講　　　演

第25卷第12號　昭和14年12月

接觸應力の一問題（引張られた平板中の圓形ボルトの問題）（第 2 報）

（昭和 14 年 10 月 19 日土木學會創立 25 周年記念講演會に於て）

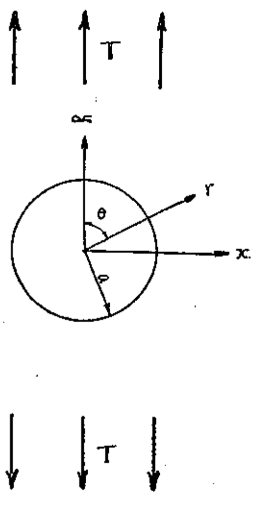
會員　　最上武雄*

要　旨　有限な接觸面を有する場合の接觸應力の問題の取扱方を引張られた平板中の圓形ボルトの問題を例として述べたものである。

數値的計算は目下續行中であるが，數値計算をしないでも分かる結論としては，平板中に圓形孔をあけそれに平板と等質の圓形塡充物をしたものを引張つた時には平板の部分と塡充物の間に隙間が出來るのであるが力の方向とその隙間の端とが孔の中央に於てなす角度 δ は力の大さにも板や塡充物の材料の彈性係數にも孔の半徑にも依らないが，隙間の大さの方は引張る力と孔の半徑に比例し材料の彈性係數に逆比例する。

1.　接觸應力の問題は古く Hertz が研究したのが最初で，其の取扱方も一般的であり，且つ美しいものである[1]。此の研究方法に基いて二，三の人が特殊の問題をやつてゐるのはあるが Hertz 流の解法は接觸面積が物體の linear dimension に比して非常に小さいと言ふ事を假定してゐるから接觸面積が可成り大きい場合にはこの方法は應用出來ない事は明らかな事である。又鋲が引張り材に塡つてゐる場合の應力分布問題も多くの人が手掛けてゐるが，前囘の報告で書いた通り完全に問題を解いたと云ふものはない樣である[2]。昨年の土木學會の年次講演會で谷本勉之助君が塡充物のある引張り材の問題をやつた時[3]に著者は此の點に就て注意したのであつたが，其の後自分で手掛けて見やうと思つてやり出したのである。第 1 報を土木學會誌第 25 卷第 4 號に出して置いたがそれには實に下らない誤りがあつた爲めに殆ど初めからやり直した。處がさうする事に依つて近似的ではなく嚴密に問題を解く事が出來た。しかし重複してゐる部分もあるから特に記號の説明等は第 1 報を御參照願ひ度い。尙ほ先日の講演にも又現在も數値計算及それに基く實驗の結果が間に合はなかつたからそれ等は次の機會に讓り度いと思ふ。又實際の鋲の作用に近い場合についても次いで計算を進めたいと思つてゐる。

圖-1.



2.　圖-1 の如き坐標に依り應力の方も變形も θ に就て一價である樣な Airy の應力函數を Michell の一般式[4]から拾つてその應力函數から應力の成分と變形の成分とを求めたものが第 1 報の (9)～(18) 式である。そして今は板と塡充物の材料は同じと考へたから (9)～(18)

* 工學士　東京帝國大學工學部助教授

(1) 例へば Love "E asticity" p. 193 et seq.

(2) 末廣恭二；機械學會誌第 17 卷第 34 號 p. 62, 横田成年：東京數學物理學會記事 8. 1915, p. 38, 妹澤克惟, 西村源六郎：航空研究所報告第 68 號, 谷本勉之助：土木學會第 2 年次學術講演會講演（昭和 13 年 7 月）又は土木學會誌第 25 卷第 6 號

(3) 谷本前出

(4) Michell Proc. London. Math. Soc. XXXI., p. 111 又は Coker & Filon: Photoelasticity, p. 375.

