

論 說 報 告

第 26 卷 第 4 號 昭 和 15 年 4 月

相對 2 邊が單純支承他の 2 邊が自由なる矩形版の振動に就て

會 員 工 學 博 士 井 口 鹿 象*

要旨 本文は表題に示す如き境界條件を有する彈性矩形平面版の固有振動，周期的變化を爲す部分的等布荷重に因る強制振動並に兩振動の重合より生ずる合成振動に就き理論的解説を爲し，諸種の數値計算例に依て其の力學的性質を明かにせむとするものである。

1. 序 説

相對する 2 邊が單純に支承せられ，他の 2 邊が自由なる矩形平面版は，構造上から言へば極めて單純であつて，其の利用範圍も或る種の構造物の簡單なる一部分として存在するに過ぎない様である。又之れを彈性力學上より見るも，相對 2 邊が單純支承であることから，所謂 Levy の代置法に依て比較的容易に解き得る種類のものである。然るに他の相對 2 邊が常に無應力の状態に在り，且つ其の上下の方向に於ける彈性變位が，各邊端を不動點として全く自由である爲めに，各種の力學的性質就中其の挫屈並に振動状態に於て他の矩形版と幾分趣を異にする所があるから，之れに關する力學的諸現象を明かにし，之れを他の類似の構造物と比較研究することは，理論的にも又實際的にも極めて重要なことと信ずるのである。依て筆者は以下其の一例として，此の種の版の固有振動並に強制振動に就ての理論的並に數值的解説を試みんとする次第である。

本文中公式誘導に關する途中の計算は大部分省略してある。之れは筆者の既に發表せる他の論文と大同小異であるからであつて，詳細は是等の論文¹⁾を通讀することに依て諒解することが出来ると思ふ。

2. 基本解説

餘弦函數的變化を爲す外力を受ける薄い彈性版の振動は一般に次の如き微分方程式で表はすことが出来る。

$$\Delta \Delta W + \frac{\rho h}{N} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{q}{N} f(x, y) \cos pt \dots \dots \dots (I)$$

上式中， Δ は Laplace Operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ， W は任意の點 (x, y) の t 時刻に於ける撓み， h は版の厚さ， ρ は其の密度， p は餘弦函數的變化を爲す外力の circular frequency， q は定數， $f(x, y)$ は外力の版面に於ける分布状態を表はす或る函數， N は版の剛度，即ち E を其の Young 率， ν を Poisson 比とすれば， $N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ で表はされるものである。

* 北海道帝國大學教授

1) S. Iguchi: "Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte", Ing.-Arch. Berlin 8 (1937) S. 11-25.

"Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte", Mem. Fac. Eng., Hokkaido Imp. Univ. 4 (1938) S. 305-372.

"Die Knickung der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte durch Schubkräfte", Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 20 (1938) S. 814-832.

今微分方程式

$$\Delta \Delta W_1 + \frac{\rho h}{N} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

及び

$$\Delta \Delta W_2 + \frac{\rho h}{N} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} = \frac{q}{N} f(x, y) \cos pt \quad \dots\dots\dots (b)$$

の解として夫々

$$W_1 = W_1' \cos \omega t \quad \text{及び} \quad W_2 = W_2' \cos pt \quad \dots\dots\dots (2)$$

を得たものとすれば、原式 (1) の一般解は

$$W = W_1 + W_2 = W_1' \cos \omega t + W_2' \cos pt \quad \dots\dots\dots (3)$$

で表はすことが出来る。但し W_1' , W_2' は變數 x, y のみの函數で、(2) の關係を夫々 (a) 及び (b) 式に代入し得べき

$$\Delta \Delta W_1' - \frac{\rho h}{N} \omega^2 W_1' = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

及び

$$\Delta \Delta W_2' - \frac{\rho h}{N} p^2 W_2' = \frac{q}{N} f(x, y) \quad \dots\dots\dots (5)$$

で定義さるべきものである。

斯様にして本問題は、與へられたる版 (圖-1) の境界條件、即ち

第 1 自由邊に於ける曲げモーメントと反力とは消失する、従つて

$$\left. \begin{array}{l} \text{a). } \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ \text{b). } \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{array} \right\} x=0 \text{ 及び } x=a \text{ に対して}$$

第 2 支承邊に於ける撓みと曲げモーメントとは消失する、従つて

$$\left. \begin{array}{l} \text{c). } W = 0 \\ \text{d). } \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right\} y=0 \text{ 及び } y=b \text{ に対して}$$

を満足する様な (4) 及び (5) の解式を求めることに歸着した譯である。上記 W に對する境界條件は、 W の一部分たる W_1, W_2 、従つて W_1', W_2' に付ても満足せらるべき要件であることは (3) 式の關係から了解することが出来る。

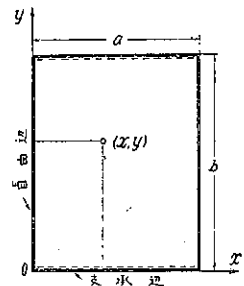
3. 固有振動 W_1

微分方程式 (4) の解たる W_1' を含む (2) の第一式 W_1 は、版の固有振動を示し、其の circular frequency は ω で表はされてゐる。 W_1 は固有値 ω と之れに對應する固有函數 W_1' とに依て決定されるから、先づ (4) 式を解いて W_1' を求める必要がある。

i) 微分方程式 (4) の解

途中の計算を省略し、便宜上

圖-1. 版と座標軸



$$\mu = \frac{\omega a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{N}} \quad (\text{不名數}),$$

$$\lambda_n = \sqrt{\mu + \frac{a^2}{b^2} n^2} \begin{cases} \lambda'_n = \sqrt{\mu - \frac{a^2}{b^2} n^2} & (\mu > \frac{a^2}{b^2} n^2 \text{ のとき}) \\ \bar{\lambda}'_n = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} n^2 - \mu} = \sqrt{-1} \lambda'_n & (\mu < \frac{a^2}{b^2} n^2 \text{ のとき}) \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

と置けば、(4)の一般解は次の式で表はすことが出来る。

$$W_1' = \frac{qa^4}{2N\pi^2\mu n} \left[a_n \left\{ \left(\frac{b^2\lambda'^2_n + 1}{\nu a^2 n^2} \right) \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n (1-2\xi)}{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n} + \left(\frac{b^2\lambda_n^2 - 1}{\nu a^2 n^2} \right) \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_n (1-2\xi)}{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_n} \right\} \right. \\ \left. + a'_n \left\{ \left(\frac{b^2\lambda'^2_n + 1}{\nu a^2 n^2} \right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n (1-2\xi)}{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n} + \left(\frac{b^2\lambda_n^2 - 1}{\nu a^2 n^2} \right) \frac{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_n (1-2\xi)}{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_n} \right\} \right] \sin \pi \eta \gamma \dots\dots\dots (7)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{a}, \quad \eta \equiv \frac{y}{b} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

