講　　演

第25巻第12號　昭和14年12月

4連モーメント定理による架構の振動問題の解法に就て

（昭和14年10月19日土木學會創立25周年記念講演會に於て）

會員　岡　本　舜　三*

要旨　振動する物體の慣性抵抗を外力と看做して，4連モーメント定理の荷重項を計算し動力學的4連モーメント定理を導きこの定理を架構の各部材に適用することによつて，振動の純理論的解法を簡易化し得る事を示し終りに數種の實例を示し演算を明かにしたものである。

1. 緒　　言

土木及建築構造物をはじめ其の他の構造のうちで架構をなすものは甚だ多く，從つて架構の性質は極めて重要であるために，各方面から研究が進められてゐる。架構の振動に關する研究は殊に耐震上から必要であるが數理的研究は其の解法が餘りに複雜であるために，嚴密解の他に種々の近似解が試みられてゐる。出來得れば純理論的解を得たいのであるが，それを近似解を以て滿足してゐるのは從來の純理論的解法が複雜にして，その計算遂行の煩に耐へない爲である。例へば最も簡單なる架構（圖-8）について純理論的解を示せば，部材 AB, BC, CD の各々について振動の微分方程式（4次偏微分方程式）を解き，その解が含んでゐる4個づつの積分常數を格點及固定點における條件によつて定めるのであつて，12個の積分常數を求むる爲に12個の聯立方程式を解かねばならぬ（但し左右對稱の性質がある場合は6個に減ずる）。之だけでも可なり困難である。まして高層多連な架構に於てはこの方法を以てしては實際上の運算は不可能であらう。それ故に之等の架構はすべて近似解のみによつて解かれてゐるのであるが[1]，著者は4連モーメント定理と D'Alembert の原理とを應用することによつて，純理論的解法を簡易化し從つてその利用範圍を擴張することを得た。本文はその方法の理論のみを述べたもので，應用編は完備をまつて後日發表する心算である。猶この研究に於ては，從來の數理的研究が多くそうである如く，次の性質を假定してゐる。

a) 變形に關する假定

部材が完全彈性體なること。
部材と部材とは其の接合點に於て完全に剛結せらるゝこと。
彎曲による徑間の變長は零であること。
剪力による變形は零であること。
直應力による部材の變長は零なること。

b) 振動に關する假定

剪力及 rotaryinertia の影響を無視す。
軸壓力の影響を無視す。
摩擦を無視し振動は減衰せざるものとす。

---

*　道路技師兼土木技師　工學士　愛媛縣土木課勤務

1)　1聯1層，2聯1層，1層無限多連，架構に就ては嚴密解が求められた

振動は單弦運動をなすものとす。

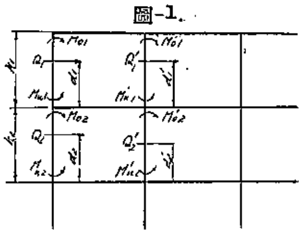
しかし實際に於ては純粋に彈性學的諸性質を有して居らない場合や減衰性や非單弦性を有せぬ場合も尠くなく，しかも之等の性質が振動に及ぼす影響殊に共振れに及ぼす影響が無視出來ない事は既知の事實であるから，この計算の結果がどの程度に眞實性を有するかについては後日の研究にまたねばならないと思ふ。

理論の概要を略述せんに先づ複雑なる架構の靜力學的解法を見るに，その解法の要領は格點における條件を出來るだけ多く，僅かな式の中に完全に含ませてしまふ事によつて，式の數を減ぜんとするものである。Bleich 教授によつて提唱された 4 連モーメント定理はすべての彈性條件を廻轉角方程式と，4 個の格點モーメント間の關係を示す一條件式とにまとめて，式の數を減ぜしめたものであるが，著者はこの方法を振動する架構の彈性條件に適用した。唯この場合異るのは靜力學的問題に於ける荷重が靜荷重なるに反し，振動問題に於ては慣性抵抗 (Trägheitwiderstand) なることである。即ち D'Alembert の原理[2] を適用して慣性抵抗を荷重と看做せば，之に 4 連モーメント定理を適用することが出來ることは振動問題に於ても，靜力學的問題に於ける如き巧妙なる解法の存在し得る事を示すものである。この考のもとに著者は 4 連モーメント式の荷重項に慣性抵抗を置換へる事によつて，動力學的 4 連モーメント式とも稱すべき一基本式を導き猶その中に含まるべき 7 個の函數の數表を作製し，之を用ひて，高層多聯なる架構の振動の純理論的解法に應用せんとするのである。この解法を以てしても計算は猶かなり繁雑である。しかし從來の方法を以てしては殆ど不可能であつた事を可能にしたこと及計算を機械化して思考上の誤算の生ずる餘地なからしめた事及近似式を導くことが出來たことの 3 點に特徴を認められると考へられて居る。

この論文の發表に就ては恩師山口昇先生の御援助による所多く厚く御禮申し上げる次第である。

2. 4 連モーメント定理による架構の解法[3]

圖-1.



