畫面と地表面とを中心投影的關係に置き得る事は疑を容れぬ。唯だ土地が水平平坦な普通の場合と異なる處は主切面が鉛直面を成さず又最大傾斜線の方が水平面を考慮した場合と異なるといふ事である。併し之等の條件によつては主點を主切面外に横に移動させなければならぬ理由を發見し得ない。而して此の様に傾斜面上への偏歪修正が普通の方法で可能である事が判つた以上傾斜面から水平面への轉換には前同様正方形を矩形に變化する必要が起るのであるから既述の理由によつて偏歪修正は不可能となる。此の場合横移動  $q$  によつても正方形を矩形と爲し得ない事は次節に示す通りである。

尙又一様に傾斜した平坦面に對する偏歪修正に於ては土地の比高に基く投影誤差は普通の場合よりも小さくなるものであつて其の理由は圖-13 に示す様に、水平面 II を基準とする時は偏歪修正面は II に平行な AA 面となるが、傾斜面 III に關聯した偏歪修正面は III 面に平行なる BB 面となるからである(圖解の便宜上陰畫面に就て説明してある)。但し圖に於て SN は鉛直線、J' は普通の意味の等角點、SM は I:I 面への垂線、K' は III 面に關聯した場合の等角點である。

圖-13. 傾斜面に對する偏歪修正



7. 原板の横移動  $q$  の作用

原板の横移動  $q$  が一様な傾斜地の偏歪修正に必要な一自由度と考へられてゐるにも拘らず之が無意味である事



は既述の通りである。併し尙念の爲  $q$  によつてどの様な變化が起り得るかを一應吟味してみる。

圖-14 の如く原板面と投影面が平行な場合に正方形格子板  $A'B'$  を横に  $A''B''$  迄移動しても投影像が  $AB$  から  $(A)(B)$  に移動するだけで形は不變である事は圖に示した切口と之に直角な切口とを考へれば直に推定される。

之に反して原板面と投影面が平行でなければ正方形は四邊形として投影される。此の場合圖-15 の様に原板のセンターリングが完全であれば投影像は  $V$  を消失點とする正梯形  $ABCD$  となる。

今此の状態を原板を  $q$  だけ移動すれば投影像は同一の消失點を有する  $A'B'C'D'$  となる。但し  $q$  は傾斜軸に平行な移動であるから之に平行な方向の梯尺は不變で  $A'B'=AB, C'D'=CD$  等が成立する。之によつて  $GLMN$  の如き矩形は  $G'L'M'N'$  の如き平行四邊形に變じ得る事が明かとなつた。併し矩形を正方形とする様な變換は出來そうもない。

大體在來の書物に表れてゐる傾いた平坦面に対する偏歪修正とは何を意味するかも實は明かでない。即ち傾斜面の垂直投影位置を求める事は嚴密な意味に於ては成立不可能な事は既述の通りである。之に反して傾斜面上の位置に偏歪修正するならば最大傾斜線等を此の面に關聯して考へれば  $q$  は不用である。又土地の比高を考慮して比高による平面位置の移動を豫め基準點展開圖上に補正しておけば普通の起伏地の偏歪修正と異る處がない。結局最後に残るのは  $q$  を働かせる事によつて無理に 4 基準點を合せる事であらう。併し此の種の無理をすると其れ以外の點に相當大きな投影誤差を生じ、基準點だけは合ふが其の他は全く合はぬといふ様な事を生じ勝なものである。極く最近迄偏歪修正は合はせた點だけはよいが其の中間は駄目だといふ通念が相當強かつた事は、土地の起伏、基準點の認定誤差、或は舊來の測板測量圖から基準點を求める爲の誤差(地圖から基準點を求める場合、三角點を直接寫眞上に確認するのは困難である爲に道路交會部等を使用せざるを得ぬが、之等は測板測量の誤差、地圖の記號化による位置の不明確化、紙の伸縮或は一圖葉として纏める爲の貼布の誤差等複雑な影響を受けてゐる)。或は偏歪修正機の不備等に基因して無理な偏歪修正を行つてゐた處に大部分の原因がある様に思はれる。元來偏歪修正は撮影フィルムから直接投影するのであるから誤差の起り得る餘地は極めて少いのであるが、其れだけに又基準點の測定誤差は其の儘に表れて之を補正する事は極めて難しいのである。