但し $\mu < \frac{a^2}{b^2} n^2$ に對しては、上式中の λ'_n を含む項は夫々

$$\lambda'^2_n = -\bar{\lambda}'^2_n, \quad \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_n (1-2\xi)}{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_n} = \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \bar{\lambda}'_n (1-2\xi)}{\cosh \frac{\pi}{2} \bar{\lambda}'_n}, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_n (1-2\xi)}{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_n} = \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \bar{\lambda}'_n (1-2\xi)}{\sinh \frac{\pi}{2} \bar{\lambda}'_n}$$

とすべきである。(7)式は既に夫れ自身境界條件 a), b), c), d) を満足してゐる。依て2つの積分定數 a_n, a'_n は残りの條件 b) に依て關係付けられるもので、運算の結果次の式を得る。

$$a_n \left\{ \left(\frac{b^2\lambda'^2_n + 1}{\nu a^2 n^2} \right) \lambda_n \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n + \left(\frac{b^2\lambda_n^2 - 1}{\nu a^2 n^2} \right) \lambda'_n \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_n \right\} \\ \pm a'_n \left\{ \left(\frac{b^2\lambda'^2_n + 1}{\nu a^2 n^2} \right) \lambda_n \coth \frac{\pi}{2} \lambda_n + \left(\frac{b^2\lambda_n^2 - 1}{\nu a^2 n^2} \right) \lambda'_n \cot \frac{\pi}{2} \lambda'_n \right\} = 0 \dots\dots\dots (a)$$

此の式は $a_n=0, a'_n=0$ ならば満足されるが、此の場合 W_1' は x, y の如何に拘らず零となるから之れを除外視すれば (a) 式より次の如き條件式が得られる。

第1. $a_n \neq 0$ より

$$\frac{\lambda_n \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n}{\lambda'_n \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_n} + \left(\frac{\lambda^2_n - \frac{\nu a^2}{b^2} n^2}{\lambda'^2_n + \frac{\nu a^2}{b^2} n^2} \right)^2 = 0, \quad (\mu > \frac{a^2}{b^2} n^2 \text{ のとき}) \dots\dots\dots (8a)$$

$$\frac{\lambda_n \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n}{\bar{\lambda}'_n \tanh \frac{\pi}{2} \bar{\lambda}'_n} - \left(\frac{\lambda^2_n - \frac{\nu a^2}{b^2} n^2}{\bar{\lambda}'^2_n - \frac{\nu a^2}{b^2} n^2} \right)^2 = 0, \quad (\mu < \frac{a^2}{b^2} n^2 \text{ のとき}) \dots\dots\dots (8b)$$

第2. $a'_n \neq 0$ より

$$\frac{\lambda_n \coth \frac{\pi}{2} \lambda_n}{\lambda'_n \cot \frac{\pi}{2} \lambda'_n} - \left(\frac{\lambda^2_n - \frac{\nu a^2}{b^2} n^2}{\lambda'^2_n + \frac{\nu a^2}{b^2} n^2} \right)^2 = 0, \quad (\mu > \frac{a^2}{b^2} n^2 \text{ のとき}) \dots\dots\dots (9a)$$

$$\frac{\lambda_n \coth \frac{\pi}{2} \lambda_n}{\lambda'_n \coth \frac{\pi}{2} \lambda'_n} - \left(\frac{\lambda_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2} n^2}{\lambda'^2_n - \frac{\nu a^2}{b^2} n^2} \right)^2 = 0, \quad \left(\mu < \frac{a^2}{b^2} n^2 \text{ のとき} \right) \dots\dots\dots (9b)$$

是等の式は所謂固有振動の周期方程式 (frequency equation) であつて、其の根 μ は即ち固有値に外ならない。
 μ 従つて ω が分れば、當然振動數 $f(=\omega/2\pi)$ も振動周期 $T(=2\pi/\omega)$ も容易に算定することが出来る。

今 (7) 式に就て見るに

$$\left. \begin{aligned} \cosh \lambda_n & \left\} \frac{\pi}{2} (1-2\xi) = \frac{\cosh \lambda_n}{\cos \lambda'_n} \left\} \frac{\pi}{2} (1-2(1-\xi)) \\ \cos \lambda'_n & \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sinh \lambda_n & \left\} \frac{\pi}{2} (1-2\xi) = \frac{-\sinh \lambda_n}{-\sin \lambda'_n} \left\} \frac{\pi}{2} (1-2(1-\xi)) \\ \sin \lambda'_n & \right. \end{aligned} \right\}$$

なる關係があるから、版の振動面が中心線 $\xi=1/2$ に對して正對稱的²⁾なるか、若くは逆對稱的なるかに従つて W_1' は係數 a_n 若くは a'_n を含む項のみに依て決定せられることが分る。換言すれば、中心線 $\xi=1/2$ に對して正對稱的なる振動 (以下之れを第1振動系と呼ぶ) に對しては

$$\left. \begin{aligned} W_1' &= \frac{qa^4}{N\pi^3} a_n \bar{W}_1', \quad \bar{W}_1' = \frac{u_n(\xi)}{2n\mu} \sin n\pi\eta, \\ u_n(\xi) &= \left(\frac{b^2 \lambda'^2_n}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n (1-2\xi)}{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n} + \left(\frac{b^2 \lambda^2_n}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_n (1-2\xi)}{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

逆對稱的なる振動 (以下之れを第2振動系と呼ぶ) に對しては

$$\left. \begin{aligned} W_1' &= \frac{qa^4}{N\pi^3} a'_n \bar{W}_1', \quad \bar{W}_1' = \frac{v_n(\xi)}{2n\mu} \sin n\pi\eta, \\ v_n(\xi) &= \left(\frac{b^2 \lambda'^2_n}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n (1-2\xi)}{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n} + \left(\frac{b^2 \lambda^2_n}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_n (1-2\xi)}{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