式で $E_1=E_2$, $\sigma_1=\sigma_2$ とすべきである。

3. 境界で滿さる可き諸條件に合ふ樣に式の中に入つて來る常數を決めなければならないのであるが，その條件を上げて見れば孔と塡充物とが離れてゐてもゐなくても應力は孔の境界で連續的に變つてゐる筈であるから

$$r=a \text{ で } \qquad \widehat{rr}_1=\widehat{rr}_2,\quad \widehat{r\theta}_1=\widehat{r\theta}_2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

又 θ の方向の變形は r の方向に比して非常に小さい筈であるが

$$(u_\theta)_2-(u_\theta)_1=\sum_{m=1}^{\infty} G_{2m}\sin 2m\theta=g(\theta)=V_1 \qquad \cdots\cdots(2)$$

とし r 方向の變形の u_r に就ては，孔と塡充物との間には隙間が出來るのであるから

$$(u_r)_2-(u_r)_1=f(\theta) \qquad \cdots\cdots(3)$$

と置いておく。そしてこの $f(\theta)$ を他の條件から決めるのである。又 u_r は θ に關して偶函數で，且つ $f(\theta)=f(\pi-\theta)$ であるから

$$(u_r)_2-(u_r)_1=f(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty} F_{2m}\cos 2m\theta=U_1 \qquad \cdots\cdots(4)$$

と置く事が出來やう。すると此の場合には F_{2m} を決める事になる。又平板は y 軸の方向に T なる引張り應力を受けてゐるのであるから

$$r\to\infty \text{ で } \quad \left.\begin{aligned} (\widehat{rr})_2&=\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\cos 2\theta \\ (\widehat{r\theta})_2&=-\frac{T}{2}\sin 2\theta \\ (\widehat{\theta\theta})_2&=\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

以上の條件より

$$\left.\begin{aligned} &2B_0=\frac{T}{2},\quad -2A_2=\frac{T}{2},\quad 2b_0=\frac{A_0}{a^2}+\frac{T}{2} \\ &-(1+\sigma)A_0+\frac{(1-\sigma)a^2}{2}T-2(1-\sigma)a^2b_0=\frac{aE}{\pi}\int_0^\pi f(\lambda)d\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

$$2a_2=6a^{-4}A_2'+4a^{-2}B_2'-\frac{T}{2}$$

$$2a_2+6a^2b_2=-6a^{-4}A_2'-2a^{-2}B_2'-\frac{T}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &2a(1+\sigma)a_2+2(3+\sigma)a^3b_2-2a^{-3}(1+\sigma)A_2'-2a^{-1}(-1+\sigma)B_2'+\frac{a(1+\sigma)}{2}T=-\frac{2E}{x}\int_0^\pi g(\lambda)\sin 2\lambda\, d\lambda \\ &2n^{-3}(1+\sigma)A_2'+4a^{-1}B_2'+\frac{a(1+\sigma)T}{2}+2a(1+\sigma)a_2+4a^3\sigma b_2=\frac{2E}{\pi}\int_0^\pi f(\lambda)\cos 2\lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \cdots(7)$$

$n\geqq 4$ に對して

$$\left.\begin{aligned} &a_n(n-1)a^{n-2}+b_n(n+1)(n-2)a^n=A_n'n(n+1)a^{-n-2}+B_n'(n-1)(n+2)a^{-n} \\ &a_nn(n-1)a^{n-2}+b_nn(n+1)a^n=-A_n'n(n+1)a^{-n-2}-B_n'n(n-1)a^{-n} \\ &n(1+\sigma)a^{-n-1}A_n'+(n-4+n\sigma)a^{-n+1}B_n'-n(1+\sigma)a^{n-1}a_n \\ &\qquad -(n+4n+n\sigma)a^{n+1}b_n=\frac{2E}{\pi}\int_0^\pi g(\lambda)\sin n\lambda\, d\lambda \\ &A_nn'(1+\sigma)a^{-n-1}+B_n'\{(n+2)+(n-2)\sigma\}a^{-n+1}+a_nn(1+\sigma)a^{n-1} \\ &\qquad +b_n\{(n-2)+(n+2)\sigma\}a^{n+1}=\frac{2E}{\pi}\int_0^\pi f(\lambda)\cos n\lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \cdots(8)$$