圖-14. 原板面と投影面が平行な場合の  $q$  の作用

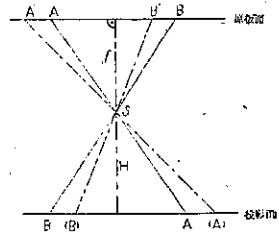
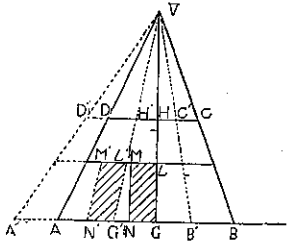


圖-15. 原板面が投影面に平行でない場合の  $q$  の作用

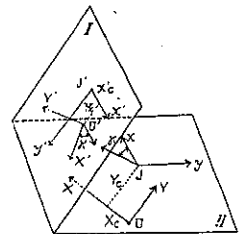


### 8. 基準點の數其他

本節の事項に就ては既に Gruber 等によつて検討が済んでゐるが敘述の便宜上紹介しておく。

圖-6 に見る如く地表面 II と畫面 I 上に於て任意の點  $U, U'$  を原點とする任意の座標系  $(X, Y), (X', Y')$  系を考へ、之に對して等角點  $J, J'$  を原點とする座標系を  $(x, y); (x', y')$  系とし之等兩種の座標系の關係を示す諸量を圖の通りとする。

圖-16. 任意の座標系による 2 面の對應狀況



$$\left. \begin{aligned} \text{然らば} \quad & x' = X' \cos k' - Y' \sin k' + x_c' \\ & y' = Y' \cos k' + X' \sin k' + y_c' \\ & X = x \cos k - y \sin k + X_c \\ & Y = y \cos k + x \sin k + Y_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

となるから之等の値を  $x = \frac{x' H'}{f' - y'}$ ,  $y = \frac{y' H'}{f' - y'}$  なる變換式に代入すれば  $(X, Y)$  と  $(X', Y')$  系の變換式として、

$$X = \frac{a_1 X' + b_1 Y' + c_1}{a_0 X' + b_0 Y' + 1}, \quad Y = \frac{a_2 X' + b_2 Y' + c_2}{a_0 X' + b_0 Y' + 1} \dots \dots \dots (2) \text{ を得る。}$$

但し

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{\sin k'}{f' - y_c'}; & b_0 &= \frac{\cos k'}{f' - y_c'} \\
 a_1 &= +\frac{H' \cos(k+k') - X_c \sin k'}{f' - y_c'}; & a_2 &= \frac{H' \sin(k+k') - Y_c \sin k'}{f' - y_c'} \\
 b_1 &= -\frac{H' \sin(k+k') + X_c \cos k'}{f' - y_c'}; & b_2 &= +\frac{H' \cos(k+k') - Y_c \cos k'}{f' - y_c'} \\
 C_1 &= +\frac{H'(x_c' \cos k - y_c' \sin k)}{f' - y_c'} + X_c; & C_2 &= \frac{H'(y_c' \cos k + x_c' \sin k)}{f' - y_c'} + Y_c
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