が成立し、且つ前者に對しては條件式 (8a) 又は (8b) が、後者に對しては (9a) 又は (9b) が對應することとなる。

固有値 μ は n の函數であることは勿論である。又一定の n に對する (8a) 又は (9a) の根は數限りなくある。故に μ は一般に $\mu_{in}(i=0, 1, 2, \dots, n=1, 2, 3, \dots)$ で表はされ、之れに對應する $\omega, \lambda_n, \lambda'_n, a_n, a'_n$ 等も夫々 $\omega_{in}, \lambda_{in}, \lambda'_{in}, a_{in}, a'_{in}$ 等で表はするのが便利である。又各固有値 μ_{in} には必ず之れに對應する固有振動 $W_1' \cos \omega_{in} t$ が存在する。故に固有振動の最も一般的な形態は、是等各個振動の重合より生ずる

$$W_1 = \frac{qa^4}{2N\pi^3} \sum_i \sum_n \frac{1}{n\mu_{in}} \left\{ \begin{aligned} a_n u_{in}(\xi) \\ a'_n v_{in}(\xi) \end{aligned} \right\} \cos \omega_{in} t \sin n\pi\eta \dots\dots\dots (12)$$

で表はされる筈である。茲に $a_n u_{in}(\xi)$ は第1振動系に、 $a'_n v_{in}(\xi)$ は第2振動系に對應することは言を要しない。(12) 式には尙ほ未定係數 a_n 又は a'_n が含まれてゐるが、是等は後に示す如く、固有振動と強制振動との合成 $W = W_1 + W_2$ に對する初始條件より定められるものである。

2) 便宜上版の中心線に關して對稱的位置に在る2點の撓み W_1' が等値同符號なるとき之れを正對稱、等値異符號なるとき之れを逆對稱と呼ぶこととする。

公式 (10), (11) 又は (12) 中の ξ の函数は $\sin m\pi\xi$ に關する Fourier 級數として展開することが出来る。途中の計算を省略し, (12) 式に就て計算せる結果は次の如し。

$$W_1 = \frac{4qa^4}{N\pi^3} \sum_i \sum_m \sum_n \frac{a_{im}}{a'_{in}} \left. \begin{aligned} & \Phi_{imn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \cos \omega t \\ & \Phi_{imn} = \frac{m \left(\frac{b^2 m^2}{\nu a^2 n^2} + \frac{2}{\nu} - 1 \right)}{n(m^2 + \lambda'^2_{in})(m^2 - \lambda'^2_{in})} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

但し第1振動系に對しては係數は a_{im} を, m は奇數 1, 3, 5... を採用し, 第2振動系に對しては a'_{in} 及び $m = 2, 4, 6...$ を採用すべきである。

振動面の正對稱性及び逆對稱性が x -軸の方向に考へらると同様に, y -軸の方向にも考へられることは論を俟たない。即ち

$$\sin n\pi\eta = \begin{cases} \sin n\pi(1-\eta), & n=1, 3, 5\dots \text{に對して} \\ -\sin n\pi(1-\eta), & n=2, 4, 6\dots \text{に對して} \end{cases}$$

なることより, 公式 (7), (10)~(13) に依て示される振動面 W_1 は, n が奇數なるか偶數なるかに従つて版の中心線 $\eta=1/2$ (又は y -軸の方向) に正對稱的又は逆對稱的となることが分る。

ii) 固有値 μ_{in} の計算

周期方程式の根は圖式解法に依て見出すのが便利である。例へば (8a) に對しては, λ'_{in} を變數とする2つの曲線

$$\zeta_1 = \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{in}, \quad \zeta_2 = \frac{-\lambda'_{in}}{\sqrt{\lambda'^2_{in} + \frac{2a^2}{b^2} n^2}} \left\{ \frac{\lambda'^2_{in} + (2-\nu) \frac{a^2}{b^2} n^2}{\lambda'^2_{in} + \frac{\nu a^2}{b^2} n^2} \right\}^2 \tanh \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda'^2_{in} + \frac{2a^2}{b^2} n^2}$$

の交點に對應する λ'_{in} の値を求むれば, 固有値 μ_{in} は

$$\mu_{in} = \lambda'^2_{in} - \frac{a^2}{b^2} n^2$$

より算定することが出来る。各固有値 μ_{in} の内實用上最も重要なものは其の最小値即ち原音に對する μ_{in} の値である。依て斯の如き μ_{in} は第1振動系に屬する方程式 (8b) 中に含まれる筈であつて, $n=1$ に對する其の根 $\mu_{01} = 0.9759$ (但し $a=b, \nu=0.3$ に對して) は即ち是れである。又一定の n に對する (8b) の根は唯1つであるが (8a) 及び (9a) 中には夫々周期函数 $\tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{in}$ 及び $\cot \frac{\pi}{2} \lambda'_{in}$ が含まれてゐるから, n の各値に對して無數の

表-1. $\nu=0.3$ なる正方形版に對する μ_{in} の値

i	第1振動系に對する μ_{in} の値 ($m=1, 3, 5\dots$)				第2振動系に對する μ_{in} の値 ($m=2, 4, 6\dots$)		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	0.9759*	3.9459*	8.9149*	24.8482*	1.6347	4.7355	9.7310
1	3.7212	7.1673	12.3654	28.4596	7.6281	11.2490	16.6868
2	13.5472	17.1776	22.7730	39.4879	21.4901	25.0709	30.7287
備考	* 方程式 (8b) より 其他 ν (8a) より				方程式 (9a) より		

根が存在する。尚ほ方程式 (9b) は問題に適合する如き實根を持つてゐない。故に第 1, 2, 3... 上番に對する固有値 μ_{in} は, $n=1, 2, 3...$ に對する (8a), (9a), 及び $n=2, 4, 6...$ に對する (8b) より算出せられる。表-1 は $\nu=0.3$ なる正方形版に對して計算せる結果である。

邊 b が不變にして, a が變化する如き矩形版を考ふる場合は, μ_{in} の代りに $\mu'_{in} = \frac{b^2}{a^2} \mu_{in} = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{N}}$ を算出する方が便利である。 $\nu=0.3$ なる矩形版の邊比 b/a 又は a/b の變化に伴ふ $n=1$ に對する固有値 μ_{01} 及び μ'_{01} の値は表-2 又は圖-2 及び圖-3 に示す通りである。

表-2. 邊比の種々の値に對する μ_{01} 及び μ'_{01} の値

b/a 又は a/b	第 1 振動系		第 2 振動系	
	μ_{01}	μ'_{01}	μ_{01}	μ'_{01}
0.5	3.9459	0.9638	4.7555	2.7786
1.0	0.9759	0.9759	1.6347	1.6347
1.5	0.4304	0.9827	0.9736	1.3153
2.0	0.2410	0.9865	0.6972	1.1839
2.5	0.1538	0.9889	0.5450	1.1183
3.0	0.1066	0.9905	0.4484	1.0812