(6), (7), (8) 式を解くと

$$\left.\begin{aligned}
&A_0=-\frac{aE}{2\pi}\int_0^\pi f(\lambda)d\lambda,\quad B_0=\frac{T}{4},\quad b_0=\frac{T}{4}-\frac{E}{4a\pi}\int_0^\pi f(\lambda)d\lambda,\quad A_2=-\frac{T}{4}\\
&A_2'=\frac{a^2E}{4\pi}\int_0^\pi g(\lambda)\sin 2\lambda\,d\lambda,\quad B_2'=\frac{aE}{4\pi}\left\{\int_0^\pi f(\lambda)\cos 2\lambda d\lambda-\int_0^\pi g(\lambda)\sin 2\lambda\,d\lambda\right\}\\
&a_2=\frac{E}{2a\pi}\left\{\int_0^\pi f(\lambda)\cos 2\lambda\,d\lambda+\int_0^\pi g(\lambda)\sin 2\lambda\,d\lambda\right\}-\frac{T}{4},\quad b_2=-\frac{E}{4a^3\pi}\left\{\int_0^\pi f(\lambda)\cos 2\lambda d\lambda\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\int_0^\pi g(\lambda)\sin 2\lambda\,d\lambda\right\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

又 $n\geq 4$ に對して

$$\left.\begin{aligned}
&A_n'=-\frac{(n-2)a^{n+1}E}{4n\pi}\int_0^\pi f(\lambda)\cos n\lambda\,d\lambda+\frac{a^{n+1}E}{4\pi}\int_0^\pi g(\lambda)\sin n\lambda\,d\lambda,\\
&B_n'=\frac{a^{n-1}E}{4\pi}\int_0^\pi f(\lambda)\cos n\lambda d\lambda-\frac{a^{n-1}E}{4\pi}\int_0^\pi g(\lambda)\sin n\lambda\,d\lambda\\
&a_n=\frac{(n+2)a^{-n+1}E}{4n\pi}\int_0^\pi f(\lambda)\cos n\lambda\,d\lambda+\frac{a^{-n+1}E}{4\pi}\int_0^\pi g(\lambda)\sin n\lambda\,d\lambda,\\
&b_n=-\frac{a^{-n-1}E}{4\pi}\left\{\int_0^\pi f(\lambda)\cos n\lambda d\lambda+\int_0^\pi g(\lambda)\sin n\lambda\,d\lambda\right\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

第 1 報 (9), (11) 式又は第 1 報 (14), (16) 式に於て $r=a$ とし (9), (10) 兩式を代入し又 $f(\lambda)$ を (4) 式の如く書く事に依つて $r=a$ に於ける應力 $\widehat{rr}$ 及 $\widehat{r\theta}$ を書けば

$$\left.\begin{aligned}
&(\widehat{rr})_{r=a}=\frac{T}{2}+\left\{\frac{T}{2}-\frac{E}{2a}(F_2+G_2)\right\}\cos 2\theta-\frac{E}{2a}\sum_{n=2}^{\infty}\left(nF_{2n}+\frac{1}{2}G_{2n}\right)\cos 2n\,\theta=R_1\\
&(\widehat{r\theta})_{r=a}=\left(-\frac{T}{2}-\frac{E}{4a}F_2\right)\sin 2\theta-\frac{E}{4a}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{F_{2n}+2n\,G_{2n}\right\}\sin 2n\,\theta=S_1
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

處で板を T で引張つた時 $\theta=\delta$ まで開いたとすれば θ が $-\delta\leq\theta\leq\delta$, $\pi-\delta\leq\theta\leq\pi+\delta$ の時には

$$(\widehat{rr})_{r=a}=0,\quad (\widehat{r\theta})_{r=a}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

