論　說　報　告

第26卷第1號　昭和15年1月

エネルギー法による多張間高層ラーメンに對する固有振動週期の實用算定法

會員　酒　井　忠　明*

要旨　第1章に於ては，エネルギー法より誘導したる柱の剛度 (I/l) が K，桁の剛度が kK なる一様な構造の多張間高層ラーメンが一様な荷重を擔つてゐる場合の第1次固有振動週期の實用算定公式に就て述べたものであり，併せて又エネルギー法による振動週期の値が他の精解法によるものと極めて近似せることをも述べた。玆に誘導したる實用算定公式は次の如きものである。

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{2n^2+2n+1}\,f_m^{(k)}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}$$

但し n は層數，m は張間數，h は各層の高さ，M は各層の全荷重の質量又 $f_m(k)$ は桁と柱との剛度比 k に關する項で桁の剛度が極めて大なる場合は1である。

第2章に於ては，各柱及桁の剛度が一様ならざる多張間高層ラーメンの第1次固有振動週期を求める實用算定法に就て述べたものである。即ち普通のエネルギー法に於ける豫備計算たる假定水平荷重に對するラーメンの撓みを，鷹部屋博士提案の曲げモーメント直線式を應用して構造一様ならざる場合にも容易に計算し得ることを述べたものであり，之によつて，かゝるラーメンの固有振動週期の算定を極めて容易ならしめたものである。

尙又鉄筋及鉄骨コンクリート構造に於て普通見らるゝ桁の兩端のハンチの影響を考慮したる場合の固有振動を容易に計算し得る方法をも述べた。

緒　論

構造物の第1次固有振動週期はその構造物の耐震性と密接な關係がある。即ち最も簡單な例として1層ラーメンの上に載荷がある場合，このラーメンが

$$y_0=a_0\cos nt$$

なる地動を受けたものとする。

然る時は，ラーメン自體の質量を無視する時は，ラーメンの頭部は，振動理論に依れば

$$y=A\cos pt+B\sin pt+fa_0\cos nt$$

なる水平振動をなす。特殊振動即ち定常振動のみを考ふれば

$$y=fa_0\cos nt \qquad \cdots\cdots(1)$$

である。玆に，$f=\dfrac{\varphi^2}{\varphi^2-1}$，　$\varphi=\dfrac{\text{地動の週期}}{\text{ラーメンの固有振動週期}}$

即ち，$\varphi=3$ なる時は $f=1.125$ となりラーメン頭部の振動振幅は地動の振幅の 1.125 倍なるも，$\varphi=1.5$ の時は $f=1.800$ にして地動振幅の 1.8 倍となり，更に $\varphi=1.1$ の時は $f=5.75$ となり地動の振幅の 5.75 倍に達す。

$\varphi=1$ なる場合は $f=\infty$ となり共鳴をなしその振幅は遂に無限大となる。

震度に就て考ふるも同様で，ラーメンの頭部に働く最大震度は地動の最大震度の f 倍となるものである。

* 工學士　北海道帝國大學助教授

高層ラーメンの固有振動週期を求むる場合，柱の剛度が一様で而もその桁が極めて剛にして，無限大と見做し得る時は比較的容易に計算し得るものであるが，然らざる時の多張間高層の精密解法は實際に於ては計算不可能と云ふも過言でない。

第 2 次振動以上の高次振動に於ては，縦令一度は生じても直ちに消滅し，第 1 次振動のみが殘るもので，構造物の振動を論ずるに當つて，實際問題としては第 1 次振動のみにて充分なる場合が多いのである。この第 1 次振動週期のみを算出せんとする場合には，構造物の振動曲線を假定し，之にエネルギー理論を應用して，比較的容易に，而も極めて眞値に近いものを求めることが出來るのである。

然しこの方法に於ても，豫め假定荷重に依る構造物の變形を知る必要があり是等豫備計算の爲め多張間高層のラーメンに對しては倘かなりの時間と勞力を要するものである。

著者は，このエネルギー理論より出發して，柱の剛度 (I/l) が K，桁の剛度が kK にして各層に一様なる質量を擔ふ，任意張間と層數のラーメンに對してはその第 1 次固有振動週期を直ちに求め得る實用算定公式を玆に誘導したるものである。

又構造一様ならざるラーメンに對しては，その豫備計算たる假定水平荷重による撓みの算定に鷹部屋博士提案の曲げモーメント直線式を應用し，簡單にその固有振動週期を計算せんとするものである。

1. 構造一様なる多張間高層ラーメンの固有振動週期に對する實用算定公式の提案

1. エネルギー法に依るラーメンの固有振動週期の一般式

彈性體が固有振動をしてゐる場合を考へるに，彈性體が最大振幅に達した瞬間に於ては速度は零なるが故に運動のエネルギーは零にして彈性體の有するエネルギーは全部歪のエネルギーとなり，歪のエネルギーは最大である。逆に彈性體が平衡の位置を通過する瞬間に於ては撓みは零なるが故に歪のエネルギーは零にして彈性體の有するエネルギーは全部運動のエネルギーとなつて現はれ運動のエネルギーは最大となる。故に振動體が外部よりエネルギーを受けることがなければこの振動體の有するエネルギーは常に一定にして最大歪のエネルギーは最大運動のエネルギーに相等しきことゝなる。

今是等の最大歪のエネルギー及最大運動のエネルギーを求むるためには，彈性体の振動時に於ける振動曲線を決定すべきであつて，ラーメンにあつては一様なる力 W がラーメンの左側の各節點に水平に働く場合の撓みの曲線を以て振動曲線と假定するのが普通である。この場合のラーメンの左側節點の水平の變位を η_k とすれば，ラーメンの最大歪のエネルギー $E_{p\,\max}$ は次の如く表はされる。

$$E_{p\,\max}=\frac{1}{2}\sum W\eta_k \qquad \cdots\cdots(2)$$

次に上記假定荷重によるラーメンの任意の點の變位を η とすれば，固有振動中のラーメンの各部分は同一週期を以て單弦運動 $y=\eta\sin pt$ をなし，從つて運動のエネルギー E_k は次式で表はされる。

$$E_k=\int\frac{1}{2}\rho\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ds=\int\frac{1}{2}\rho p^2\eta^2\cos^2 pt=\int\frac{1}{2}\rho p^2\eta^2(1-\sin^2 pt)=\int\frac{1}{2}\rho p^2(\eta^2-y^2)\,ds$$

玆に ρ は任意の部分に於ける單位長の質量である。

從つて最大運動のエネルギー $E_{k\,\max}$ は $y=0$ に於て

$$E_{k\,\max}=p^2\int\frac{1}{2}\rho\eta^2 ds \qquad \cdots\cdots(3)$$

圖-1 に示す如きラーメンに於て,

l_b, l_c, ρ_b, ρ_c: 夫々桁と柱の長さ及單位長の質量

η_h: 柱の任意點の最大水平變位

η_v: 桁の任意點の最大鉛直變位

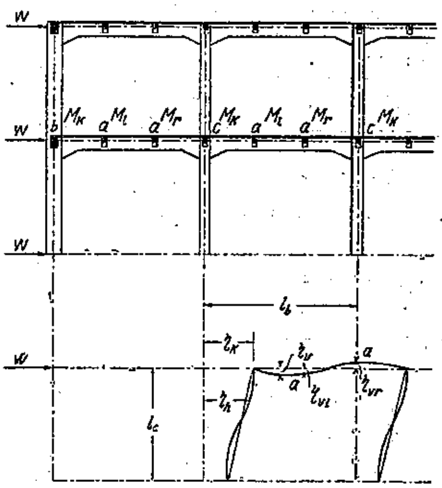
$M_l, M_r, \eta_{vl}, \eta_{vr}$: a なる小桁に依つて桁にかゝる集中荷重の質量及その小桁のある點の最大鉛直變位

M_k: b, c なる小桁に依つてラーメンの節點にかゝる集中荷重の質量

η_k: ラーメンの節點の最大水平變位

とすればこのラーメンに於ては

圖-1.



$$E_{k\,\max}=\frac{1}{2}p^2\Big\{\sum\rho_c\int_0^{l_c}\eta_h^2dx+\sum\rho_b\int_0^{l_b}\eta_v^2dx+\sum\rho_bl_b\eta_k^2+\sum M_k\eta_k^2+\sum M_l\eta_k^2+\sum M_r\eta_k^2+\sum M_l\eta_{vl}^2+\sum M_r\eta_{vr}^2\Big\}\quad\cdots\cdots(4)$$

(4) 式に於て $\sum\rho_b\int_0^{l_b}\eta_v^2dx$, $\sum M_l\eta_{vl}^2$ 及 $\sum M_r\eta_{vr}^2$ は他項に比して極めて小にして之を省略し又柱の質量も柱全體に分布するものと考へずに各節點にかゝるものと假定するも次例に示す如くその誤差少きを以てかく取扱ふ時は, (4) 式は次の如くなる。

$$E_{k\,\max}=\frac{1}{2}p^2\sum M\eta_k^2\quad\cdots\cdots(5)$$

玆に M は各層の全荷重の質量とする。

Habel が 2 張間 5 層の鐵筋コンクリートラーメンの一例について (4) 式に依り計算せる結果は 287.50371 なるに對し, (5) 式に依り著者の計算せる値は 287.97694 でありその差は 0.16% に過ぎなかつた。

(2) 式と (5) 式を等しとをきて,

$$p=\sqrt{\frac{\sum W\eta_k}{\sum M\eta_k^2}}$$

從つて振動週期は,

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{\sum M\eta_k^2}{\sum W\eta_k}}\quad\cdots\cdots(6)$$

上式がエネルギー法に依るラーメンの第 1 次固有振動週期を求める一般式である。

柱及桁の剛度が總て K, 柱高が一様に h なる 1 張間 1 層より 5 張間 5 層に至る合計 25 のラーメンに對しその左側の各節點に一様に W なる水平力の働きたる場合の各節點の變位を求むれば 表-1 の如くなる。節點は上から 1, 2, 3, 4, 5 としその変位を夫々 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ とす。又この値を用ひて (6) 式から, 各層に一様に M なる質量のある場合の第 1 次固有振動週期を計算すれば 表-2 に示す如くなる。

2. 柱の剛度が K, 桁の剛度が無限大なるラーメンに對する固有振動週期の算定公式

柱の剛度が K, 桁の剛度が無限大なるラーメンが各層に一様に M なる質量を擔ふ場合の固有振動週期は (6) 式から出發して簡單な式で表はすことが出來る。

表-1. 柱及桁の剛度 K なるラーメンの撓み　係數：$Wh^3/36EK$

節點 \ 張間數 (m)		1	2	3	4	5
1 層ラーメン	1	2.1429	1.3750	1.000	0.7871	0.6488
2 層ラーメン	1	9.0001	5.5026	3.9294	3.0594	2.5043
	2	4.8000	3.0103	2.1822	1.7133	1.4102
3 層ラーメン	1	20.5154	12.3088	8.7208	6.7595	5.5180
	2	15.8662	9.6256	6.8585	5.3321	4.3614
	3	7.5866	4.7239	3.4119	2.6731	2.1976
4 層ラーメン	1	36.5705	21.7231	15.3328	11.8566	9.6666
	2	31.8400	19.0151	13.4539	10.4182	8.5015
	3	22.9312	13.8481	9.8466	7.6460	6.2501
	4	10.3933	6.4432	4.6447	3.6349	2.9864
5 層ラーメン	1	57.1316	32.9978	23.7593	18.3472	14.9368
	2	52.3881	30.2815	21.8785	16.9079	13.7714
	3	43.3759	25.0761	18.2499	14.1214	11.5101
	4	30.0217	17.3274	12.8399	9.9638	8.1402
	5	13.2022	8.1637	5.8784	4.5977	3.7755

表-2. 柱及桁の剛度 K なるラーメンの
第 1 次固有振動週期

係數：$\sqrt{\dfrac{Mh^2}{(m+1)EK}}$

層數 (n) \ 張間數 (m)	1	2	3	4	5
1	2.168	2.128	2.094	2.077	2.065
2	4.067	3.900	3.808	3.758	3.724
3	6.035	5.735	5.579	5.493	5.438
4	8.022	7.583	7.362	7.240	7.162
5	10.013	9.314	9.146	8.989	8.888

圖-2.