備考: 邊比 b/a 又は a/b は夫々 μ_{01} 及び μ'_{01} に對應するものである。

是れに依て見れば, 第 1 振動系に對する μ'_{01} の値は, a/b の如何に關せず約 1, 即ち單純梁に對するものと殆ど等しいことが分る。

iii) 固有振動面と其の節線

任意の固有値 μ_{in} に對應する版の固有振動は, 公式 (2) の第一式即ち $\bar{W}_1 = W_1' \cos \omega t$ に依て決定されるが, 特定の時刻に於ける振動面 \bar{W}_1 は, 變數 x, y のみを含む固有函數 W_1' , 従つて公式 (10) 又は (11) に示す \bar{W}_1' 丈けを考ふることに依つて其の特性を窺ふことが出来る。

振動面 \bar{W}_1' の節線 (nodal line) は $\bar{W}_1' = 0$ に依て決定されるが, (10) 及び (11) 式の示す如く, \bar{W}_1' は ξ のみの函數と η のみの函數との積で表はされてゐるから, 求むる節線は常に x -軸又は y -軸に垂直なる直線群となることが分る。例へば y -軸に垂直なる節線は方程式 $\sin n\pi\eta = 0$ を以て表はされ, $n=1, 3, 5...$ 即ち y -軸の方向に正對稱的な振動面に於ては $n=1$ に對しては節線なく (此の場合 $\eta=0, \eta=1$ ならば $\sin n\pi\eta = 0$ は満足されるが, 2 直線 $\eta=0, \eta=1$ は版の 2 つの支承邊に外ならないから節線と稱すべきでない), $n=3$ に對しては $\eta=1/3$ 及び $\eta=2/3$ なる並行 2 節線を生ずる。同様に $n=2, 4, 6...$ 即ち y -軸の方向に逆對稱的な振動面に於ては, $n=2$ に對しては $\eta=1/2$ なる一節線, $n=4$ に對しては $\eta=1/4, \eta=1/2, \eta=3/4$ なる並行 3 節線が生ずる。 x -軸に垂直なる節線は斯く目算で見出すことは困難である。次に固有振動面の二, 三の例を擧ぐることにする。

a). 第 1 振動系の内, 最小固有値 $\mu_{01} = 0.9759$ (従つて $n=1, \lambda_{01} = 1.4057, \bar{\lambda}'_{01} = 0.1553$) に對應するもの:

3) 單純梁の周期方程式は $\sin \pi \sqrt{\mu_n} = 0$ で表はされる。

圖-2. 第 1 振動系に對する最小固有値

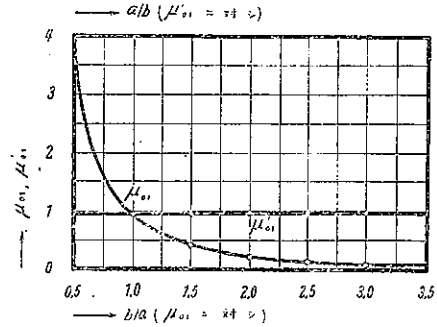
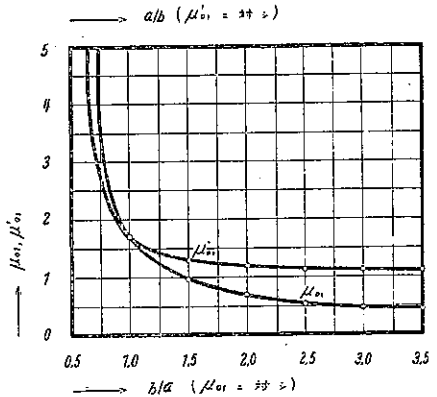


圖-3. 第 2 振動系に對する最小固有値



$$\bar{W}'_1 = \left\{ 0.10234 \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{01}(1-2\xi) + 2.77901 \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_{01}(1-2\xi) \right\} \sin \pi \eta \quad \dots\dots(a)$$

節線なし

b). 第1振動系の内、 $\mu_{02} = 3.9459$ (従つて $n=2, \lambda_{02} = 2.8188, \lambda'_{02} = 0.2326$) に對應するもの:

$$\bar{W}'_1 = \left\{ 0.00124 \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{02}(1-2\xi) + 1.51264 \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_{02}(1-2\xi) \right\} \sin 2\pi \eta \quad \dots\dots(b)$$

節線: $\eta = 1/2$

c). 第1振動系の内、 $\mu_{11} = 3.7212$ (従つて $n=1, \lambda_{11} = 2.1728, \lambda'_{11} = 1.6496$) に對應するもの:

$$\bar{W}'_1 = \left\{ 0.08905 \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{11}(1-2\xi) - 2.32330 \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{11}(1-2\xi) \right\} \sin \pi \eta \quad \dots\dots(c)$$

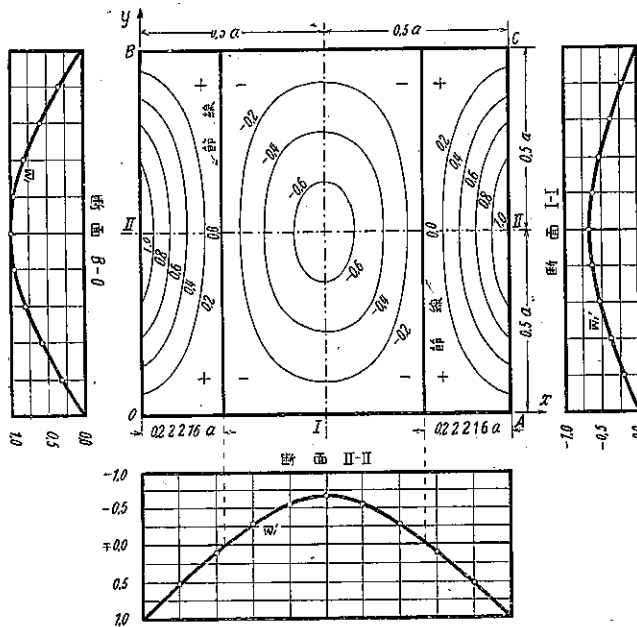
節線: $\xi = 0.22216, \xi = 0.77784$

d). 第2振動系の内、 $\mu_{01} = 1.6347$ (従つて $n=1, \lambda_{01} = 1.6232, \lambda'_{01} = 0.9767$) に對應するもの:

$$\bar{W}'_1 = \left\{ 0.14979 \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{01}(1-2\xi) + 2.50714 \sin \frac{\pi}{2} \lambda'_{01}(1-2\xi) \right\} \sin \pi \eta \quad \dots\dots(d)$$