即ち(2)式には $a_0, b_0$ —合計8個の未定係数があり、之を定めるには(2)式に準ずる8個の方程式を必要とする。然るに一基準點に就ては其の點の平面座標  $X, Y$  に就ては2個づつの方程式を作れるから4基準點があれば8個の方程式が得られて變換式が定る。次に圖-16 から判る様に  $(X_c, Y_c), (x_c', y_c')$  は等角點の位置を決定し、 $k, k'$  は  $y$  軸即ち最大傾斜線の方を決定し、 $f', H'$  は既述の様に投影中心を決定する。之等の量も亦合計8個存在し而も(3)式は8方程式から成るから  $a_0, b_0$  等が定まれば(3)によつて  $x_c', y_c'$  等を決定出来る。依つて原板及基準點圖上に於て等角點及び最大傾斜線の方を決定し、之等が對應する様に偏歪修正機を操作すれば正しい偏歪修正を行ふ事が出来る。或は又寫眞機の  $f$  を既知と考へ、 $J'$  の位置或は  $f$  から  $v$  を求め又  $H'$  から  $H$  を求め4章の公式に従つて偏歪修正諸元を求めると考へても良い。ともあれ、4基準點があれば偏歪修正條件は決定される。

又8個の量の内  $x_c', y_c', k'$  は原板の位置を限定し、 $f', H'$  は投影中心の位置を決定し残3量  $X_c, Y_c, k$  は投影板上の基準點圖の位置を決定する。然るに偏歪修正機としては原板と投影中心の位置だけを決定すれば充分であるから偏歪修正機の自由度は5個で充分である。而して實際の偏歪修正機に於ては投影板上に於て基準點圖を手動で前後左右に動かし又回轉し得る事によつて残3個の自由度も暗黙の内に満してゐるのである。此の意味に於て偏歪修正機は8個の自由度を要するといつても必ずしも誤ではない。事實又手動でなく機械的に基準點圖を移動する事にすれば8自由度を要するのである。

猶多少蛇足の感はあるが  $a_0, b_0 \dots$  から  $x_c', y_c' \dots$  を求める計算式を次に掲げておく。

$$\left. \begin{aligned}
 \tan k' &= \frac{a_0}{b_0}; & f' - y_c' &= -\frac{\sin k'}{a_0} = -\frac{\cos k'}{b_0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \\
 X_c &= \frac{a_0(a_1 - b_2) + b_0(a_2 + b_1)}{a_0^2 + b_0^2}; & Y_c &= \frac{a_0(a_2 + b_1) - b_0(a_1 - b_2)}{a_0^2 + b_0^2} \\
 \tan(k+k') &= \frac{a_0(b_0 a_1 - a_0 b_1) - b_0(a_0 b_2 - b_0 a_2)}{b_0(b_0 a_1 - a_0 b_1) + a_0(a_0 b_2 - b_0 a_2)} \\
 H' &= \frac{a_0(b_0 a_1 - a_0 b_1) - b_0(a_0 b_2 - b_0 a_2)}{\sin(k+k')} (f' - y_c')^2 = \frac{b_0(b_0 a_1 - a_0 b_1) + a_0(a_0 b_2 - b_0 a_2)}{\cos(k+k')} (f' - y_c')^2 \\
 x_c' &= [(c_1 - X_c) \cos k + (c_2 - Y_c) \sin k] \frac{f' - y_c'}{f'} \\
 y_c' &= [(c_2 - Y_c) \cos k - (c_1 - X_c) \sin k] \frac{f' - y_c'}{H'}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

9. 等角點の不變性

次に之は補足的事項ではあるが從來言はれてゐない事項即ち、數學的に見た時の偏歪修正の無限大の可能性に於て等角點は常に一定不變であるといふ事を證明してみる。即ち圖-17 に於て圖-3 の凡ての記號を踏襲し、更に  $O, O'$  を地上並に畫面主點、 $N, N'$  を地上並に畫面鉛直點、 $J, J'$  を同じく等角點とし、又面 III に對しても  $S'$  に基いて新に主點  $O_2, O_2'$ ; 鉛直點  $N_2, N_2'$  を考へる。然らば  $O_2', N_2'$  は其  $O', N'$  と一致せぬ事は明かであるが等角點  $J'$  は依然として等角點として殘存するものである。此の事實の證明は次の様になる。即ち、