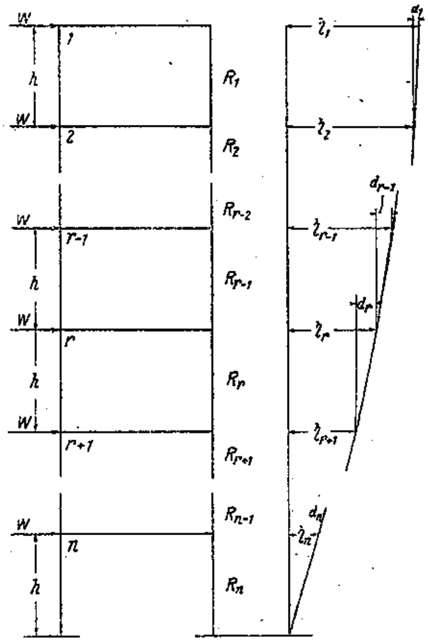


圖-2 に於て，上から第 r 層目の柱の廻転角卽ち撓度を R_r とし，柱の上端及下端の廻轉角卽ち撓角を夫々 θ_o 及 θ_u とすれば，この柱の上端及下端に働く曲げモーメント M_o, M_u は，撓角撓度法の一般式からして，

$$M_o=2EK(2\theta_o+\theta_u-3R_r)$$

$$M_u=2EK(2\theta_u+\theta_o-3R_r)$$

然るに桁の剛度が無限大なる場合は桁は屈曲せず從つて θ_o, θ_u は零となる。依つて又上から第 r 層の柱の材端曲げモーメントは總て $-6EKR_r$ となる。

又第 r 層に於ては,

$$\sum\{M_0+M_u\}+S_r h=0$$

なる層方程式が成立すべきである。茲に S_r は第 r 層に働く剪力で

$$S_r=\sum_1^r W=rW$$

m 張間のラーメンに於ては,

$$\sum\{M_0+M_u\}=-12(m+1)EKR_r$$

依つて,　$-12(m+1)EKR_r+rWh=0$

故に,　$$R_r=\frac{rWh}{12(m+1)EK} \qquad \cdots\cdots(7)$$

從つて又 r 層目の上下節點の水平變位の差 d_r は $R_r=d_r/h$ から,

$$d_r=\frac{rWh^2}{12(m+1)EK} \qquad \cdots\cdots(8)$$

上から r 番目の節點の水平變位を η_r とすれば,

$$\eta_r=\sum_r^n d_r=\{r+(r+1)+(r+2)+\cdots\cdots+(n-1)+n\}\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}(r-1)(r-1+1)\right\}\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}=\frac{1}{2}(n^2+n-r^2+r)\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}$$

$$=\frac{1}{2}(n+r)(n-r+1)\frac{Wh^2}{12(m+1)EK} \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$\sum_1^n\eta_r=\sum_1^n\frac{1}{2}(n^2+n-r^2+r)\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n^3+n^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\frac{Wh^2}{12(m+1)EK} \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$\eta^2_r=\frac{1}{4}\{(n^2+n)-(r^2-r)\}^2\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\{(n^2+n)^2+r^4-2r^3+(1-2n^2-2n)r^2+2(n^2+n)r\}\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2$$

$$\sum_1^n\eta^2_r=\frac{1}{4}\sum_1^n\{(n^2+n)^2+r^4-2r^3+(1-2n^2-2n)r^2+2(n^2+n)r\}\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2$$

然るに,　$$\sum_1^n(n^2+n)^2=n(n^2+n)^2,\qquad \sum_1^n r^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\sum_1^n r^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\qquad \sum_1^n r^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\qquad \sum_1^n r=\frac{1}{2}n(n+1)$$

從つて,　$$\sum_1^n\eta^2_r=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(2n^2+2n+1)\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2 \qquad \cdots\cdots(11)$$

(10) 及 (11) の兩式を (6) 式に代入すれば,

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{2n^2+2n+1}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}} \qquad \cdots\cdots(12)$$

この式中の n 及 m に與へられたラーメンの層數及張間數を代入することにより，ラーメンの撓みを計算することなしにその第 1 次固有振動週期を求めることが出來る。

3. 柱の剛度が K，桁の剛度が kK なるラーメンに對する固有振動週期の實用算定式

先づラーメンが限界なく一様な構造で長くつゞく時，このラーメンの任意層に於ける撓度の一般式を求めん。

1 張間ラーメン： 圖-3 に示すラーメンに於て，柱の剛度を K，桁の剛度を kK，上から r 層目の柱の廻轉角卽ち r 層目の撓度を R_r，同じく上から r 番目の節點の廻轉角卽ち撓角を θ_r にて示す時は，撓角撓度式の一般式から節點 r に於て，

$$\left.\begin{array}{ll} M_{r.r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}), & M_{r.r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r) \\ M_{r.r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'}) & \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

r は任意であり，從つて r の代りに他の數を置き換へてもこの關係は變らない。

節點 r の平衡方程式は，

$$M_{r.r-1}+M_{r.r+1}+M_{r.r'}=0$$

之に (13) 式を代入して，

$$\theta_{r-1}+(4+3k)\theta_r+\theta_{r+1}-3R_{r-1}-3R_r=0\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

又第 r 層の層平衡方程式

$$2(M_{r.r+1}+M_{r+1.r})+S_rh=0$$

より，

$$\theta_r+\theta_{r+1}-2R_r=-2\Delta_r\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

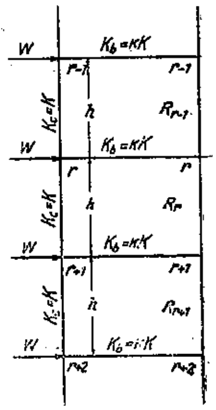
茲に S_r は r 層に働く全剪力にして $S_r=rW$，又 $\Delta_r=\dfrac{rWh}{24EK}$ とす。

同様に $\theta_{r-1}+\theta_r-2R_{r-1}=-2\Delta_{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$

(14)×2−{(15)+(16)}×3 より

$$-\theta_{r-1}+2(1+3k)\theta_r-\theta_{r+1}=6(\Delta_r+\Delta_{r-1})\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

圖-3.



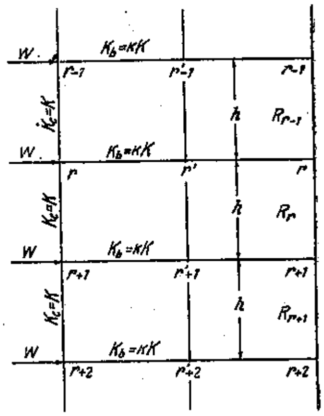
(17) 式は Inhomogene Differenzengleichung であり， この特殊解卽ち限界の効果を考へざる場合の解は $\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r$ とおいて

$$\theta_r=\frac{\Delta_r+\Delta_{r-1}}{k}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

(18) 式を (15) 式に代入して

$$R_r=\left(\frac{2}{k}+1\right)\frac{rWh}{24EK}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

圖-4.



2 張間ラーメン： 節點 r に於て (圖-4)，

$$\left.\begin{array}{l} M_{r.r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}) \\ M_{r.r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r) \\ M_{r.r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'}) \\ M_{r.r-1}+M_{r.r+1}+M_{r.r'}=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

從つて， $\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$

節點 r' に於て，

$$\left.\begin{array}{ll} M_{r',r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1}), & M_{r',r'+1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r \\ M_{r',r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r), & M_{r',r'-1}+M_{r',r'+1}+2M_{r',r}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots(22)$$

從つて，　$\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+2k\theta_r-3R_{r-1}-3R_r=0$ $\cdots\cdots(23)$

次に第 r 層の層平衡方程式

$$2(M_{r,r+1}+M_{r+1,r})+M_{r',r'+1}+M_{r'+1,r'}+Srh=0$$

より，　$2\theta_r+2\theta_{r+1}+\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-6R_r=-6\Delta_r$ $\cdots\cdots(24)$

玆に，　$\Delta_r=\dfrac{rWh}{36EK}$

同様に，　$2\theta_{r-1}+2\theta_r+\theta_{r'-1}+\theta_{r'}-6R_{r-1}=-6\Delta_{r-1}$ $\cdots\cdots(25)$

次に (21)－(23) より，

$$\theta_{r-1}+4\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}=0 \cdots\cdots(26)$$

(21)×2－{(24)+(25)} より，

$$4(1+k)\theta_r-\{\theta_{r'-1}+2(1-k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}=6(\Delta_r+\Delta_{r-1}) \cdots\cdots(27)$$

(26) 及 (27) 式の Simultane Differenzengleighungen 系の特殊解は

$\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r$,　　$\theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'}$　と置いて次の如く求まる。

$$\theta_r=\frac{3(k+2)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{2k(k+4)},\qquad \theta_{r'}=\frac{3(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{k(k+4)} \cdots\cdots(28)$$

(28) 式を (24) 式に代入して

$$R_r=\left\{\frac{2(k+3)}{k(k+4)}+1\right\}\frac{rWh}{36EK} \cdots\cdots(29)$$

3 張間ラーメン：　節點 r に於て (圖-5)，

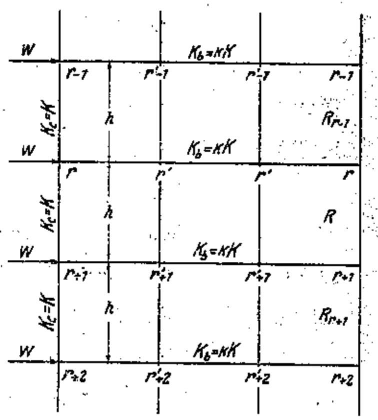
$$\left.\begin{array}{l} M_{r,r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1}) \\ M_{r,r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r) \\ M_{r,r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'}) \\ M_{r,r-1}+M_{r,r+1}+M_{r,r'}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots(30)$$

從つて，　$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0 \cdots(31)$

節點 r' に於ては，

$$\left.\begin{array}{l} M_{r',r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1}) \\ M_{r',r'+1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r) \\ M_{r',r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r) \\ M_{r',r'}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_{r'}) \\ M_{r',r'-1}+M_{r',r'+1}+M_{r',r}+M_{r',r'}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots(32)$$

圖-5.