節線: $\xi = 1/2$

圖-4. $\mu_{01} = 3.7212$ に対する第1振動系の \bar{W}'_1 一面



方程式 (a), (b) 若くは尙ほ一般的に、公式 (10) に依て示される振動面の内、 $\mu_{in} < n^2 \frac{a^2}{b^2}$, 従つて周期方程式 (8b) に對應する振動面には、 x -軸に垂直なる節線が存在しない。又一定の η に対する \bar{W}'_1 の値は殆ど不變であつて、 b を徑間とせる單純梁と大差のない振動を爲すものである。此のことは最小固有値 μ_{01} の値が邊比 a/b の如何に拘らず殆ど 1, 即ち單純梁のそれと略々等しい事實と合致するものであつて、吾々の常識は又直ちに之れを肯定することが出来る。 $\mu_{in} > n^2 \frac{a^2}{b^2}$, 即ち周期方程式 (8a), (9a) に對應する振動面は、最早や單純梁のそれと比較すべくもない。例へば (c) 及び (d) 式に依て示される \bar{W}'_1 の最大値 $\bar{W}'_1(0)$ を単位とせる等高線は 圖-4, 及び 圖-5

に示す通りである。

4. 強制振動 W_2

公式(2)の第2式は版の強制振動を示し、其の右邊中の W_2' は方程式(5)で定義されてゐる。

i) 微分方程式(5)の一般解

今便宜上

$$\alpha = \frac{\rho a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{N}} \quad (\text{不名數}),$$

$$\lambda_{an} = \sqrt{\alpha + \frac{a^2}{b^2} n^2},$$

$$\lambda'_{an} = \sqrt{\alpha - \frac{a^2}{b^2} n^2}$$

f_{mn} = 荷重函數 $f(x, y)$ に対する Fourier の展開係數

$$= \frac{4}{ab} \int \int f(x, y) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \, dx dy \quad \dots\dots\dots(14)$$

とすれば、方程式(5)の一般解として次の式を得る。

$$\begin{aligned} W_2' = & \frac{qa^4}{2AN^2\alpha} \sum_n \frac{1}{n} \left[F_{an}(\xi) + C_n \left\{ \left(\frac{b^2\lambda'^2_{an}}{\nu\alpha^2 n^2} + 1 \right) \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}(1-2\xi)}{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu\alpha^2 n^2} - 1 \right) \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}(1-2\xi)}{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} + C'_n \left\{ \left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu\alpha^2 n^2} + 1 \right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}(1-2\xi)}{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu\alpha^2 n^2} - 1 \right) \frac{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}(1-2\xi)}{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} \right] \sin n\pi\eta, \\ F_{an}(\xi) = & \frac{2\alpha}{\pi} \sum_n \frac{n f_{mn}}{(m^2 + \lambda^2_{an})(m^2 - \lambda'^2_{an})} \sin m\pi\xi. \end{aligned} \quad \dots\dots(15)$$

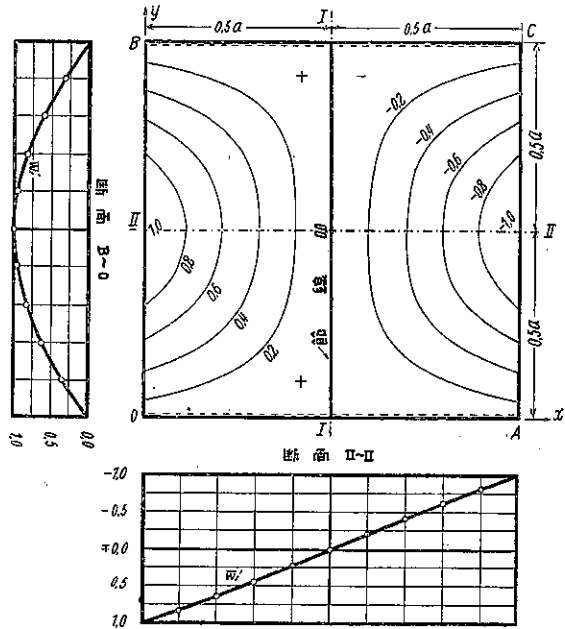
$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$

此の式は既に境界條件 a), c), d) を満足してゐるから、2つの積分定數 C_n 及び C'_n は、残りの條件(b)より算出せられる。

即ち計算の結果

$$C_n = \frac{-\frac{4}{\pi^2} G_{an}}{\left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu\alpha^2 n^2} + 1 \right)^2 \lambda_{an} \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} + \left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu\alpha^2 n^2} - 1 \right)^2 \lambda'_{an} \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}}$$

圖-5. $\mu_{01} = 1.6347$ に対する第2振動系の W_2' 一面



$$C'_{an} = \frac{-\frac{4}{\pi^2} H_{an}}{\left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu a^2 n^2} + 1\right)^2 \lambda_{an} \coth \frac{\pi}{2} \lambda_{an} + \left(\frac{\lambda^2_{an} b^2}{\nu a^2 n^2} - 1\right)^2 \lambda'_{an} \cot \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}}, \quad \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{an} \\ H_{an} \end{aligned} \right\} = \frac{\pi \alpha}{4} \sum_m \frac{m n (1 \mp (-1)^m f_{mn})}{(m^2 + \lambda^2_{an}) m^2 - \lambda'^2_{an}} \left(\frac{b^2 m^2}{\nu a^2 n^2} + \frac{2}{\nu} - 1 \right).$$

上記公式中の f_{mn} , 従つて荷重函數 $f(x, y)$ は $\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$ に關する Fourier 級數として展開し得る以上は全く任意である。

ii) 部分的等布荷重に對する公式

圖-6 の如く, 版の周邊に並行なる周邊を有する矩形内に一樣に分布された荷重に對しては⁴⁾

$$f_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1, \quad \dots (17)$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\xi_0 \equiv x_0/a, \quad \xi_1 \equiv x_1/a, \quad \eta_0 \equiv y_0/b, \quad \eta_1 \equiv y_1/b$$

にして, 之れに對する函數 $F_{an}(\xi)$ は計算の結果次の如くなる。

第 1. $0 \leq \xi \leq \xi_0 - \xi_1$ の時

$$F_{an}(\xi) = -\frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{\sinh \pi \lambda_{an} (1 - \xi_0) \sinh \pi \lambda_{an} \xi_1 \sinh \pi \lambda_{an} \xi}{\lambda^2_{an} \sinh \pi \lambda_{an}} \right. \\ \left. - \frac{\sin \pi \lambda'_{an} (1 - \xi_0) \sin \pi \lambda'_{an} \xi_1 \sin \pi \lambda'_{an} \xi}{\lambda'^2_{an} \sin \pi \lambda'_{an}} \right\} \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \dots (18)$$