$S'$  と  $J'$  を結び、原投影關係 I, II に於て  $\triangle FSJ'$  を考へれば、

$$\angle FJ'S = \angle FN'S + \angle N'SJ' = \left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) + \frac{\nu}{2} = \frac{\pi - \nu}{2}$$

又 
$$\angle FSJ' = \angle O'SF + \angle O'SJ' = \left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) + \frac{\nu}{2} = \frac{\pi - \nu}{2}$$

$$\therefore \angle JJ'S = \angle FJ'S \text{ 従つて } FJ' = FS$$

然るに作圖により  $FS' = FS'$  であるから  $\triangle FJS'$  は二等邊三角形となる。

次に  $\angle O_2'S'J'$  と  $\angle J'S'N_2'$  とを比較すると

$$\angle O_2'S'J' = \angle FJS' - \angle FS'O_2' = \angle FJS' - \left(\frac{\pi}{2} - \nu'\right)$$

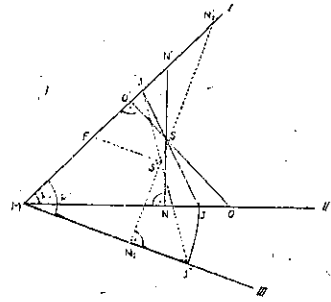
又 
$$\angle J'S'N_2' = \angle FJ'S - \angle FN_2'S' = \angle FJ'S - \left(\frac{\pi}{2} - \nu'\right)$$

然るに  $\triangle FJS'$  は二等邊三角形であるから

$$\angle FJS' = \angle FJ'S \quad \therefore \angle O_2'S'J' = \angle J'S'N_2'$$

即ち  $J'$  は新投影關係に於ても依然として等角點である。勿論等角點の他にも  $F, M$  が不動點である事は圖から直に判る事であるが、實際的には之等は共に極めて遠方にある爲に等角點が最も考へ易い。尙注意すべき事は撮影の場合には  $SO'$  は光軸となるが偏歪修正の場合の様に  $H$  が數百千米とならず  $f$  と同程度である場合には  $SO'$  も  $S'O_2'$  も  $S$  或は又  $S'$  も一般には投影レンズの光軸とは一致せず數學的量たる主軸 (Principal Axis) であるにすぎぬ。

圖-17. 等角點の不変性



### 10. 5 mm 方眼板による實驗 I

以上によつて偏歪修正に關する從來の疑義を大體明かにする事が出来たと思ふ。其處で次には偏歪修正機の實際的な機能を調べる爲に先づ 5 mm. 方眼板を使用して種々の投影條件下に於ける投影像の偏歪を調べてみた。其の投影條件は表-1 の通りであり之に使用した器材はツアイス製の自動偏歪修正機 SEGI 型である。

表-1. 5 mm 方眼板による偏歪修正

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
投影板 傾斜角	0°	-	-	36°	-	-	-	-	-	-
レンズ向	30°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
傾斜角大	18°	24°	-	18°	-	-	-	24°	-	-
横移動量	0	0	35	0	35	0	35	0	35	35
縦移動量	0	0	35	0	0	+35	+35	0	0	0
投影像 概況										

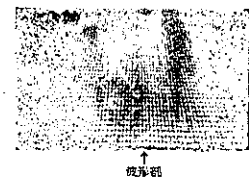
以上の結果を吟味すると大體次の様な事柄が見出される。

(a): 1. 2. 3 上の任意の方眼線に定規をあてゝみると線の太さ以下の精度で直線になつて居り投影レンズは實用的には無歪像と判定される。

(b): 1. 2. 3 を交互に重ね合せてみると最長邊長に於ても 0.2 mm 以内の精度で良く一致してゐる事を見出し得る。之によつて既述の通り原板と投影面が平行な場合には  $e, g$  によつて何等の變化を生じない事を實證し得た。