從つて，　$k\theta_r+\theta_{r'-1}+(4+5k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_{r-1}-3R_r=0$ $\cdots\cdots(33)$

又第 r 層の層平衡方程式

$$2(M_{r,r+1}+M_{r+1,r}+M_{r',r'+1}+M_{r'+1,r'})+Srh=0$$

より，　$\theta_r+\theta_{r+1}+\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-4R_r=-4\Delta_r$ $\cdots\cdots(34)$

玆に　$\Delta_r=\dfrac{rWh}{48EK}$

同様に　$\theta_{r-1}+\theta_r+\theta_{r'-1}+\theta_{r'}-4R_{r-1}=-4\Delta_{r-1}$ ……(35)

次に (31)−(33) より,

$$\theta_{r-1}+(4+k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}=0 \quad\cdots\cdots(36)$$

又 (31)×4−{(34)+(35)}×3 より,

$$\theta_{r-1}+2(5+4k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{3\theta_{r'-1}+2(3-2k)\theta_{r'}+3\theta_{r'+1}\}=12(\Delta_r+\Delta_{r-1}) \quad\cdots\cdots(37)$$

(36) 及 (37) 式の特殊解は $\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r$, $\theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'}$ とおいて,

$$\theta_r=\frac{2(2k+3)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{3k(k+3)},\qquad \theta_{r'}=\frac{(k+6)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{3k(k+3)} \quad\cdots\cdots(38)$$

(38) 式を (34) 式に代入して,

$$R_r=\left\{\frac{(5k+12)}{3k(k+3)}+1\right\}\frac{rWh}{48EK} \quad\cdots\cdots(39)$$

4 張間ラーメン:　節點 r に於て (圖-6)。

$$\left.\begin{aligned}
&M_{r.r-1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1})\\
&M_{r.r+1}=2EK(2\theta_r+\theta_{r+0}-3R_r)\\
&M_{r.r'}=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'})\\
&M_{r.r-1}+M_{rr+1}+M_{rr'}=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(40)$$

從つて,　$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}-3R_{r-1}-3R_r=0$ ‥(41)

節點 r' に於ては,

$$\left.\begin{aligned}
&M_{r'.r'-1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1})\\
&M_{r'.r'+1}=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r)\\
&M_{r'.r}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r)\\
&M_{r'.r''}=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_{r''})\\
&M_{r'.r'-1}+M_{r'.r'+1}+M_{r'.r}+M_{r'.r''}=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(42)$$

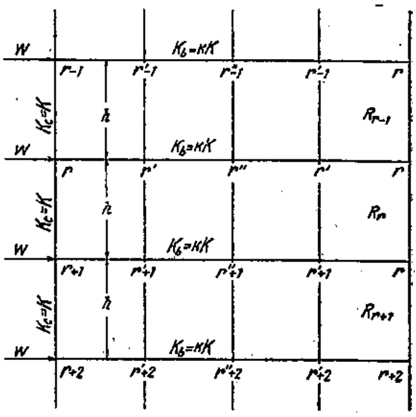


圖-6.

從つて,　$k\theta+\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+k\theta_{r''}-3R_{r-1}-3R_r=0$ ……(43)

又節點 r'' に於ては,

$$\left.\begin{aligned}
&M_{r''.r''-1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''-1}-3R_{r-1}),\quad &&M_{r''.r''+1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3Rr)\\
&M_{r''.r'}=2EkK(2\theta_{r''}+\theta_{r'}), &&M_{r''.r''-1}+M_{r''.r''+1}+2M_{r''.r'}=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(44)$$

從つて,　$2k\theta_{r'}+\theta_{r''-1}+4(1+k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_{r-1}-3R_r=0$ ……(45)

次に第 r 層の層平衡方程式

$$2(M_{r.r+1}+M_{r+1.r}+M_{r'.r'+1}+M_{r'+1.r'})+M_{r''.r''+1}+M_{r''+1.r''}+Srh=0$$

より,　$2(\theta_r+\theta_{r+1}+\theta_{r'}+\theta_{r'+1})+\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-10Rr=-10\Delta_r$ ……(46)

玆に,　$\Delta_r=\dfrac{rWh}{60EK}$

同様に,　$2(\theta_{r-1}+\theta_r+\theta_{r'-1}+\theta_{r'})+\theta_{r''-1}+\theta_{r''}-10R_{r-1}=-10\Delta_{r-1}$ ……(47)

次に (41)−(43) より,

$$\theta_{r-1}+(4+k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}-k\theta_{r''}=0 \quad\cdots\cdots(48)$$

(43)−(45) より,

$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+2(2+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-\{\theta_{r''-1}+(4+3k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}\}=0 \cdots\cdots\cdots(49)$$

又 (41)×10−{(46)+(47)}×3 より,

$$4\theta_{r-1}+4(7+5k)\theta_r+4\theta_{r+1}-\{6\theta_{r'-1}+2(6-5k)\theta_{r'}+6\theta_{r'+1}\}$$
$$-\{3\theta_{r''-1}+6\theta_{r''}+3\theta_{r''+1}\}=30(\Delta_r+\Delta_{r-1}) \cdots\cdots\cdots(50)$$

(48), (49) 及 (50) 式の Simultane Differenzengleichungen 系の特殊解は $\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r$, $\theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'}$ 及 $\theta_{r''-1}+\theta_{r''+1}=2\theta_{r''}$ と置いて,

$$\left.\begin{aligned}\theta_r&=\frac{5(11k^2+42k+36)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{4k(10k^2+57k+72)},\qquad \theta_{r'}=\frac{5(2k^2+24k+36)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{4k(10k^2+57k+72)}\\ \theta_{r''}&=\frac{5(5k^2+24k+36)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{4k(10k^2+57k+72)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(51)$$

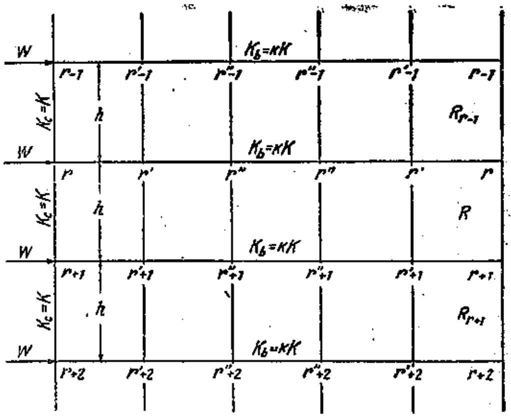
(51) 式を (46) 式に代入して

$$R_r=\left\{\frac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}+1\right\}\frac{rWh}{60EK}\cdots\cdots\cdots(52)$$

5 張間ラーメン: 節點 r に於て (圖-7),

$$\left.\begin{aligned}M_{r.r-1}&=2EK(2\theta_r+\theta_{r-1}-3R_{r-1})\\ M_{r.r+1}&=2EK(2\theta_r+\theta_{r+1}-3R_r)\\ M_{r.r'}&=2EkK(2\theta_r+\theta_{r'})\\ M_{r.r-1}&+M_{r.r+1}M_{r.r'}=0\end{aligned}\right\}(53)$$

圖-7.



從つて,

$$\theta_{r-1}+2(2+k)\theta_r+\theta_{r+1}+k\theta_{r'}$$
$$-3R_{r-1}-3R_r=0\cdots\cdots(54)$$

節點 r' に於ては

$$\left.\begin{aligned}M_{r'r'-1}&=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'-1}-3R_{r-1})\\ M_{r'.r'+1}&=2EK(2\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-3R_r)\\ M_{r'.r}&=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_r)\\ M_{r'.r''}&=2EkK(2\theta_{r'}+\theta_{r''})\\ M_{r'.r'-1}&+M_{r'.r'+1}+M_{r'.r}+M_{r'.r''}=0\end{aligned}\right\}(55)$$

從つて,　$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+4(1+k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+k\theta_{r''}-3R_{r-1}-3R_r=0\cdots\cdots\cdots(56)$$

又節點 r'' に於ては,

$$\left.\begin{aligned}&M_{r''r''-1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''-1}-3R_{r-1}),\qquad M_{r''.r''+1}=2EK(2\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_r)\\ &M_{r''.r'}=2EkK(2\theta_{r''}+\theta_{r'}),\qquad M_{r''.r''}=2EkK(2\theta_{r''}+\theta_{r''})\\ &M_{r''.r''-1}+M_{r''.r''+1}+M_{r''.r'}+M_{r''.r''}=0\end{aligned}\right\}\cdots(57)$$

從つて,　$$k\theta_{r'}+\theta_{r''-1}+(4+5k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-3R_{r-1}-3R_r=0\cdots\cdots\cdots(58)$$

次に第 r 層の層平衡方程式

$$2(M_{r.r+1}+M_{r+1.r}+M_{r'.r'+1}+M_{r'+1.r'}+M_{r''.r''+1}+M_{r''+1.r''})+S_rh=0$$

より,　$$\theta_r+\theta_{r+1}+\theta_{r'}+\theta_{r'+1}+\theta_{r''}+\theta_{r''+1}-6R_r=-6\Delta_r\cdots\cdots\cdots(59)$$

茲に　$$\Delta_r=\frac{rWh}{72EK}$$

同様に，
$$\theta_{r-1}+\theta_r+\theta_{r'-1}+\theta_{r'}+\theta_{r''-1}+\theta_{r''}-6R_{r-1}=-6\Delta_{r-1} \quad\cdots\cdots(60)$$

次に (54)−(56) 式より，
$$\theta_{r-1}+(4+k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}-k\theta_{r''}=0 \quad\cdots\cdots(61)$$

(56)−(58) 式より，
$$k\theta_r+\theta_{r'-1}+(4+3k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}-\{\theta_{r''-1}+4(1+k)\theta_{r''}+\theta_{r''+1}\}=0 \quad\cdots\cdots(62)$$

又 (54)×2−{(59)+(60)} より，
$$\theta_{r-1}+2(3+2k)\theta_r+\theta_{r+1}-\{\theta_{r'-1}+2(1-k)\theta_{r'}+\theta_{r'+1}\}$$
$$-\{\theta_{r''-1}+2\theta_{r''}+\theta_{r''+1}\}=6(\Delta_r+\Delta_{r-1}) \quad\cdots\cdots(63)$$

(61), (62) 及 (63) 式の Simultane Differenzengleichungen 系の特殊解は前と同様 $\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r, \theta_{r'-1}+\theta_{r'+1}=2\theta_{r'}$ 及 $\theta_{r''-1}+\theta_{r''+1}=2\theta_{r''}$ と置いて，

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_r=\frac{3(5k^2+16k+12)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{k(11k^2+56k+60)}, \qquad \theta_{r'}=\frac{3(k^2+10k+12)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{k(11k^2+56k+60)}\\
&\theta_{r''}=\frac{3(2k^2+10k+12)(\Delta_r+\Delta_{r-1})}{k(11k^2+56k+60)}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(64)$$