第 2. $\xi_0 - \xi_1 \leq \xi \leq \xi_0 + \xi_1$ の時

$$F_{an}(\xi) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\cosh \pi \lambda_{an} (\xi_0 - \xi_1) \sinh \pi \lambda_{an} (1 - \xi) + \cosh \pi \lambda_{an} (1 - \xi_0 - \xi_1) \sinh \pi \lambda_{an} \xi}{\lambda^2_{an} \sinh \pi \lambda_{an}} \right. \\ \left. + \frac{\cos \pi \lambda'_{an} (\xi_0 - \xi_1) \sin \pi \lambda'_{an} (1 - \xi) + \cos \pi \lambda'_{an} (1 - \xi_0 - \xi_1) \sin \pi \lambda'_{an} \xi}{\lambda'^2_{an} \sin \pi \lambda'_{an}} \right\} \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \dots (19)$$

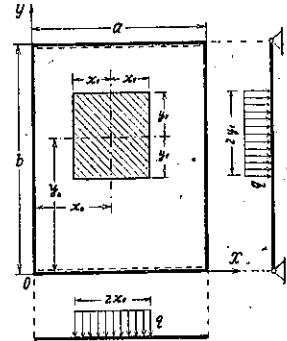
第 3. $\xi_0 + \xi_1 \leq \xi \leq 1$ の時

$$F_{an}(\xi) = -\frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{\sinh \pi \lambda_{an} \xi_0 \sinh \pi \lambda_{an} \xi_1 \sinh \pi \lambda_{an} (1 - \xi)}{\lambda^2_{an} \sinh \pi \lambda_{an}} \right. \\ \left. - \frac{\sin \pi \lambda'_{an} \xi_0 \sin \pi \lambda'_{an} \xi_1 \sin \pi \lambda'_{an} (1 - \xi)}{\lambda'^2_{an} \sin \pi \lambda'_{an}} \right\} \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \dots (20)$$

同様に (16) の第三式に示す級數は次の式で表はされる。

$$G_{an} = \left\{ \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} (1 - 2\xi_0) \sinh \pi \lambda_{an} \xi_1}{\lambda_{an} \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} \right.$$

圖-6. 部分的等布荷重



⁴⁾ S. Iguchi: Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten s. 14. Berlin 1933.

A. Nádaí: Elastische Platten s. 117. Berlin 1925.

$$+ \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an} - 1}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an} (1 - 2\xi_0) \sin \pi \lambda'_{an} \xi_1}{\lambda'_{an} \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \left. \sin n\pi \gamma_0 \sin n\pi \gamma_1 \dots \dots \dots (21) \right\}$$

$$H_{an} = \left\{ \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} (1 - 2\xi_0) \sinh \pi \lambda_{an} \xi_1}{\lambda_{an} \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} \right. \\ \left. + \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\sin \frac{\pi}{2} \lambda'_{an} (1 - 2\xi_0) \sin \pi \lambda'_{an} \xi_1}{\lambda'_{an} \sin \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} \sin n\pi \gamma_0 \sin n\pi \gamma_1 \dots \dots \dots (22)$$

iii) 對稱的分布荷重に對する公式

荷重の分布面の中心が、版の x -軸に垂直なる中心線上に在るとき、即ち $\xi_0 = 1/2$ なるときは、 $m = 2, 4, 6 \dots$ に對する f_{mn} は零となり、係數 C'_n は消失して W'_2 は中心線 $\xi = 1/2$ に對して正對稱的となる。同様に $\gamma_0 = 1/2$ なるときは、 $n = 2, 4, 6 \dots$ に對する f_{mn} は零となり、 W'_2 は中心線 $\eta = 1/2$ に對して正對稱的となる。特に $\xi_0 = \gamma_0 = 1/2$ 、從つて $f(x, y)$ 並に W'_2 が版の兩中心線に對して正對稱的なるときは次の公式を得る。

$$W'_2 = \frac{q\alpha^4}{N\pi^3} \bar{W}'_2, \quad \bar{W}'_2 = \frac{1}{2\alpha} \sum \frac{1}{n} \varphi_{an}(\xi) \sin n\pi \gamma \\ \varphi_{an}(\xi) = F_{an}(\xi) + C_n \left\{ \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} (1 - 2\xi)}{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} + \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an} (1 - 2\xi)}{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} \\ (n = 1, 3, 5 \dots) \dots \dots \dots (23)$$

但し

$$F_{an}(\xi) = - \frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{\sinh \pi \lambda_{an} \xi_1 \sinh \pi \lambda_{an} \xi}{\lambda^2_{an} \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} - \frac{\sin \pi \lambda'_{an} \xi_1 \sin \pi \lambda'_{an} \xi}{\lambda'^2_{an} \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\pi \gamma_1 \\ (0 \leq \xi \leq 1/2 - \xi_1) \\ = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} (1 - 2\xi_1) \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} (1 - 2\xi)}{\lambda^2_{an} \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} \right. \\ \left. + \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an} (1 - 2\xi_1) \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an} (1 - 2\xi)}{\lambda'^2_{an} \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} - \frac{2\alpha^2}{\lambda^2_{an} \lambda'^2_{an}} \right\} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\pi \gamma_1 \\ (1/2 - \xi_1 \leq \xi \leq 1/2 + \xi_1) \\ G_{an} = \left\{ \left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\sinh \pi \lambda_{an} \xi_1}{\lambda_{an} \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} + \left(\frac{\lambda'^2_{an} b^2}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\sin \pi \lambda'_{an} \xi_1}{\lambda'_{an} \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\pi \gamma_1 \dots \dots \dots (25)$$

$H_{an} = 0$

更に $\xi_0 = \xi_1 = \gamma_0 = \gamma_1 = 1/2$ 、即ち滿載等布荷重に對しては、公式 (23) の外

$$\left. \begin{aligned}
 F_{an}(\xi) &= \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}(1-2\xi)}{\lambda_{an}^2 \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{an}} + \frac{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}(1-2\xi)}{\lambda'^2_{an} \cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} - \frac{2\alpha^2}{\lambda'^2_{an} \lambda'^2_{an}} \right\} \\
 C_n &= -\frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu \alpha^2 n^2} + 1 \right) \frac{1}{\lambda_{an}} \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} + \left(\frac{b^2 \lambda^2_{an}}{\nu \alpha^2 n^2} - 1 \right) \frac{1}{\lambda'_{an}} \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}}{\left(\frac{b^2 \lambda'^2_{an}}{\nu \alpha^2 n^2} + 1 \right)^2 \lambda_{an} \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_{an} + \left(\frac{b^2 \lambda^2_{an}}{\nu \alpha^2 n^2} - 1 \right)^2 \lambda'_{an} \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{an}} \right\} \dots\dots\dots (26)
 \end{aligned} \right.$$