と云ふ條件を充たさなければならない。この條件を充たす爲めには $-\delta\leq\theta\leq\delta$, $\pi-\delta\leq\theta\leq\pi+\delta$ では 0 に等しく，その他の θ に對しては夫々 R_1 又は S_1 に等しい樣な函數 R 及 S を Fourier の定理を應用する事に依り作製して，その作つたものが再び夫々 R_1 又は S_1 に等しくなる樣に未定であつた F_{2n} を決定する。卽ち

$$\left.\begin{aligned}
&R=R_0+\sum_{m=1}^{\infty}R_{2m}\cos 2m\,\theta\\
&S=\sum_{m=1}^{\infty}S_{2m}\sin 2m\,\theta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned}
&R_0=\frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi-\delta}R_1\,d\theta\\
&R_{2m}=\frac{2}{\pi}\int_\delta^{\pi-\delta}R_1\cos 2m\,\theta\,d\theta\\
&S_{2m}=\frac{2}{\pi}\int_\delta^{\pi-\delta}S_1\sin 2m\,\theta\,d\theta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

之を計算すると

$$R=\frac{T}{2}-\frac{\delta T}{\pi}-\frac{T}{\pi}\sin 2\delta\cos 2\theta-\frac{T}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin 2n\delta\cos 2n\theta}{n}-\frac{\sin 2\delta}{\pi}\left\{\frac{T}{2}-\frac{E}{2a}(F_2+G_2)\right\}$$
$$+\left\{\frac{T}{2}-\frac{E}{2a}(F_2+G_2)\right\}\cos 2\theta-\frac{2\delta}{\pi}\left\{\frac{T}{2}-\frac{E}{2a}(F_2+G_2)\right\}\cos 2\theta$$
$$-\frac{\sin 4\delta}{2\pi}\left\{\frac{T}{2}-\frac{E}{2a}(F_2+G_2)\right\}\cos 2\theta-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{T}{2}-\frac{E}{2a}(F_2+G_2)\right\}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\sin 2(1-n)\delta}{1-n}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin 2(1+n)\delta}{1+n}\right\}\cos 2n\theta+\frac{E}{2a\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(F_{2n}+\frac{1}{2n}G_{2n}\right)\sin 2n\delta$$
$$+\frac{\delta E}{2\pi a}\sum_{n=2}^{\infty}\left(nF_{2n}+\frac{1}{2}G_{2n}\right)\cos 2n\theta-\frac{E}{2a}\sum_{n=2}^{\infty}\left(nF_{2n}+\frac{1}{2}G_{2n}\right)\cos 2n\theta$$
$$+\frac{E}{4a\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(F_{2n}+\frac{1}{2n}G_{2n}\right)\sin 4n\delta\cos 2n\theta+\frac{E}{2\pi a}\sum_{n=2}^{\infty}\left(nF_{2n}+\frac{1}{2}G_{2n}\right)\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}+\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}\cos 2\theta$$
$$+\frac{E}{2\pi a}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{m=2\\m\neq n}}^{\infty}\left(mF_{2m}+\frac{1}{2}G_{2m}\right)\left\{\frac{\sin 2(n-m)\delta}{n-m}+\frac{\sin 2(n+m)\delta}{n+m}\right\}\cos 2n\theta\cdots\cdots(15)$$

$$S=\left\{\left(-\frac{T}{2}-\frac{E}{4a}F_2\right)-\frac{2\delta}{\pi}\left(-\frac{T}{2}-\frac{E}{4a}F_2\right)+\frac{\sin 4\delta}{2\pi}\left(-\frac{T}{2}-\frac{E}{4a}F_2\right)\right\}\sin 2\theta$$
$$-\frac{E}{4a}\sum_{n=2}^{\infty}(F_{2n}+2nG_{2n})\sin 2n\theta+\frac{\delta E}{2\pi a}\sum_{n=2}^{\infty}(F_{2n}+2nG_{2n})\sin 2n\theta$$
$$-\frac{E}{8a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(F_{2n}+2nG_{2n})\sin 4n\delta}{n\pi}\sin 2n\theta$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{T}{2}-\frac{E}{4a}F_2\right)\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{\sin 2(1-n)\delta}{1-n}-\frac{\sin 2(1+n)\delta}{1+n}\right\}\sin 2n\theta$$
$$+\frac{E}{4a\pi}\sum_{n=2}^{\infty}(F_{2n}+2nG_{2n})\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}-\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}\sin 2\theta$$
$$+\frac{E}{4a\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{m=2\\m\neq n}}^{\infty}(F_{2m}+2mG_{2m})\left\{\frac{\sin 2(m-n)\delta}{m-n}-\frac{\sin 2(m+n)\delta}{m+n}\right\}\sin 2n\theta\cdots\cdots(16)$$