(64) 式を (59) 式に代入して，
$$R_r=\left\{\frac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}+1\right\}\frac{rWh}{72EK} \quad\cdots\cdots(65)$$

6 張間以上の m 張間ラーメン： 6 張間以上の多張間ラーメンに於ては，同一層に屬する總ての節點の廻轉角が相等しいと假定して撓度を求むるも實用的見地から見て充分の精度を有する結果が得られるものである。

從つてこの假定にもとづき，又ラーメンの上から第 r 番目の全節點に集まる部材の材端の曲げモーメントの總和を零と置いて次の關係式が得られる。
$$2\{\theta_{r-1}+(4+3k)\theta_r+\theta_{r+1}-3R_{r-1}-3R_r\}+(m-1)\{\theta_{r-1}+(4+6k)\theta_r+\theta_{r+1}-3R_{r-1}-3R_r\}=0$$

之に前と同様 $\theta_{r-1}+\theta_{r+1}=2\theta_r$ と置いて，
$$\frac{2(m+mk+1)}{m+1}\theta_r-R_{r-1}-R_r=0 \quad\cdots\cdots(66)$$

又第 r 層の層平衡方程式
$$(m+1)(M_{r,r+1}+M_{r+1,r})=-S_rh$$
から，
$$\theta_r+\theta_{r+1}-2R_r=\frac{-S_rh}{6EK(m+1)} \quad\cdots\cdots(67)$$

同様に
$$\theta_{r-1}+\theta_r-2R_{r-1}=\frac{-S_{r-1}h}{6EK(m+1)} \quad\cdots\cdots(68)$$

この (67) 及 (68) の兩式より
$$2\theta_r-R_r-R_{r-1}=\frac{-(S_r+S_{r-1})h}{12EK(m+1)} \quad\cdots\cdots(69)$$

(69)−(66) より
$$\theta_r=\frac{(S_r+S_{r-1})h}{24EKmk} \quad\cdots\cdots(70)$$

(70) 式を (67) 式に代入し又 $S_r=rW$ なる關係を用ひ，
$$R_r=\left(\frac{m+1}{mk}+1\right)\frac{rWh}{12(m+1)EK} \quad\cdots\cdots(71)$$

以上求めたる (19), (29), (39), (52), (65) 及 (71) の各式は何れもラーメンの上下の限界の效果を考へざる場合の上から第 r 層目の撓度を示すもので，高層ラーメンに對してはこの撓度を使用して固有振動週期を近似的に求めることが出來る。卽ち桁の剛度が無限大なるラーメンに於て (7) 式から (12) 式の固有振動週期式を誘導したのと全く同様にして，柱の剛度が K，桁の剛度が kK なるラーメンの第一次固有振動週期は，

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{2n^2+2n+1}\,f_m(k)\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\quad\cdots\cdots(72)$$

となる。玆に m は與へられたラーメンの張間數，n は層數を示す。又 $f(k)_m$ は

1 張間ラーメンに對しては，　$f_1(k)=\sqrt{\dfrac{2}{k}+1}$

2 張間ラーメンに對しては，　$f_2(k)=\sqrt{\dfrac{2(k+3)}{k(k+4)}+1}$

3 張間ラーメンに對しては，　$f_3(k)=\sqrt{\dfrac{5k+12}{3k(k+3)}+1}$

4 張間ラーメンに對しては，　$f_4(k)=\sqrt{\dfrac{31k^2+156k+180}{2(10k^2+57k+72)}+1}$

5 張間ラーメンに對しては，　$f_5(k)=\sqrt{\dfrac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}+1}$

6 張間以上の m 張間ラーメンに對しては，　$f_m(k)=\sqrt{\dfrac{m+1}{mk}+1}$　$\cdots\cdots$ (73)

種々なる k の値に對する $f_m(k)$ の値を示せば 表-3 の如し。

表-3.　$f_m(k)$ の値

剛度比 (k) ＼ 張間數 (m)	1	2	3	4	5
0.25	3.000	2.668	2.537	2.467	2.424
0.5	2.237	2.028	1.940	1.892	1.862
0.75	1.915	1.762	1.693	1.656	1.629
1	1.732	1.613	1.555	1.523	1.503
1.5	1.528	1.446	1.401	1.377	1.361
2	1.414	1.354	1.317	1.297	1.284
3	1.291	1.253	1.225	1.210	1.200
4	1.225	1.199	1.175	1.163	1.155
∞	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-4.　$k=1$ なる 1 張間ラーメンの固有振動週期

係數：$\sqrt{\dfrac{Mh^2}{2EK}}$

層數 (n)	(72) 式に依る値	(6) 式に依る値
6	12.953	12.005
7	14.935	13.998
8	16.918	15.988
9	18.902	17.979
10	20.886	19.969
20	40.744	39.832
30	60.609	59.732
40	80.476	79.602
50	100.343	99.476

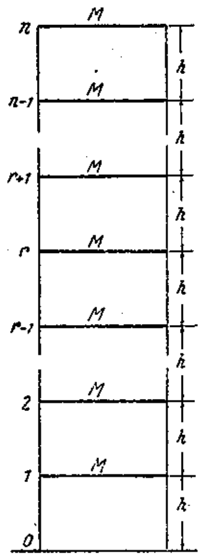
$k=1$ なる 1 張間高層ラーメンに對して，(72) の實用算定式より計算せる値と，實際のラーメンの撓みを計算し (6) 式の一般式から計算せる値を比較すれば 表-4 の如し。高層になる程，その差は小となる。又 $k=\infty$ なる場合は兩者全く相等しきは勿論である。

4.　エネルギー法に依る固有振動週期の精度

柱の剛度が K，桁の剛度が無限大にして各層に一様な質量を擔ふラーメンに對しては，エネルギー法に依らざる他の精解法が可能なるによつて，かゝるラーメンを例にとり振動曲線を假定してエネルギー法より求めた結果の

精度を見ん。

圖-8.



先づ質量のない剪斷振動體に 圖-8 の如く有限の質量が等間隔に分布されてゐる場合の振動を考へる。各質量の位置を下から $1, 2, 3, \cdots\cdot r, \cdots\cdot n$ で表はす。各質量間の間隔を h とす。この剪斷振動体の剛性率を G, 斷面積を A, 下から r 番目の層に働く剪斷力を S_r, その水平撓みを y_r とすれば，第 r 層に働く力 I_r と撓みとの關係は次の樣になる。

$$I_r = S_{r+1} - S_r = \frac{GA}{h}\{(y_r - y_{r-1}) - (y_{r+1} - y_r)\}$$

この I_r の代りに慣性力 $-M\dfrac{d^2y_r}{dt^2}$ を代入すれば次の振動方程式が出る。

$$y_{r-1} - \left(2y_r + \frac{Mh}{GA}\frac{d^2y_r}{dt^2}\right) + y_{r+1} = 0 \quad \cdots\cdots(74)$$

之を解くに

$$y_r = u_r q \quad \cdots\cdots(75)$$

とおく。玆に u_r は位置 r のみに關係し時刻には關係なき函數で定常振動形を決定する固有函數，q は時刻のみに關する時刻函數。

(75) 式を (74) 式に代入すれば，

$$-\frac{1}{q}\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{u_r}\frac{GA}{Mh}(u_{r-1} - 2u_r + u_{r+1})$$

左邊は時刻のみに關する函數，右邊は時刻には關係なき函數で，從つて兩邊が相等しきためには，その各々は常數に等しくなるを要し，この常數を p^2 と置く。然る時は次の 2 箇の條件式が出る。

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -p^2 q \quad \cdots\cdots(76)$$

$$u_{r-1} - \left(2 - \frac{Mh}{GA}p^2\right) + u_{r+1} = 0 \quad \cdots\cdots(77)$$

(77) 式を解く爲に

$$2 - \frac{Mh}{GA}p^2 = 2\cos\varphi \quad \cdots\cdots(78)$$

とおけば，

$$u_{r-1} - 2\cos\varphi u_r + u_{r+1} = 0 \quad \cdots\cdots(79)$$

の Differenzen Gleichung となり，之を解くと

$$u_r = A\cos r\varphi + B\sin r\varphi \quad \cdots\cdots(80)$$

が得られる。φ は限界條件から定まるものである。今基礎で固定，頂で自由なる限界を考へると，

(i) $r=0$ で $y_0=0$,　(ii) $r=n$ で $y_n=y_{n+1}$ $\cdots\cdots(81)$

(i) から $A=0$,　(ii) から $B\sin n\varphi = B\sin(n+1)\varphi$

或は　$B\{\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi\} = 0$

從つて　$2B\cos\frac{1}{2}(2n+1)\varphi\cdot\sin\frac{1}{2}\varphi = 0$

この爲には　$\cos\frac{1}{2}(2n+1)\varphi = 0$　なるを要し，

$$\varphi_s=\frac{2s-1}{2n+1}\pi \quad\cdots\cdots(82)$$

茲に　　$s=1, 2, 3, \cdots n.$

依つて (82) 式を (78) 式に代入すると，

$$2-\frac{Mh}{GA}p^2=2\cos\frac{2s-1}{2n+1}\pi$$

或は，

$$1-\cos\frac{2s-1}{2n+1}\pi=\frac{1}{2}\frac{Mh}{GA}p^2$$

從つて，

$$2\sin^2\frac{2s-1}{2(2n+1)}\pi=\frac{1}{2}\frac{Mh}{GA}p^2$$

故に，

$$p_s=2\sqrt{\frac{GA}{Mh}}\sin\frac{2s-1}{2(2n+1)}\pi$$

從つて振動週期は，

$$T_s=\frac{2\pi}{p_s}=\pi\sqrt{\frac{Mh}{GA}}\operatorname{cosec}\frac{2s-1}{2(2n+1)}\pi \quad\cdots\cdots(83)$$

次に柱の剛度が K，層高は一樣に h にして，桁の剛度が無限大なる場合は，各層に於ける撓度 R と剪力 S との關係は同一であり，單位剪力に對する各層の撓度は $\frac{h}{12(m+1)EK}$ である。茲に m は張間數を表はす。

然るに又こゝに取扱つた剪斷振動體の各荷重間の撓度といふべきものは，何れも同一にして單位剪力に對して，$\frac{1}{GA}$ である。

故にこのラーメンは，h なる等間隔に M なる質量を擔ふ剪斷振動體に於て $\frac{1}{GA}=\frac{h}{12(m+1)EK}$ なる場合と同一に考ふることが出來るものであり，從つてその固有振動週期は

$$T_s=\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}}\operatorname{cosec}\frac{2s-1}{2(2n+1)}\pi \quad\cdots\cdots(84)$$

第一次固有振動週期は

$$T=\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2(2n+1)} \quad\cdots\cdots(85)$$

高層ラーメンに對しては

$$T\fallingdotseq 2(2n+1)\cdot\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}} \quad\cdots\cdots(86)$$

何んとなれば

$$\sin x=x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}\cdots\cdots$$

にして x の小さき時は $\sin x\fallingdotseq x$ 從つて $\operatorname{cosec}x\fallingdotseq\frac{1}{x}$ なる故である。(86) 式に依る誤差は 5 層ラーメンに於て 0.34%，10 層ラーメンに於て 0.093%，更に 50 層ラーメンに於ては 0.004% に過ぎぬ。