が成立つ⁵⁾。

類似の方法に依り、公式 (15)~(23) より線荷重又は點荷重に對する公式を誘導することが出来る。

公式 (15), (23) 等は、 ξ の函數を $\sin m\pi\xi$ に關する Fourier 級數に展開することに依つて複式無限級數として表はすことが出来る。例へば $\xi_0 = \eta_0 = 1/2$ に對する強制振動は次の式で表はされる。

$$\left. \begin{aligned}
 W_2 &= \frac{2q\alpha^4}{N\pi^4} \sum_n \sum_m \Psi_{amn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \cos pt \\
 \Psi_{amn} &= \frac{2}{(m^2 + \lambda'^2_{an})(m^2 - \lambda^2_{an})} \left\{ \frac{4(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_1 + C_n \frac{m}{n} \left(\frac{b^2 m^2}{\nu \alpha^2 n^2} + \frac{2}{\nu} - 1 \right) \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad (m, n=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned} \right\}$$

滿載等布荷重に對しては、 $(-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_1 = 1$ である。

5. 合成振動 W

固有振動と強制振動との重合に依る合成振動は、公式 (3) と (12) とに依り一般に

$$W = W_1 + W_2 = \sum_n \sum_i W'_1(x, y) \cos \omega_i t + W'_2(x, y) \cos pt \dots\dots\dots (a)$$

なる形の式で與へられる。此の中に含まれる未定係數 a_{in} 又は a'_{in} は、與へられたる初始條件より定められるもので、今 $(W)_{t=0} = 0$ を以て此の條件とすれば

$$\sum_i \sum_n W'_1(x, y) + W'_2(x, y) = 0$$

でなくてはならない。例へば第 1 振動系に對しては、公式 (10) と (23) とに依り

$$\sum_n \left[\left\{ \sum_i \frac{a_{in}}{\mu_{in}} u_{in}(\xi) + \frac{1}{\alpha} \varphi_{an}(\xi) \right\} \frac{1}{n} \sin n\pi\eta \right] = 0$$

⁵⁾ 1 組の相對 2 邊が單純支承、他の 2 邊が自由なる矩形版の版面に垂直なる靜荷重に因る彎曲は、上來記述せる強制振動の $\alpha \rightarrow 0$ 、從つて $\lambda_{an} \rightarrow \lambda'_{an} \rightarrow an/b$ なる特別の場合として前記各公式より誘導することが出来る。例へば滿載等布荷重に對する撓みは次の如し。

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{qb^4}{N} \left\{ \frac{1}{24}(\eta^4 - 2\eta^2 + \eta) - 4\nu \sum_n \frac{\tanh \frac{\alpha n}{2}}{n^5 \pi^5} \right. \\
 & \times \left. \frac{\xi \sinh \alpha n(1-\xi) + (1-\xi) \sinh \alpha n \xi - \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\sinh \alpha n}{\alpha n} - 1 \right) \frac{\cosh \frac{\alpha n}{2}(1-2\xi)}{\cosh \alpha n/2}}{(3+\nu) \frac{\sinh \alpha n}{\alpha n} + \nu - 1} \sin n\pi\eta \right\} \\
 \alpha n &= an/b, \quad n=1, 3, 5, \dots
 \end{aligned}$$

之れより係數 a_{in} に對する次の如き條件式を得る。

$$\sum_i \frac{a_{in}}{\mu_{in}} u_{in}(\xi) + \frac{1}{\alpha} \varphi_{an}(\xi) = 0 \dots\dots\dots (b)$$

固有函數 $u_{in}(\xi)$ は、變域 $0 \leq \xi \leq 1$ に於て直交 (orthogonal), 即ち

$$\int_0^a u_{in}(\xi) u_{kn}(\xi) dx = 0 \quad (i \neq k) \dots\dots\dots (c)$$

なる性質があるから、函數 $\varphi_{an}(\xi)$ は $u_{in}(\xi)$ に關する無限級數として展開することが出来る。即ち A_n を以て其の展開係數とすれば (b) 式より

$$\sum_i \frac{a_{in}}{\mu_{in}} u_{in}(\xi) + \frac{1}{\alpha} \sum_i A_{in} u_{in}(\xi) = \sum_i \left(\frac{a_{in}}{\mu_{in}} + \frac{A_{in}}{\alpha} \right) u_{in}(\xi) = 0$$

此の關係並に展開に關する一般公式より、未定係數 a_{in} に對する次の公式を得る。

$$a_{in} = -\frac{\mu_{in}}{\alpha} A_{in} = -\frac{\mu_{in} \int_0^a \varphi_{an}(\xi) u_{in}(\xi) dx}{\int_0^a u_{in}^2(\xi) dx} \dots\dots\dots (28)$$

此の場合若し W' , 及び W'_2 の式として公式 (13) 及び (27) に示す複式無限級數を適用すれば、三角函數 $\sin m\pi\xi$, $\sin n\pi\eta$ の直交性に依り、 a_{in} は別に次の式で表はされることを證明することが出来る。

$$a_{in} = -\frac{\sum_m \Psi_{amnn} \bar{\Psi}_{imn}}{\sum_m \bar{\Psi}_{imn}} \dots\dots\dots (29)$$

此の式に依れば、(28) の如き積分の計算することなく、單に無限級數の和を求むることに依つて a_{in} の値を算定することが出来る。

是等の公式に據り、部分的等布荷重に對して計算せる結果は次の如し。

$$\left. \begin{aligned} a_{in} &= \frac{\mu_{in}}{\alpha^2 - \mu_{in}^2} \bar{a}_{in} = \frac{\bar{a}_{in}}{\sigma_{in}^2 - 1}, & \sigma_{in} &= \frac{\alpha}{\mu_{in}} \equiv \frac{\nu}{\omega_{in}} \\ \bar{a}_{in} &= \frac{Z_{in}}{N_{in}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30a)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{in} &= \frac{16}{\pi^2 \mu_{in}} \left\{ \frac{1}{\lambda_{in}} \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{in}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \frac{\sinh \pi \lambda_{in} \xi_1}{\cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{in}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda'_{in}} \left(\frac{b^2 \lambda^2_{in}}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \frac{\sin \pi \lambda'_{in} \xi_1}{\cos \frac{\pi}{2} \lambda'_{in}} \right\} \cos \frac{\pi}{2} n(1 - 2\eta_1) \\ &\quad (\xi_0 = \eta_0 = 1/2 \text{ に對し}) \\ &= \frac{16}{\pi^2 \mu_{in}} \left\{ \frac{1}{\lambda_{in}} \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{in}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_{in} + \frac{1}{\lambda'_{in}} \left(\frac{b^2 \lambda^2_{in}}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{in} \right\} \\ &\quad (\xi_0 = \xi_1 = \eta_0 = \eta_1 = 1/2, \text{ 即ち滿載等布荷重に對し}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30b)$$