(c): 1. 2. 3 に於ては各直線は露光時に於ける印畫紙の凹凸に基因する變形を示してゐないに反し、4. 5. 6 等では相當著しい波形を示して最大 1 mm 以上の變形を示してゐるものもあり、壓定法の不完全が斜寫眞に及ぼす悪影響を明示してゐる。此の凹凸が横線に於て著しく表れてゐる事は縦線が投影板の最大傾斜線と平行であり、而も直線の何の部分をとつても同様であるから假令偏歪してゐても目立たないのであつて、實際には横線と同様な偏歪が生じてゐるのである。尙此の場合注意すべき事は横線の波形部の焦點外れは餘り甚しくないものであるから斜寫眞の偏歪修正に於て多少とも像がぼやけてゐるならば相當大きな投影誤差が起つてゐると考へなければならぬ事を示してゐる。

圖-18. 印畫紙の凹凸による投影像の歪 (投影板の傾斜 30°, 實物の約 1/4)



(d): 4~7 の横線が一樣に樽型收差に似た變形を示してゐる (但し梯形の下部に於て著しい) ので其の原因が印畫紙壓定法の不完全に基く左右兩端の捲れ上りに起因するか否かを點檢する爲

に其の後 4 と同一条件の下に乾板、水浸し印畫紙を用ひて露光してみた處乾板に於ても長さ 290 mm の横線に於て中央部の偏位が約 0.5 mm の弧形をなす事が確認され印畫紙の壓定法不完全にのみ由來するものではない事が明かとなつた。遺憾ながら現在の處其の原因を充分詳にし得ない状態にあるが恐らくは投影板が斜になつてゐる爲に本來光軸に直交する平面に對して最も良く收差を消去してあるレンズの殘存球面收差等が出て來たのではないかと考へてゐる。横線の左右兩端が多少ぼやけてゐる事は之に對する一證と考へて良い様である。何れにせよ之に對する對策はレンズの改造による以外當分望はないものと考へられるから斜寫眞の用途(精度)に一定の限界を與へる事になるであらう。

(e), (c) に於て述べた壓定法の不良を避ける爲には (1): 印畫紙を硝子板の下に壓定する。(2) 露光前に豫め印畫紙を水浸しにして投影板上に貼付けて露光する。といふ方法を驗してみた處結果は良好であつて兩者共に殆んど波形を認めえず僅かに極く小部分に 0.2 mm 前後の偏移を認め得たにすぎぬ。但し兩者の中では (2) の方が誤差が少い事は豫期した通りであるが之によると印畫紙が乾燥後には表-2 に示す通り甚しく收縮した。

表-2.

	硝子板 壓定	水 浸 し
縦收縮率	0.5/170=0.0029	1.0/170=0.0059
横收縮率	1.2/300=0.0040 及び 0.6/190=0.0032 平均 0.0036	6.5/290=0.0224 及び 4.0/185=0.0216 平均 0.022

上表の測定單位は mm. で乳劑膜面を下に向けて露光した乾板と比較したものである。尙收縮度測定の精度を 0.1 mm とすれば收縮率の小數點以下 4 桁目は無意味であるが參考の爲掲げた。又横收縮率の平均では長い部分では多少像がぼやけてゐるから之を考慮して單に算術平均を行つた。表-2 によつて水浸しにしたものは濕潤時に相當一方向にだけ伸びてゐる事が伺はれる。尙水浸法は獨逸あたりでは標準的一方法となつてゐるらしいが獨逸では水洗の最後に少量のグリセリンを混じた水を通して印畫紙が乾かぬ内に片端から貼つてゆくので此の場合と少し違つてゐる。尙本試験に使用した印畫紙は國産の特殊印畫紙である事を附言する。