(85) 式の誘導法は武藤博士に基づくものであるが，同樣な式を水原氏も別な方法より誘導してゐる。

尙妹澤，金井兩氏は

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

なる棒狀體の一般振動式から出發して，1 層から 4 層迄の桁の剛度無限大なるラーメンの固有振動週期を出してゐるが，その結果は

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(87)$$

玆に $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$ の値は，1 層から 4 層のラーメンの第一次固有振動に對して夫々，1.810, 2.937, 4.078 及 5.221 である。

偖てエネルギー法より著者の誘導したる (12) 式又は (72) 式に依る結果と (85) 及 (87) の兩式に依る結果を比較すれば 表-5 の如し。

この表にて明かなる如く，エネルギー法に依る結果は，高層ラーメンに於ても極めて眞値に近き値を與へるものであり吾々の實用解法としては充分なるものである。即ち 5 層以下のラーメンに於てはその誤差 0.6% 以下，10 層ラーメンに於ては 0.63%，又 50 層ラーメンに於ても 0.65% 程度である。

表-5.　係數：$\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}$

層數 (n)	(12) 又は (72) 式に依る値	(85) 式に依る値	(87) 式に依る値
1	1.814	1.814	1.810
2	2.925	2.935	2.937
3	4.056	4.075	4.078
4	5.194	5.223	5.221
5	6.335	6.372	
6	7.478	7.524	
7	8.623	8.676	
8	9.768	9.829	
9	10.913	10.982	
10	12.059	12.136	
20	23.523	23.677	
30	34.992	35.222	
40	46.463	46.768	
50	57.933	58.315	

2. 鷹部屋博士提案の曲げモーメント直線式を應用したる構造一樣ならざる多張間高層ラーメンの固有振動週期算定法

エネルギー法による多張間高層ラーメンの第一次固有振動週期を求むる一般公式は (6) 式である。即ち

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\sum M\eta_k^2}{\sum W\eta_k}},$$

玆に M は任意の層に於ける荷重の質量，η_k は假定水平荷重に依るラーメンの節點に於ける水平撓みである。又 W は假定水平荷重で普通ラーメンの左側の各節點に W なる水平力が一樣に働く場合を考へる。又最上層の節點のみは $W/2$ なる水平力が働くものとすることも亦屢々行はれるところである。

多張間高層ラーメンに於てその柱及桁の剛度が一樣ならざる場合は，この (6) 式のエネルギー法に依る他，その固有振動週期を求むる實用的計算法は無い。

然るに (6) 式の η_k を求むるには何かなりの勞力と時間を要するものである。著者はこの η_k の算出に鷹部屋博士提案の曲げモーメント直線式なるものを應用せんとするものである。

1. 曲げモーメント直線式とラーメンの曲げモーメントの特異性

曩に鷹部屋博士は北海道帝國大學工學部紀要第 4 册第 2 號登載の「A Speedy and Accurate Method of Wind Stress Calculation for High Storied Bents」なる論文，その他に於て，高層建築架構の耐風及耐震に對する最初の設計に資する目的を以て，曲げモーメント直線式なるものを提案された。ラーメンに一樣な水平力の働く時は本式に依り單に節點の位置を示す數字を代入する丈けで直ちにその點の材端曲げモーメントの概算値を得るものである。

即ちその一部を玆に示せば次の如し (圖-9 參照)。

1 張間ラーメン：　係數　柱：$-Wh$,　桁：Wh

M (柱 A,　上端) $=0.2548\,n-0.0733$

M (柱 A,　下端) $=0.2451\,n-0.1777$

M (桁 AB,　左端) $=0.498\,n-0.316$

2 張間ラーメン：　係數　柱：$-Wh$,　桁：Wh

M (柱 A,　上端) $=0.130\,n-0.037$

M (柱 A,　下端) $=0.128\,n-0.101$

M (柱 B,　上端) $=0.248\,n-0.093$

M (柱 B,　下端) $=0.242\,n-0.137$

M (桁 AB,　左端) $=0.255\,n-0.162$

M (桁 AB,　右端) $=0.244\,n-0.166$

3 張間ラーメン：　係數　柱：$-Wh$,　桁：Wh

M (柱 A,　上端) $=0.091\,n-0.027$

M (柱 A,　下端) $=0.0876\,n-0.0703$

M (柱 B,　上端) $=0.1652\,n-0.0632$

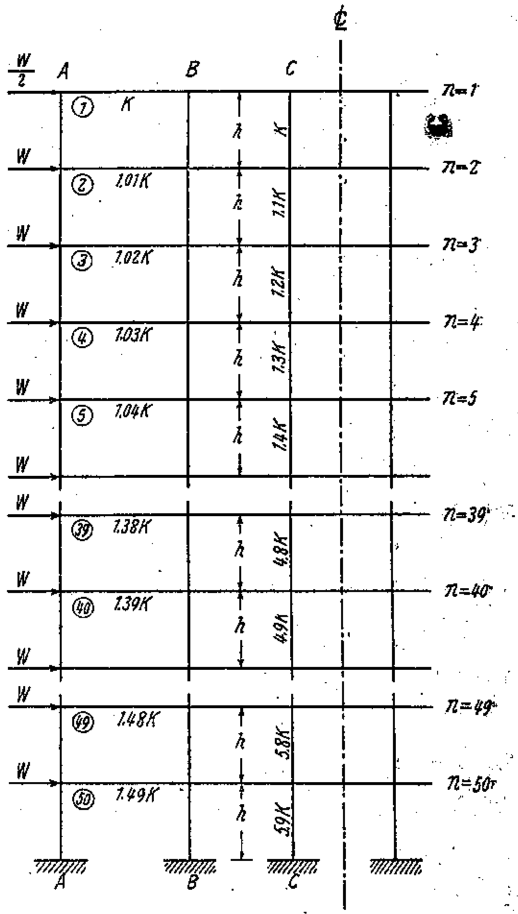
M (柱 B,　下端) $=0.1652\,n-0.0991$

M (桁 AB,　左端) $=0.171\,n-0.1067$

M (桁 AB,　右端) $=0.1655\,n-0.1101$

M (桁 BC,　左端) $=0.162\,n-0.1155$

圖-9.



4 張間ラーメン：　係數　柱：$-Wh$,　桁：Wh

M (柱 A,　上端) $=0.069\,n-0.0205$

M (柱 A,　下端) $=0.066\,n-0.053$

M (柱 B,　上端) $=0.127\,n-0.050$

M (柱 B,　下端) $=0.125\,n-0.074$

M (柱 C,　上端) $=0.122\,n-0.049$　　M (柱 C,　下端) $=0.123\,n-0.076$

M (桁 AB,　左端) $=0.131\,n-0.083$　　M (桁 AB,　右端) $=0.127\,n-0.086$

M (桁 BC,　左端) $=0.122\,n-0.086$　　M (桁 BC,　右端) $=0.122\,n-0.085$

5 張間ラーメン：　係數　柱：$-Wh$,　桁：Wh

M (柱 A,　上端) $=0.055\,n-0.016$　　M (柱 A,　下端) $=0.053\,n-0.043$

M (柱 B,　上端) $=0.103\,n-0.0388$　　M (柱 B,　下端) $=0.101\,n-0.0596$

M (柱 C,　上端) $=0.102\,n-0.041$　　M (柱 C,　下端) $=0.101\,n-0.06$

M (桁 AB,　左端) $=0.105\,n-0.0664$　　M (桁 AB,　右端) $=0.10\,n-0.068$

M (桁 BC,　左端) $=0.097\,n-0.0686$　　M (桁 BC,　右端) $=0.0966\,n-0.0674$

M (桁 CD,　左端) $=0.0968\,n-0.0668$

6 張間ラーメン：　係數　柱：$-Wh$,　桁：Wh

M (柱 A,　上端) $=0.046\,n-0.013$　　M (柱 A,　下端) $=0.044\,n-0.036$

M (柱 B,　上端)$=0.084\,n-0.032$　　M (柱 B,　下端)$=0.084\,n-0.05$
M (柱 C,　上端)$=0.083\,n-0.033$　　M (柱 C,　下端)$=0.082\,n-0.050$
M (柱 D,　上端)$=M$ (柱 C, 上端)　　M (柱 D,　下端)$=M$ (桁 C, 下端)
M (桁 AB, 左端)$=0.088\,n-0.055$　　M (桁 AB, 右端)$=0.086\,n-0.057$
M (桁 BC, 左端)$=0.081\,n-0.057$　　M (桁 BC, 右端)$=0.082\,n-0.057$
M (桁 CD, 左端)$=M$ (桁 BC, 左端)

6 張間以上のラーメンに對しては前記紀要を參照されたい。上式に於て n は今求めやうとする曲げモーメントの屬する層の位置を示すものであり上から勘定する。W は水平節點荷重の大さ又 h は柱の高さを示すものである。

例へば 5 張間ラーメンに於てはその全層數如何に拘らず外側柱 (圖-1 の A なる柱) の上端曲げモーメントは

$$M=-(0.055\,n-0.016)Wh$$

なる式から求められるものであり，このラーメンの上から 20 層目の柱の上端曲げモーメントは

$$M=-(0.055\times20-0.016)Wh=-1.08Wh$$

30 層目の柱の上端曲げモーメントは

$$M=-(0.055\times30-0.016)Wh=-1.63Wh$$

と直ちに計算が出來るのである。

但し最下層部に於ては基礎に固定といふ限界の影響を受け曲げモーメント直線式に依る値と實際の値は少しく異なるもので之が補正値も前記紀要に記載されてあるが茲には省略す。

以上述べた曲げモーメント直線式なるものは，圖-9 に示す如き基本型ラーメンに對し張間數及層數の異なる多數のラーメンを實際に解きたる結果から誘導されたものである。この基本型ラーメンに於ては柱の剛度の變化は上から K, $1.1K$, $1.2K$, $1.3K$, …… となつてをり，桁の剛度の變化は同じく上から K, $1.01K$, $1.02K$, $1.03K$, …… となつてゐるものであるが，之と全く剛度變化の異なるラーメンに對してもこの曲げモーメント直線式は實によく適合する結果を與へるものである。前記紀要に示されてある例題は 5 張間 25 層のラーメンであるが，このラーメンの最下層の中央 4 本の柱の剛度は $0.01253\,\mathrm{m}^3$ なるに對し，最上層の中央 4 本の柱のそれは $0.000043\,\mathrm{m}^3$ にしてその比は實に $291:1$ である。尚このラーメンに關しては後にあげた 圖-13 と 表-12 を參照されたい。鷹部屋博士の基本型ラーメンに於けるこの比は僅かに $3.4:1$ である。然るに博士の曲げモーメント直線式に依る結果と Habel 氏がこのラーメンに對し正確に解きたる結果とは僅少の差よりなく，曲げモーメント直線式に依る値は建築架構の最初の設計に資し得る許りでなく，其の儘眞値として取扱ふも實用的見地よりすれば差支へなき程である。