$$\begin{aligned} N_{in} &= \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{in}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_{in}} \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_{in} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\pi}{2} \lambda_{in} \right) + \left(\frac{b^2 \lambda^2_{in}}{\nu a^2 n^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda'_{in}} \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{in} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sec}^2 \frac{\pi}{2} \lambda'_{in} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\mu_{in}} \left(\frac{b^2 \lambda'^2_{in}}{\nu a^2 n^2} + 1 \right) \left(\frac{b^2 \lambda^2_{in}}{\nu a^2 n^2} - 1 \right) \left(\lambda_{in} \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_{in} + \lambda'_{in} \tan \frac{\pi}{2} \lambda'_{in} \right) \dots\dots\dots (30c) \end{aligned}$$

以上の各公式に依り、荷重の分布面積の中心が、版の中心と一致せる場合の強制振動は

$$W = \frac{q\alpha^4}{N\pi^3} (\bar{W}_1 + \bar{W}_2),$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_1 \\ \bar{W}_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_n \frac{\bar{a}_{in}}{n\mu_{in}(\sigma^2_{in}-1)} u_{in}(\xi) \sin n\pi\eta \begin{cases} \cos \omega_{in}t \\ -\cos pt \end{cases} \quad (31)$$

(n=1, 3, 5, \dots)

で表はされることが分る。特定の i, n に対して $\sigma_{in}=1$, 従つて $\alpha = \mu_{in} (p = \omega_{in})$ となれば所謂共鳴現象を呈し, \bar{W}_1 又は \bar{W} の値は限りなく大きくなる。

満載等布荷重を受くる正方形版に於て

$$v = 0.3, \quad \omega_{in} = \frac{\pi^2 \mu_{in}}{a^2} \sqrt{\frac{N}{ph}} = 400 \mu_{in} \text{ sec}^{-1}, \quad f_a = \frac{p}{2\pi} = 160 \text{ sec}^{-1}$$

が與へられたときの各係數の値を計算すれば 表-3 の如し。

表-3. 正方形版に對する諸係數の値

i	n	μ_{in}	ω_{in}	σ_{in}	$100\bar{a}_{in}$	$\frac{100\bar{a}_{in}}{\sigma^2_{in}-1}$	$\frac{100\bar{a}_{in}}{n\mu_{in}(\sigma^2_{in}-1)}$
0	1	0.9759	390.36	2.5753 4	74.1616 8	417.7064 2	428.0217 5
	3	8.9149	3 565.96	0.281 9 2	9.2037 6	-8.4722 6	-0.3167 8
	5	24.8482	9 939.28	0.1145 1	3.5195 7	-3.4734 2	-0.0466 0
1	1	3.7212	1 488.48	0.6753 9	-0.0922 1	0.1695 6	0.0455 7
	3	12 365.4	4 946.16	0.2032 5	-0.0797 1	0.0834 1	0.0022 4
	5	28.4596	11 383.84	0.0883 1	-0.0492 6	0.0497 5	0.0003 5
2	1	13.5472	5 418.88	0.1855 2	-0.0009 5	0.0009 9	0.0000 7
	3	22.7730	9 109 20	0.1103 6	-0.0093 5	0.0094 7	0.0001 4
	5	39.4879	15 795.16	0.0636 5	-0.0097 9	0.0098 3	0.0000 5

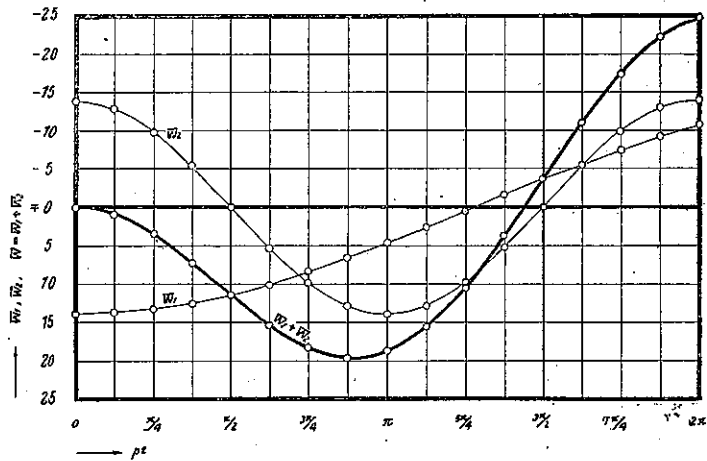
是等の値を用ひ、自由邊の中點 $\xi=0, \eta=1/2$ に對する

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_1 \\ \bar{W}_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{v} \sum_i \sum_n \frac{\bar{a}_{in}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3(\sigma^2_{in}-1)} \times \begin{cases} \cos \omega_{in}t \\ -\cos pt \end{cases}$$

を計算せる結果は 圖-7 に示す通りである。

表-3 に依り版の撓み \bar{W} (又は \bar{W}_1) は、殆ど原音 ($\mu_{01}=0.9759$) に對應する振動に依つて左右せられ、其の上音 ($i+n>1$) に對應する振動の影響は極めて僅少なるべきことが想像せられる。例へば $t=0$ 對する \bar{W}_1 の實際の計算に就て見るに、

圖-7. 自由邊の中點に於ける振動の時間的變化



$$\frac{a_{in}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{v n^3(\sigma^2 m - 1)} = \underbrace{1 \quad 3 \quad 5}_{i=0} \quad \underbrace{1 \quad 3}_{i=1} \quad \underbrace{1 \quad 3}_{i=2} \quad \sum_i \sum_n$$

$$= 13.9236 \quad 0.0314 \quad -0.0046 \quad 0.0057 \quad -0.0001 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 13.9560$$

即ち原音のみに依る 13.9236 は、原音外 6 つの上音の影響を加算したる 13.9560 に對して僅かに 0.23% の誤差を生ずるに過ぎない。是れ各固有値に對應する固有振動の振幅は、固有値が高次のものなる程、換言すれば節線が複雑化する程（或は節線の數が増す程）小さくなることに依るものであつて、此の事實は他の彈性體の振動に於ても全く同様である。

本文中諸種の數字的計算を爲すに當り林博士著“Sieben und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen”に負ふ所極めて多し。附記して以て感謝の意を表する次第である。