(f) 4.5 或は 6.7 を重ね合はせ横移動量 35 mm 即ち 7 方眼横にづらせると印畫紙の凹凸に基く誤差の範圍内に於て各格子線が重り合ひ又 4, 6 或は 5, 7 に於ても前後に 35 mm. 移動すれば同様に重り合ふ事が實證され、原板の縦横の移動によつては圖-15 に示す様な中心投影的偏形以外には何も起らぬ事が證明された。

(g) 4 と 5 或は 6 と 7 の對應する横線の長さを比べると誤差の範圍内に於て良く一致して居り横方向の移動によつて梯尺變化を生じてゐない事が明かとなり而も一方に於て對應する縦線の横線となす角度は相當變化してゐるから既述の通り平行四邊形を同じ高さと同邊長を持つ矩形に變化し得る事を確認出來た。本例に於ける變化は表-3 の通りである。

表-3.

寫 眞	右 端 線	左 端 線
(4)	69°5	69°0
(5)	74°0	65°1
(6)	69°0	69°5
(7)	64°5	74°0

差 +4°5  
差 -3°9  
差 +4°5

11. 5 mm 方眼板による實驗 II

最後に理論的立場を離れて實際的に偏歪修正の精度を點檢してみたが之を現地に就て直接試験する代りに前節の實驗に用ひた方眼板を利用して最高精度を試験してみた。即ち 5 mm 方眼方眼板を普通の複寫機で約 4/5 に縮寫し、之を S. E. G. I 型偏歪修正機にかけて偏歪修正し之と原方眼板と比較した、但し複寫に際しては方眼板が嚴密に對稱的でないのと後段の點檢を容易確實にする爲に裏面から硝子(厚さ約 1.5 mm)を通して複寫した。複寫用レンズは Protar  $f=25$  cm で實用的に無歪像とみなされる。又複寫機を傾ける事は困難であつたから方眼板の一端に高さ約 2 cm の枕を入れて之を傾けて撮影した。従つて一樣に傾いた平坦面に對する場合とも考へる事

が出来る。もつとも複寫機は嚴密に調整したわけではないから撮影方向は多少曲つてゐたものと考へられる。尙複寫機の主點は定めてない。

偏歪修正の結果は膜面を下に向けて乾板に露光したものは圖-20 に示す通り 275 mm×215 mm の方眼板(實線)に於て中央の長邊 501 を合せると 4 隅の各點 1~8 は圖の様に偏位する(點線)。但し點線の外側の矢印と數字は其の方向に於ける誤差を表すものである。又此の矩形内に 5 mm 毎に引いてある方眼線は逐次連続的に偏位し局部的不整を示してゐない。尙又 2 3 4 の線に沿つて多少樽型變形らしいものが認められるが其の他には無い。

此の實驗によつて偏歪修正は基準點の測定と寫眞上の確認さへ確實ならば少くも 0.2 mm の精度は保ち得る事を確信し得た。但し本實驗に使用した方眼線は太さが 0.05 mm 位の細い線で暗室内で見ると甚だ困難であつた。又偏歪修正の基準點としては原方眼板を使用したが餘り線が細過ぎて暗室では見へない爲に 0, 2, 4, 6, 8 等に太さ 0.3 mm 位の十字線を墨書し之によつて標定した。従つて投影像が此の太い線内に入つてしまふと其れ以上の判定は中々に困難となり之が誤差の一主要因となつてゐると考へられる。偏歪修正の結果は最大誤差の場所でも此の線を外れる事はなかつた。尙此の實驗結果が最高精度を示すものではなく時間さへかければ更に良精度を得られるものであつて、先づ實用的最高精度と考へれば良いであらう。

最後に本實驗に關聯して行つた 2 種の國産印畫紙の收縮率を報告する。此の中 A は 10 章の實驗に使用したものである。

表-4.