後に示す 表-14 にこの兩者による結果の一部を記載した。卽ち表中の M_{no} 及 M_m に於て括弧內の數値は Habel 氏に依る正確値を示す。

從つて又コンクリート構造物の桁に普通ハンチを付するが，この場合桁の剛度はかなり異なりその水平力に對する撓みも相當影響を受けるべきであるも各部材に働く曲げモーメントに對してはこの ハンチ の影響は無視するも實用上差支へ無きものである。

今一つの曲げモーメントの特異性は，桁に於ては水平荷重に依るその兩端の曲げモーメントが近似的に相等しきことである。

ラーメンの振動週期を求むるに必要なのはラーメンの撓みであるが之は曲げモーメントと異なり,剛度の變化が少しでも異なつたり,桁にハンチがあつたりする時は全く異なるもので從つて與へられたラーメンに對し個々別々にこの値を計算しなければならないのである。然し上述の曲げモーメントの特異性を利用し,曲げモーメント直線式に依り,次の如く極めて容易にその撓みを知ることが出來る。

2. 曲げモーメント直線式に依る撓度計算法

任意の張間に於て,上層より第 n 番目の桁の左右の曲げモーメントを夫々 M_{nl} 及 M_{nr} とすれば撓角撓度式の一般式からして

$$M_{nl}=K_{nb}(2\varphi_{nl}+\varphi_{nr}) \quad \cdots\cdots(88)$$

$$M_{nr}=K_{nb}(2\varphi_{nr}+\varphi_{nl}) \quad \cdots\cdots(89)$$

玆に K_{nb} は上から第 n 番目の桁の剛度 $\varphi_{nl}, \varphi_{nr}$ は上から第 n 番目の桁の兩端の撓角の $2E$ 倍を示す。

M_{nl} 及 M_{nr} を曲げモーメント直線式から求むれば,(88) 及 (89) 式より,

$$\varphi_{nl}=\frac{2M_{nl}-M_{nr}}{3K_{nb}} \quad \cdots\cdots(90)$$

同様にして, $$\varphi_{n+1l}=\frac{2M_{n+1l}-M_{n+1r}}{3K_{n+1b}} \quad \cdots\cdots(91)$$

次に上から第 n 層目の柱の上端の曲げモーメントを M_{no} とすれば

$$M_{no}=K_{nc}(2\varphi_{nl}+\varphi_{n+1l}+\Psi_n) \quad \cdots\cdots(92)$$

玆に K_{nc} は上から第 n 層目の柱の剛度, Ψ_n はその柱の廻轉角卽ち撓度の $-6E$ 倍を示す。

(92) 式より $$\Psi_n=\frac{M_{no}}{K_{nc}}-(2\varphi_{nl}+\varphi_{n+1l}) \quad \cdots\cdots(93)$$

故に M_{no} を曲げモーメント直線式から求むる時は Ψ_n は (93) 式に依て計算出來, 從つて又上から第 n 番目の節點と $n+1$ 番目の節點との水平變位の差 d_n は次式から求めることが出來る。

$$d_n=-\frac{\Psi_n h}{6E} \quad \cdots\cdots(94)$$

從つて上から第 n 番目の節點の水平變位 η_{nk} は, 與へられたラーメンの全層數が q なる場合

$$\eta_{nk}=\sum_n^q d_n \quad \cdots\cdots(95)$$

である。奇數張間のラーメンに於てはその中央の張間に就て考へる時は $M_{nl}=M_{nr}$ にして $\varphi_{nl}, \varphi_{n+1l}$ は次の如く簡單な式から計算出來ることゝなる。

$$\varphi_{nl}=\frac{M_{nl}}{3K_{nb}}, \qquad \varphi_{n+1l}=\frac{M_{n+1l}}{3K_{n+1b}} \quad \cdots\cdots(96)$$

奇數張間ならざる場合にも近似的には $M_{nl}=M_{nr}$ にして (96) 式を使用することが出來る。この場合は成る可く內側の張間に就て φ_{nl} 及 φ_{n+1l} を求める方が誤差は少い。

上述の方法に依り撓みを求むる場合,ラーメンの全部材の曲げモーメントを求める必要はないので僅かに各層に於いて 1 本宛の柱と桁のみの曲げモーメントを求める丈にて足り然もそれ等の兩端の曲げモーメントを求める必要はないのである。

尙高層ならざるラーメンに對しては曲げモーメントを求めるのに曲げモーメント直線式に依らず,同じく鷹部屋博士の「建築架構モーメント圖譜」又は "Rahmentafeln" なる著書に記載した曲げモーメントの値を直接使用す

る方が簡易であり誤差が少い。

3. 桁の兩端にハンチを有するラーメンの撓度計算法

部材の兩端に於て斷面の變化のある場合の撓角撓度式の一般式は，

$$M_{ab}=K_{ab}(a\varphi_a+b\varphi_b+c\Psi) \quad \cdots\cdots(97)$$

玆に a, b, c は部材の斷面變化の狀態に依り定まる常數で，今 圖-10 に示す如きハンチを有する桁に對するものを示せば 表-6，表-7 及 表-8 の如くなる。是等の値は三浦博士の方法に依て各務氏が計算したるものである。

圖-10.

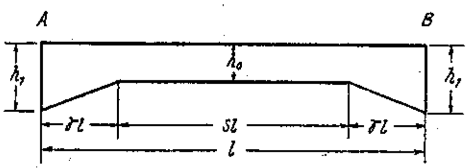


表-6. a の 値

γ \ ρ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.30	7.130	5.427	4.207	3.423	2.813	2.356
0.25	5.706	4.6[illegible]3	3.807	3.161	2.693	2.309
0.20	4.541	3.906	3.373	2.931	2.563	2.257
0.15	3.640	3.289	2.969	2.681	2.426	2.208
0.10	2.897	2.772	2.604	2.440	2.284	2.138

表-7. b の 値

γ \ ρ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.30	5.370	3.827	2.834	2.102	1.611	1.261
0.25	4.143	3.169	2.453	1.926	1.530	1.231
0.20	3.137	2.573	2.111	1.737	1.437	1.196
0.15	2.362	2.058	1.784	1.543	1.335	1.154
0.10	1.747	1.629	1.488	1.352	1.225	1.108

表-8. c の 値

γ \ ρ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.30	4.167	3.085	2.347	1.842	1.475	1.206
0.25	3.283	2.597	2.087	1.696	1.408	1.180
0.20	2.559	2.160	1.828	1.556	1.333	1.151
0.15	2.001	1.782	1.584	1.408	1.254	1.121
0.10	1.548	1.467	1.364	1.264	1.170	1.082

表中 γ はハンチの長さの桁の長さに對する比であり又 ρ は桁の中央部の高さと兩端の高さとの比卽ち h_0/h_1 である。

從つて與へられたラーメンの任意の張間に於て，上から第 n 番目の桁の左右兩端の曲げモーメントを M_{nl} 及 M_{nr} とすれば

$$M_{nl}=K_{nb}(a\varphi_{nl}+b\varphi_{nr}) \quad \cdots\cdots(98)$$

$$M_{nr}=K_{nb}(a\varphi_{nr}+b\varphi_{nl}) \quad \cdots\cdots(99)$$

依つて，$(98)\times a-(99)\times b$ からして

$$\varphi_{nl}=\frac{aM_{nl}-bM_{nr}}{K_{nb}(a^2-b^2)} \quad \cdots\cdots(100)$$

同様に，

$$\varphi_{n+1\,l}=\frac{aM_{n+1\,l}-bM_{n+1\,r}}{K_{n+1\,b}(a^2-b^2)} \quad \cdots\cdots(101)$$

與へられたラーメンが奇數の張間數を有する場合その中央張間に於て考ふれば $M_{nl}=M_{nr}$ であり又然らざる場合に於ても近似的には同様の關係があるを以て

$$\varphi_{nl}=\frac{M_{nl}}{K_{nb}(a+b)} \quad \cdots\cdots(102)$$

$$\varphi_{n+1\,l}=\frac{M_{n+1\,l}}{K_{n+1\,b}(a+b)} \quad \cdots\cdots(103)$$

次に上から第 n 番目の層の柱の上端曲げモーメントを M_{no}，その柱の剛度を K_{nc}，撓度を Ψ_n とすれば

$$M_{no}=K_{nc}(a\varphi_{nl}+b\varphi_{n+1\,l}+c\Psi_n) \quad \cdots\cdots(104)$$

玆に a, b, c は柱の兩端の斷面變化の狀態に依り適當に決定すべき常數であるが，これを考慮せざる時は $a=2$，$b=c=1$ である。(104) 式より

$$\Psi_n=\frac{M_{no}}{cK_{nc}}-(a\varphi_{nl}+b\varphi_{n+1\,l}) \quad \cdots\cdots(105)$$

從つて M_{nl}，M_{no} を曲げモーメント直線式より求めておけば (105) 式より Ψ_n が計算出來從つて又ラーメンの水平撓みをも (94) 及 (95) 式から知ることが出來る。

高層ならざるラーメンに對しては又前同樣「建築架構モーメント圖譜」又は "Ramentafeln" に依つて M_{nl} 及 M_{no} を直接求むる方が便利であり誤差が少い。

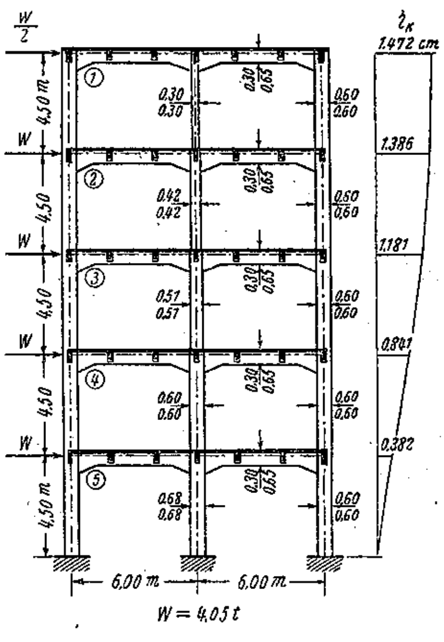
4.　計算例題

1.　2 張間 5 層ラーメン：　**圖-11** に示す 2 張間 5 層の鐵筋コンクリートラーメンを考へる。桁のハンチの影響は之を考慮せぬものとす。各柱の慣性モーメント (I)，長さ (l)，剛度 $\left(K=\frac{I}{l}\right)$ 及斷面積 (A) は **表-9** の如くであり又桁の大さは總て同一でありその I, l, K 及 A は次の如くである。

表-9.

部	材	I (cm⁴)	l (cm)	K (cm³)	A (cm²)
外側柱	1	1 080 000	450	2 400	60×60
	2	〃	〃	〃	〃
	3	〃	〃	〃	〃
	4	〃	〃	〃	〃
	5	〃	〃	〃	〃
內側柱	1	67 500	450	150	30×30
	2	259 000	〃	575.5	42×42
	3	563 000	〃	1 251	51×51
	4	1 080 000	〃	2 400	60×60
	5	1 780 500	〃	3 956	68×68

圖-11.