故に$R=R_1$, $S=S_1$ と置く事に依つて

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(F_{2n}+\frac{1}{2n}G_{2n}\right)\sin 2n\delta=\delta+\frac{\sin 2\delta}{2}-\frac{\sin 2\delta}{2}(F_2+G_2)\cdots\cdots(17)$$

$$\delta+\sin 2\delta+\frac{\sin 4\delta}{4}-\left(\delta+\frac{\sin 4\delta}{4}\right)(F_2+G_2)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(nF_{2n}+\frac{1}{2}G_{2n}\right)\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}+\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}\cdots\cdots(18)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{m=2\\m\neq n}}^{\infty}\left(mF_{2m}+\frac{1}{2}G_{2m}\right)\left\{\frac{\sin 2(n-m)\delta}{n-m}+\frac{\sin 2(n+m)\delta}{n+m}\right\}=\left(n\delta-\frac{n\pi}{2}+\frac{\sin 4n\delta}{4}\right)\left(F_{2n}+\frac{1}{2n}G_{2n}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}+\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}(F_2+G_2)-\frac{\sin 2n\delta}{n}-\frac{\sin 2(n-1)\delta}{2(n-1)}-\frac{\sin 2(n+1)\delta}{2(n+1)},\quad n\geq 2\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(F_{2n}+2nG_{2n})\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}-\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}=\frac{\sin 4\delta}{4}-\delta-\left(\frac{\delta}{2}-\frac{\sin 4\delta}{8}\right)F_2\cdots\cdots(20)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{m=2\\m\neq n}}^{\infty}(F_{2m}+2mG_{2m})\left\{\frac{\sin 2(m-n)\delta}{m-n}-\frac{\sin 2(m+n)\delta}{m+n}\right\}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}-\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}F_2$$
$$-\left(\delta-\frac{\sin 4n\delta}{4n}\right)(F_{2n}+2nG_{2n})-\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}-\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\},\quad n\geq 2\cdots\cdots(21)$$

(17)～(21) 式を處理するのに (17), (18), (20) 式より F_{2m} を消去すれば

$$-\frac{3}{4}\sum_{n=2}^{\infty}G_{2n}\left\{\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n-1}+\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n+1}\right\}-\frac{\cos 2\delta}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin 2n\delta}{n}G_{2n}$$

$$+2\sin 2\delta\sum_{n=2}^{\infty}G_{2n}\cos 2n\delta+\delta G_2-\frac{\sin 4\delta}{4}G_2$$

$$=3\delta-2\delta\cos 2\delta-\frac{3\sin 4\delta}{4}+\sin 2\delta \quad\cdots\cdots(22)$$

を得る。又 (19), (21), (17) 式を用ひて

$$F_{2n}=\frac{4\delta\cos 2n\delta}{n\pi}+\frac{6\sin 2\delta\cos 2n\delta}{n\pi}-\frac{2\sin 2n\delta}{n^2\pi}-\frac{3\sin 2(n-1)\delta}{n(n-1)\pi}-\frac{3\sin 2(n+1)\delta}{n(n+1)\pi}$$

$$-G_2\left\{\frac{2\sin 2\delta\cos 2n\delta}{n\pi}-\frac{\sin 2(n-1)\delta}{n(n-1)\pi}-\frac{\sin 2(n+1)\delta}{n(n+1)\pi}\right\}$$

$$-G_{2n}\left\{\frac{4n\delta}{\pi}-\frac{\sin 4n\delta}{\pi}-\frac{\delta}{n\pi}+\frac{1}{2n}+\frac{\sin 4\delta}{4n^2\pi}\right\}$$

$$+\frac{1-4n^2}{2n\pi}\sum_{\substack{m=2\\m\neq n}}^{\infty}G_{2m}\left\{\frac{\sin 2(n-m)\delta}{n-m}+\frac{\sin 2(n+m)\delta}{n+m}\right\}$$

$$-\frac{\cos 2n\delta}{n\pi}\sum_{m=2}^{\infty}G_{2m}\frac{\sin 2m\delta}{m}+\frac{4\cos 2n\delta}{\pi}\sum_{\substack{m=2\\m\neq n}}^{\infty}G_{2m}\sin 2m\delta,\quad n\geq 2 \quad\cdots\cdots(23)$$