		横 收 縮 量			平均收縮率		縦 收 縮 量			平均收縮率	
A	1. 硝子板壓定	2.4	2.4	2.3	2.35/275	0.00855	2.1	2.0	1.9	2.0/215	0.00931
	2. 水浸し	3.9	3.7	3.6	3.73/275	0.0136	6.2	5.9	5.7	5.93/215	0.0276
B	1. 硝子板壓定	1.75	1.8	1.9	3.81/275	0.0139	3.1	3.0	3.1	3.07/215	0.0143
	2. 水浸し	3.2	3.1	3.1	3.13/275	0.0114	6.5	6.5	6.5	6.5/215	0.0303

但し A-2 は横下線を合はせた場合中央縦線が 215 mm の末端でシャープ的に 0.2 mm 程横に偏位してゐた。其の他には問題にする程の誤差は起らなかつた。

表-4 に於て A の方が B よりも縦横の收縮率差が一様に少く其の絶對値も亦小さい事は注目す可き事である。特に A-1 の場合には 1/1000 以下の精度で大體一樣な收縮をしてゐると見て良い。唯だ寫眞測量の立場から言へば更に其の收縮率自身を小さくしなければならぬものである。

尙印畫紙、フィルム等の伸縮は偏歪修正のみならず寫眞測量全般の精度に決定的影響を與へるものであるから何れ一括して報告する機会があると思つてゐる。現在迄では邦文では昭和 13 年 10 月の寫眞月報に“しんき生”の名で廣汎な測定結果が出てゐるから參照願ひたい。

### 12. ピタゴラス反比例機の作動機構

5 章の説明と關聯して偏歪修正機の自動焦點裝置の重要部門なるピタゴラス反比例機(Pythagoras Inversor)の機構に就ては種々の説明がある<sup>3)</sup>が之等は皆一見完全な説明を行つてゐるにも抱らず其の作動機構に就て考へてみると不分明な點が少くなかつた。幸之に對する解答が出来たので寫眞測量關係者の思考を軽減する爲に述べておく。解つて了へば眞に他愛のないものである。

今圖-21 の偏歪修正機に於て B 點を A 點に鮮明に投影する爲にはレンズ公式に従つて

圖-19. 偏歪修正試驗に使用した縮寫方眼板(單位 mm)

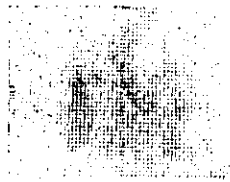
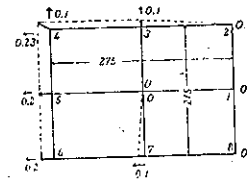


圖-20. 5 mm 方眼板による偏歪修正の結果(單位 mm)



<sup>3)</sup> Gruber 前掲書 S. 345.

$$\frac{1}{c \sin \gamma} + \frac{1}{d \sin \gamma} = \frac{1}{f} \dots\dots\dots (1) \quad \text{でなければならぬ。}$$

其處で  $c' = c - f \sin \gamma$ ,  $d' = d - f \sin \gamma$ ,  $f' = f / \sin \gamma$  とおけば

上式は  $c'd' = f'^2 \dots\dots\dots (2)$  となる。

更に  $2p = c' + d'$ ,  $2q = c' - d'$  とおけば

(2) 式は  $p^2 - q^2 = f'^2 \dots\dots\dots (3)$

となり直角三角形のピタゴラスの定理と同形になる。

此の原理を利用する反比例機の構造は圖-22 の様になりレンズ傾斜角  $\gamma$  の變化による  $f'$  の調整は圖-23 の様になる。兩圖に於て共に M が構造の原點であり A, S, B 等に見られる  $\ominus$  或は  $\oplus$  の様な符號は滑動部を示す。

今或る状態 ( $p_1, q_1, f_1'$ ) に於て正しい投影が行はれてゐるものとし、レンズ傾斜  $\gamma$  を變化して新しい状態 ( $p_2, q_2,$