$I=1\,136\,000\ \mathrm{cm^4}$，$l=600\ \mathrm{cm}$，$K=1\,893\ \mathrm{cm^3}$，$A=30\times65\ \mathrm{cm^2}$

縱の小桁に依つて桁に傳へられる死荷重の質量は，中間の 5 本の小桁によるものは夫々 3.27 kg sec²/cm，端の縱桁に依るものは 6.54 kg sec²/cm とす。又このラーメンの彈性係數 E は鋼の 1/10 卽ち $E=210\,000\ \mathrm{kg/cm^2}$ とする。

本例題に於ては 5 層であり從つて曲げモーメントは曲げモーメント直線式に依らずに「建築架構モーメント圖譜」又は "Rahmentafeln" に依る方が直接求まりて便利であるので之によることゝし，$W=4.05$ t なる假定水平荷重に依るラーメンの撓を (90)～(95) 式に依て求むれば **表-10** の如くなる。

表中 M_{no} の値は外側柱に對するものである。

表-10.

n	M_{no} (t.m)	M_{nl} (t.m)	M_{nr} (t.m)	$2M_{nl}-M_{nr}$ (t.m)	φ_{nl} (kg/cm²)	$\frac{M_{no}}{K_{nc}}$ (kg/cm²)	$2\varphi_{nl}+\varphi_{n+1l}$ (kg/cm²)	Ψ_n (kg/cm²)	d'_n (cm)	η_{nk} (cm)
1	−1.73	1.73	1.41	2.05	36.1	− 72.1	168.5	− 240.6	0.086	1.472
2	−4.55	4.92	4.37	5.47	96.3	−189.6	383.6	− 573.2	0.205	1.386
3	−6.92	9.66	8.47	10.85	191.0	−288.3	664.2	− 952.5	0.340	1.181
4	−9.02	14.30	12.57	16.03	282.2	−375.8	909.3	−1 285.1	0.459	0.841
5	−9.11	17.04	14.49	19.59	344.9	−379.6	689.8	−1 069.4	0.382	0.382

次に各層に對する全荷重の質量を計算すれば，上から順に

$$M_1=39.6133,\quad M_2=44.5480$$
$$M_3=45.4848,\quad M_4=46.4950$$
$$M_5=47.6081$$

である（單位は總て kg sec²/cm)。

從つて　$\sum M\eta_k{}^2=274.6826$

又　$\sum W\eta_k=2\,025\times1.472+4\,050\,(1.386+1.181+0.841+0.382)=18\,330.3$

故にこのラーメンの振動週期は是等の値を (6) 式に代入して

$$T=2\pi\sqrt{\frac{274.6826}{18\,330.3}}=0.7691\ \mathrm{sec}$$

尙各床上に 500 kg/m² なる載荷のある場合は，ラーメンの間隔を 6 m と考ふる時は，各層に於けるこの載荷の質量は

$$\frac{500\times6\times12}{981}=36.6972\ \mathrm{kg\,sec^2/cm}$$

である。

從つてこの載荷のみに依る $\sum M\eta_k{}^2$ は

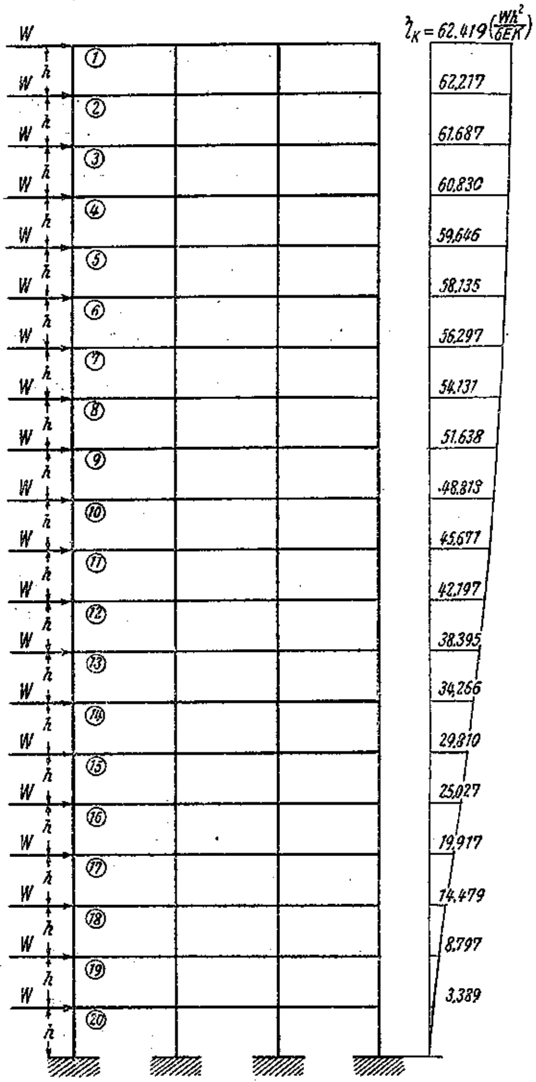
$$\sum M\eta_k{}^2=M\sum\eta_k{}^2=232.5061$$

故にこの載荷ある場合のラーメンの振動週期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{274.6826+232.5061}{18\,330.3}}=1.046\ \mathrm{sec}$$

同じ問題に就て Habel が正確なるラーメンの水平撓みを計算し，その上桁の變形に依るエネルギー及柱の質量の實際の分布をも考慮して求めたる結果は載荷

圖-12.



無き場合は 0.7916 sec 又載荷ある場合は 1.0779 sec である。著者の方法に依る結果の誤差は之に比較し夫々 2.8% 及 3.0% に過ぎぬ。

2. 3 張間 20 層ラーメン: **圖-12** の如き 3 張間 20 層ラーメンが各層に一様に M なる質量を擔ふ場合の第 1 次固有振動週期を求めてみる。但し，各柱及桁の剛度は總て K とす。

左側の全節點に水平荷重 W のかゝつた場合の，左側より第 2 列目の各柱の上端曲げモーメント及中央張間の桁の左端の曲げモーメントは，3 張間ラーメンの曲げモーメント直線式

$$M_{no}=-(0.1652n-0.0632)Wh \quad 及 \quad M_{nl}=(0.162n-0.1155)Wh$$

より求め，(90)～(95) 式に依つてラーメンの水平撓みを **表-11** の如く算出する。

表中 $n=19$ 及 $n=20$ の M_{no} 及 M_{nl} には，ラーメンの基礎固定のための影響を考へた補正値を示した。又 η_{nk} の値のうち括弧内の數値は撓角撓度法により正確に計算した結果を示すものである。

表-11. 係數 $M: Wh,\ \varphi\Psi: \dfrac{Wh}{K},\ d\eta: \dfrac{Wh^2}{6EK},\ \eta^2: \left(\dfrac{Wh^2}{6EK}\right)^2$

n	$-M_{no}$	M_{nl}	φ_{nl}	$2\varphi_{nl}+\varphi_{n+1l}$	$-\Psi_n$	d_n	η_{nk}	η_{nk}^2
1	0.1020	0.0465	0.0155	0.1005	0.202	0.202	62.419 (61.271)	3 896.131
2	0.2672	0.2085	0.0695	0.2625	0.530	0.530	62.217 (60.958)	3 870.955
3	0.4324	0.3705	0.1235	0.4245	0.857	0.857	61.687 (60.353)	3 805.286
4	0.5976	0.5325	0.1775	0.5865	1.184	1.184	60.830 (59.446)	3 700.289
5	0.7628	0.6945	0.2315	0.7485	1.511	1.511	59.646 (58.238)	3 557.645
6	0.9280	0.8565	0.2855	0.9105	1.838	1.838	58.135 (56.728)	3 379.678
7	1.0932	1.0185	0.3395	1.0725	2.166	2.166	56.297 (54.913)	3 169.352
8	1.2584	1.1805	0.3935	1.2345	2.493	2.493	54.131 (52.800)	2 930.165
9	1.4236	1.3425	0.4475	1.3965	2.820	2.820	51.638 (50.383)	2 666.483
10	1.5888	1.5045	0.5015	1.5585	3.147	3.147	48.818 (47.665)	2 383.197
11	1.7540	1.6665	0.5555	1.7205	3.474	3.474	45.671 (44.645)	2 085.840
12	1.9192	1.8285	0.6095	1.8825	3.802	3.802	42.197 (41.323)	1 780.586
13	2.0844	1.9905	0.6635	2.0445	4.129	4.129	38.395 (37.698)	1 474.176
14	2.2496	2.1525	0.7175	2.2065	4.456	4.456	34.266 (33.771)	1 174.159
15	2.4148	2.3145	0.7715	2.3685	4.783	4.783	29.810 (29.543)	888.636
16	2.5800	2.4765	0.8255	2.5305	5.110	5.110	25.027 (25.011)	626.351
17	2.7452	2.6385	0.8795	2.6925	5.438	5.438	19.917 (20.178)	396.687
18	2.9104	2.8005	0.9335	2.7713	5.682	5.682	14.479 (15.043)	209.641
19	2.8110	2.7130	0.9043	2.5969	5.408	5.408	8.797 (9.623)	77.387
20	1.8120	2.3650	0.7883	1.5766	3.389	3.389	3.389 (4.063)	11.485

表-11 の結果より，

$$\sum M\eta_k^2 = M\sum\eta_k^2 = 42\,114.129\left(\frac{Wh^2}{6EK}\right)^2\cdot M$$

$$\sum W\eta_k = W\sum\eta_k = 837.766\frac{Wh^2}{6EK}\cdot W$$

故に第 1 次固有振動週期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{42\,114.129}{837.766}\times\frac{Mh^2}{6EK}}$$

$$=18.183\sqrt{\frac{Mh^2}{EK}}$$

尙又 **表-11** 中の括弧內の η_{nk} の正確なる値に依つて計算すれば

$$T=17.957\sqrt{\frac{Mh^2}{EK}}$$

となるを以て，曲げモーメント直線式使用に依る誤差は僅かに 1.25% なることを知る。

3.　5 張間 25 層ラーメン：　Habel 氏が正確に計算した **圖-13** の如き 5 張間 25 層ラーメンを例にとつて，曲げモーメント直線式の使用に依るラーメンの水平撓みと Habel 氏の計算した結果とを比較せん。

このラーメンは各柱及桁が一樣なる剛度を有せず又桁には **圖-14** に示すやうなハンチを有するものである。

各部材の剛度 K，及桁の中央及兩端の慣性モーメント I_0 及 I_1 は **表-12** の如くである。

又左側の各節點に働く假定水平荷重 W は 3.3 t とする。但し最上層の節點に對しては $W/2=1.65$ t である。

このラーメンの彈性係數は鋼の 1/10 にとる。卽ち

$$E=210\,000\ \mathrm{kg/cm^2}$$

5 張間ラーメンの曲げモーメント直線式

$$M_{no}=-(0.102\,n-0.041)Wh \text{ 及}$$

$$M_{nl}=(0.0968\,n-0.0668)Wh$$

に依つて，左側から第 3 列目の柱の上端曲げモーメント及中央張間の桁の左端の曲げモーメントを計算し，次に是等の結果を (102) 及 (105) 式に代入することに依つて **表-14** に示す如くラーメンの水平撓み η_{nk} を出すことが出來る。但し最下層の 2 層に於ける M_{no} 及 M_{nl} には基礎固定に依る影響を考慮した補正値をとつた。

本例題に於ては **圖-10** に於ける γ は

$$\gamma=\frac{1.5}{6}=0.25$$

圖-13.