この F_{2n} を (17) 式に代入して F_2 を出せば

$$F_2=\phi(\delta)+\psi(\delta, G_{2t}) \quad\cdots\cdots(24)$$

の形に解く事が出來る。但し簡單の爲めに (17)〜(24) 式に於ては $\dfrac{\alpha T}{E}$ なる項を省いてある。つまり $F_{2t}\dfrac{\alpha T}{E}$, $G_{2t}\dfrac{\alpha T}{E}$ の代りに夫々 F_{2t}, G_{2t} の如く書いてある。以上分かる様に應力の條件 (12) 式と應力及變形のつながりの條件に依つて u_r の方に關係する F_{2t} は總べて δ と G_{2t} であらはされた事になり G_{2t} に對しては (22) 式の條件がもう一つ必要になる。さて G_{2t} に對する他の條件は如何なるものがあるであらうか，それには歪エネルギー最小の條件を持つて來ればよい。第 1 報 (58) 式に依り考ふべき歪エネルギーは b_0, a_{2n}, b_{2n}, A'_{2n}, B'_{2n} であらはされ，それ等が又 (9), (10) 式に依り F_{2t}, G_{2t} で書く事が出來，そして尙 F_{2t} が δ と G_{2t} で書き改ためられるのであるから結局歪エネルギー W は

$$W=W(\delta, G_{2t}) \quad\cdots\cdots(25)$$

の形となる。それ故に

$$\frac{\partial W}{\partial G_{2t}}=0,\qquad i=1,\ 2,\quad\cdots\cdots(26)$$

を (22) 式と共に G_{2t} 對する條件とする事が出來る。そしてその關係に依り

$$G_{2t}=\mathfrak{G}_{2t}(\delta) \quad\cdots\cdots(27)$$

なる關係が求められたとすればそれ等の値を (23), (24) 式に代入すれば

$$F_{2t}=\mathfrak{F}_{2t}(\delta) \quad\cdots\cdots(28)$$

の形が求められる筈である。さて孔と塡充物とくつついてゐる處では (4) 式の $f(\theta)\equiv 0$ であるから

$$(u_r)_2-(u_r)_1=U_1=\left\{\begin{array}{ll} f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}\cos 2n\theta & 0\leq\theta\leq\delta \\ 0 & \delta\leq\theta\leq\pi-\delta \\ f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}\cos 2n\theta & \pi-\delta\leq\theta\leq\pi \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(29)$$

の様な函數を Fourier の級數を使つて作つて見れば應力の場合と全く同様にして

$$
\left.
\begin{aligned}
&0=2\delta f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\delta}{n}f_{2n}\\
&F_{2i}=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{\sin 2i\delta}{i}f_0+\Big(\delta+\frac{\sin 4i\delta}{4}\Big)f_{2i}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ m\neq i}}^{\infty}f_{2m}\Big\{\frac{\sin 2(m-i)\delta}{m-i}+\frac{\sin 2(m+i)\delta}{m+i}\Big\},\quad i\geq 1
\end{aligned}
\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(30)
$$

と言ふ事が必要になる。(30) 式を δ と f_{2i} $(i\geq 0)$ について解けばどこまで塡充物がくつついてゐるかと言ふ δ が分かり，又離れてゐる處の有樣 f_{2i} $(i\geq 0)$ も分かる。(29), (30) 式に於ても F_{2i}, f_{2i} については $\dfrac{aT}{E}$ なる項を省いて書いてある。

これが省けると言ふ事は δ は彈性係數にも引張り應力にも孔の半徑にも無關係であり，孔と塡充物との離れる度合は孔の半徑及引張り應力に比例し，彈性係數に逆比例すると云ふ事をあらはしてゐる。