圖-21. ツァイス製の莖型偏歪修正機の機構要圖

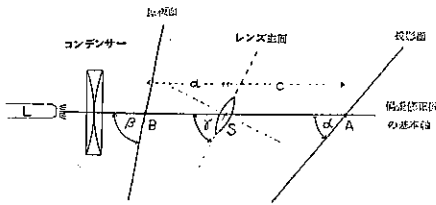


圖-22. ピタゴラス反比例機の機構

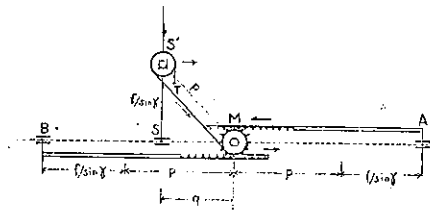
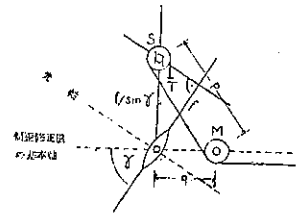


圖-23. レンズ傾斜に伴ふ自動焦點装置



$f_2')$  となつたとする。此の場合  $f'$  は圖-23 の機構によつて制御されて定まるから問題はないが、 $p, q$  を決定するものは何であらうか。今迄の所説では公式 (3) 以外には與へられてゐないが之では 2 個の變量  $p, q$  に對して一個の條件

$$p_2^2 - q_2^2 = f_2'^2 \dots\dots\dots (4) \quad \text{だけが與へられるわけであるから } p_2, q_2 \text{ の何れか } \delta$$

不定となる。其處で一考を要する次第になるのだが實は之には偏歪修正機の機械的構造によつて更に一個の條件が追加せられるのである。即ち實際の偏歪修正機では通常投影板 A は固定されて動かさず M から左側だけが動き而も S は螺桿によつて適當な高さを與へる装置になつてゐるが原板架 B はカウンター

バランスの作用で平衡的に支へられてゐるだけで其の位置は反比例機的作用によつて常に鮮明な焦點を結ぶ様に制御されてゐるのである。従つて今の様にレンズの傾斜角を變化しただけでは S は不變であるから此處に

$$AS \equiv p_2 + q_2 + f + f_2' = \text{不變} (= p_1 + q_1 + f_1') \dots\dots\dots (5) \quad \text{といふ今一個の條件が出て來て (4) と (5) によつて } p_2 \text{ と } q_2 \text{ 即ち B の位置が定まるのである。念の爲此の間の變化を計算すると次の様になる。}$$

今  $p_2 = p_1 + \delta p$ ;  $q_2 = q_1 + \delta q$ ;  $f_2' = f_1' + \delta f'$  とすれば

(4) から  $(p_1 + \delta p)^2 - (q_1 + \delta q)^2 = (f_1' + \delta f')^2$  或は

$$2p_1 \delta p - 2q_1 \delta q + \delta p^2 - \delta q^2 = 2f_1' \delta f' + \delta f'^2 \dots\dots\dots (6)$$

(5) から  $\delta p + \delta q = -\delta f' \dots\dots\dots (7)$

(6), (7) を解けば  $\delta p = \frac{f_1'^2 + 2(f_1' - q_1)\delta f' + 2\delta f'^2}{2(p_1 + q_1 - \delta f')}$   $\delta q = -\frac{f_1'^2 + 2(f_1' + p_1)\delta f'}{2(p_1 + q_1 - \delta f')}$  となる。

投影倍率を變化する場合には夫々 AS が與へられるのであるから其れに應じて條件が出て來るわけである。併し實際の問題としては反比例機を正しく作つておきさへすれば全部自動的に事が運ぶのである。

終に本稿に就ては中島部長閣下、池田科長殿、撰班長殿をはじめ地形科寫眞室の方々特に田中平八氏と中村耕作氏の御厄介になり附圖は凡て川田博三氏を煩はした。末筆ながら厚く御禮申上げる。