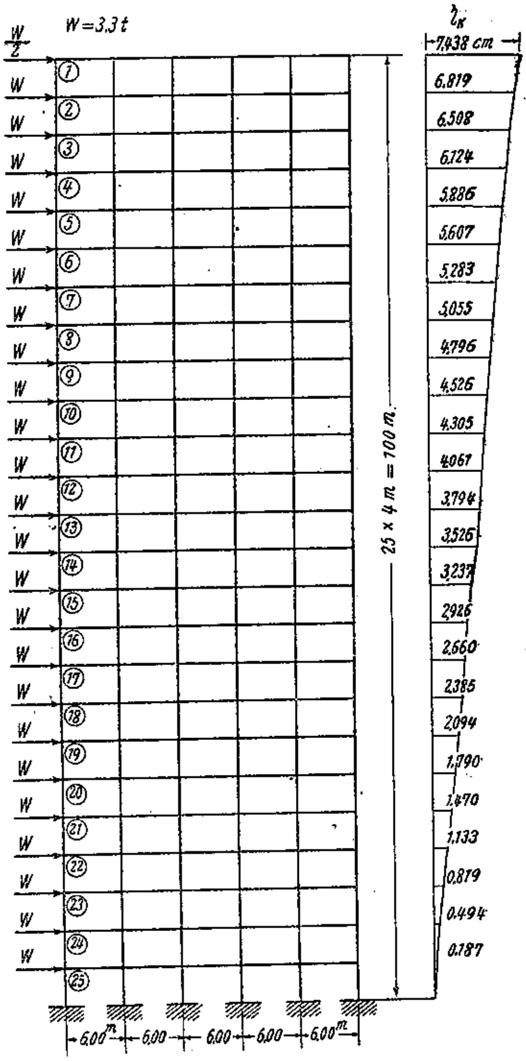


圖-14.

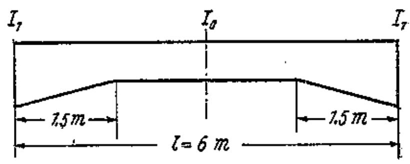


表-12.

n	外側柱 (2 本)	內側柱 (4 本)	桁		
	K (m³)	K (m³)	I_0 (m⁴)	I_1 (m⁴)	$K=I_0/l$ (m³)
1	0.0001 447	0.0000 43	0.0119 63	0.0287 5	0.0019 9384
2	0.0003 21	0.0002 3225	〃	〃	〃
3	0.0004 925	0.0003 175	〃	〃	〃
4	0.0005 63	0.0008 08	〃	〃	〃
5	0.0006 35	0.0009	〃	〃	〃
6	0.0008 95	0.0009 525	〃	〃	〃
7	0.0009 93	0.0019 9	〃	〃	〃
8	0.0011 07	〃	〃	〃	〃
9	0.0018 4	0.0022	0.0128 11	0.0321 55	0.0021 352
10	〃	0.0038 49	〃	〃	〃
11	〃	〃	〃	〃	〃
12	0.0027 4	〃	〃	〃	〃
13	〃	0 0045 8	〃	〃	〃
14	〃	〃	〃	〃	〃
15	〃	〃	〃	〃	〃
16	0.0051 9	0 0078 95	〃	〃	〃
17	〃	〃	0.0134 89	0.0355 4	0 0022 482
18	〃	〃	〃	〃	〃
19	0.0053 8	0.0082 025	〃	〃	〃
20	〃	〃	〃	〃	〃
21	〃	〃	〃	〃	〃
22	0.0087 7	0.0125 3	〃	〃	〃
23	〃	〃	〃	〃	〃
24	〃	〃	〃	〃	〃
25	〃	〃	〃	〃	〃

又 ρ の値は　$\rho=\frac{h_0}{h_1}\doteqdot\sqrt[3]{\frac{I_0}{I_1}}$

にして，上から第 8 番目迄の桁に對しては $\rho=0.745$，第 9 番目から第 16 番目迄の桁に對しては $\rho=0.735$，殘りの下方の桁に對しては $\rho=0.725$ である。

從つて是等の桁に對する (102) 式の a 及 b の値は **表-6** 及 **表-7** に依つて **表-13** に示す如くなる。

表-13.

n	γ	ρ	a	b	$a+b$
1～ 8	0.25	0.745	2.950	1.748	4.698
9～16	0.25	0.735	3.000	1.786	4.786
17～18	0.25	0.725	3 044	1.827	4.871

柱に對してはその兩端の斷面變化は之を考慮せざるものとし從つて (105) 式に於ける a，b 及 c は夫々 2，1 及 1 である。

表-14 中括弧內の數値は Habel 氏が正確に解いて求めたものであり然も桁のハンチの影響をも考慮したものである。曲げモーメント M_{no} 及 M_{nl} は勿論撓み η_{nk} に對しても，曲げモーメント直線式使用に依る結果と Habel 氏の結果とは實に良く近似してゐる。從つて玆に求めた η_{nk} を使用してこのラーメンの固有振動週期を

求むるも相當正確な結果を得られることは明かである。

表-14.

n	$-M_{no}$ (t.m)	M_{nl} (t.m)	φ_{nl} (t/m²)	$2\varphi_{nl}+\varphi_{n+1l}$ (t/m²)	$-\psi_n$ (t/m²)	d_n (cm)	η_{nk} (cm)
1	0.805 (0.328)	0.396 (0.280)	42.3	263.3	19 504.7	0.619	7.438 (6.728)
2	2.152 (1.571)	1.674 (1.172)	178.7	672.5	9 797.6	0.311	6.819 (6.475)
3	3.498 (2.800)	2.952 (2.064)	315.1	1 081.3	12 098.6	0.384	6.508 (6.245)
4	4.844 (4.457)	4.229 (3.692)	451.4	1 490.7	7 492.0	0.238	6.124 (5.967)
5	6.191 (5.684)	5.507 (5.047)	587.9	1 900.1	8 779.0	0,279	5.886 (5.751)
6	7.537 (6.747)	6.785 (6.356)	724.3	2 309.3	10 222.1	0.324	5.607 (5.496)
7	8.884 (8.648)	8.063 (7.709)	860.7	2 718.4	7 182.7	0.228	5.283 (5.213)
8	10.230 (9.810)	9.340 (9.062)	997.0	3 033.0	8 173.7	0.259	5.055 (4.989)
9	11.576 (10.430)	10.618 (10.217)	1 039.0	3 242.0	8 503.6	0.270	4.796 (4.739)
10	12.923 (13.060)	11.896 (11.680)	1 164.0	3 617.1	6 974.6	0.221	4.526 (4.489)
11	14.269 (14.310)	13.174 (13.330)	1 289.1	3 992.2	7 699.4	0.244	4.305 (4.269)
12	15.616 (14.710)	14.451 (14.340)	1 414.0	4 367.1	8 424.3	0.267	4.061 (4.026)
13	16.962 (16.641)	15.729 (15.495)	1 539.1	4 742.3	8 445.8	0.268	3.794 (3.769)
14	18.308 (17.775)	17.007 (16.921)	1 664.1	5 117 4	9 114.8	0.289	3.526 (3.506)
15	19.655 (19.006)	18.285 (18.133)	1 789.2	5 492.5	9 784.0	0.311	3.237 (3.223)
16	21.001 (20.027)	19.562 (19.369)	1 914.1	5 732.0	8 392.0	0.266	2.926 (2.918)
17	22.348 (21.080)	20.840 (20.631)	1 903.8	5 827.2	8 657.8	0.275	2.660 (2.658)
18	23 694 (23.360)	22.118 (22.300)	2 019.6	6 175.5	9 176.6	0.291	2.385 (2.386)
19	25.040 (24.045)	23.396 (22.988)	2 136.3	6 525.5	9 578.2	0.304	2.094 (2.098)
20	26.387 (25.690)	24.673 (24.695)	2 252.9	6 875.4	10 092.3	0.320	1.790 (1.797)
21	27.733 (26.980)	25.951 (26.060)	2 369.6	7 225.5	10 606.5	0.337	1.470 (1.479)
22	29.080 (28.740)	27.229 (27.300)	2 486.3	7 575.6	9 896.4	0.314	1.133 (1.146)
23	30.426 (29.317)	28.507 (28.259)	2 603.0	7 793.7	10 221.9	0.325	0.819 (0.831)
24	28.050 (28.700)	28.340 (28.868)	2 587.7	7 423 8	9 662.4	0.307	0.494 (0.503)
25	17.556 (16.348)	24.625 (24.112)	2 248.5	4 497.0	5 898 1	0.187	0.187 (0.188)

結　論

構造物の第 1 次固有振動週期はその耐震性を論ずるにあたり，最も重要なものであるが，之が實用的算定法としては (6) 式なるエネルギー法によるものである。その精度も相當高いもので 50 層の如き高層ラーメンに對してすら其の誤差は 0.65% 程度にすぎぬものである。

然れども尙假定水平荷重による水平撓みの計算を豫め行ふ必要があり相當の手數を要するものである。

著者がこのエネルギー法より誘導した (72) 式を用ふる時は，構造一樣なる多張間高層ラーメンに對しては，豫め假定荷重に依る撓みを計算することなしに直ちにその第 1 次固有振動週期を求むることが出來る。

又構造一樣ならざる多張間高層ラーメンに對しても，鷹部屋博士提案の曲げモーメント直線式を應用してその第 1 次固有振動週期を簡單に求めることが出來る。

桁の兩端の斷面變化を考慮したる場合の固有振動週期も亦著者が茲に提案せる方法に依り，桁の兩端の斷面變化

を考慮せざる場合と全く同様の簡易さを以て算定され得るものである。

而も是等の方法による結果は實用上充分なる精度を有するものである。

参考文獻：

1. K. Hohenemser und W. Prager: Dynamik der Stabwerke, Berlin: Verlag von Julius Springer 1933.
2. A. Habel: Berechnung der Wagerechten Grundschwingungen von Stockwerkrahmenbauten, Der Bauingenieur, 1935, s. 485.
3. Lord Rayleigh: Theory of Sound, Vol. I. P. 171.
4. 武藤　淸: 矩形架構の水平振動に就て, 建築雜誌昭和 4 年 12 月.
5. 水原　旭: On the Vibration Curves of High-Framed Structures, 萬國工業會議論文集昭和 4 年第 7 卷 P. 372.
6. 妹澤, 金井: Some New-Problems of Free Vibrations of a Structure, 地震研究所彙報 昭和 9 年 12 月.
7. 鷹部屋福平: A Speedy and Accurate Method of Wind Stress Calculation for High Storied Bents. 北大工學部紀要第 4 冊第 2 號. 昭和 12 年 12 月, 建築架構モーメント圖譜 II. 裳華房昭和 5 年. Rahmentafeln, Berlin, Verlag von Julius Springer 1930.
8. 三浦　耀: 剛節構理論, 丸善　昭和 4 年,
9. 各務一雄: 斷面の變化する材を有する架構の計算に就て, 建築雜誌 昭和 6 年 10 月.