準備として先づ靜力學的荷重を受くる架構の 4 連モーメント定理による解法を略記する。

(i) 平衡條件式[4]

圖-1 の架構に於てその平衡條件式は次の如くなる。

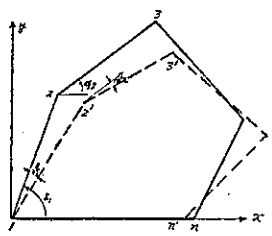
各格點に於て　$\sum$（格點モーメント）$=0$ ………… (1)

最上階に就て　$\sum(M_{0.1}-M_{u.1})+\sum Q_1 d_1=0$ ………… (2)

他の階に就て　$\sum\frac{1}{h_n}\left\{(M_{0.n}-M_{u.n})+Q_n d_n\right\}$

+（上階の總ての Q の和）$=0$ …… (3)

圖-2.



こゝに M_0 及 M_u は柱の上端及下端に働く彎曲率で，圖-1 の如き方向を正とし，Q は水平外荷重で左側より右向に働く時を正とす。この外に垂直荷重が作用しても式に變化はない。

(ii) 廻轉角方程式

圖-2 の如き閉繞ラーメン〔1. 2. 3 …… n. 1〕が變形後〔1. 2′. 3′ …… n″ 1〕となる時の廻轉角方程式は次の如くなる。

---

2) D'Alembert の原理の思想については Planck 氏著"一般力學"參照

3) 鶴岡工學士譯 4 連モーメント定理とその應用

4) この式の導出に就ては鷹部屋博士著"架構新論"を參照

$$\left.\begin{aligned}\sum\Delta l\cdot\cos\alpha+\sum\vartheta\cdot l\cdot\sin\alpha=0\\ \sum\Delta l\cdot\sin\alpha-\sum\vartheta\cdot l\cdot\cos\alpha=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

こゝに α は變形前の部材の方向を示す角で，部材の若い番號を付した端に於て其の部材が x 軸の正方向より counter clockwise に向ふを正とす。ϑ は部材の廻轉角を示す角で，若い番號を付した端に於て部材が clockwise に廻轉せる場合を正とす。Δl は部材の變長を示し伸張を正とす。

部材の伸張を無視せる時は

$$\left.\begin{aligned}\sum\vartheta\cdot l\sin\alpha=0\\ \sum\vartheta\cdot l\cos\alpha=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4')$$

(iii) 4 連モーメント定理 (Viermomentensatz)

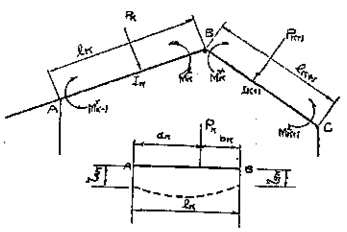
圖-3 の如き 1 連の部材の彈性變形及モーメントの間には次の關係が存在す。

$$M^r_{k-1}l'_k+2M^l_k l'_k+2M^r_k l'_{k+1}+M^l_{k+1}l'_{k+1}-6EJ(\vartheta_k-\vartheta_{k+1})=N_k+N'_{k+1}\quad\cdots\cdots(5)$$

$$\text{但し}\quad l\frac{J}{I}=l'\quad\cdots\cdots(6)$$

こゝに l_k, l_{k+1} は部材長, I_k, I_{k+1} は部材斷面二次率, J は任意の斷面二次率, M^r_{k-1}, $M^l_k M^r_k M^l_{k+1}$ は格點モーメントにして部材の內側に張力を生ぜしむる方向を正とす。N_k 及 N'_{k+1} は荷重による項にして 圖-3 の如き單一荷重の場合は次式となる。

圖-3.



$$N_k=-P_k a_k l'_k\left(1-\frac{a^2_k}{l^2_k}\right)\quad\cdots\cdots(7)$$

$$N'_k=-P_k b_k l'_k\left(1-\frac{b^2_k}{l^2_k}\right)\quad\cdots\cdots(8)$$

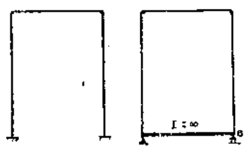
こゝに荷重の方向は外側より內側へ向ふ方向を正とし，外荷重の方向への撓度を正の撓度とす。

B 點に集まる部材の數が 2 本のみなる時は (5) は Clapeyron の 3 連モーメント定理となる。

$$M_{k-1}l'_k+2(l'_k+l'_{k+1})M_k+M_{k+1}l'_{k+1}-6EJ(\vartheta_k-\vartheta_{k+1})=N_k+N'_{k+1}\quad\cdots\cdots(9)$$

(注意　平衡條件式に於ける 圖-1 の左端の柱に於ける彎曲率の正の方向と 4 連モーメント式の彎曲率の正の方向とは相反する故定理を適用する場合注意を要す)。

圖-4.



以上の 3 條件を圍繞ラーメンに適用すれば之を解くことが出來る。開口ラーメンにこの定理を適用する時は適當なる補助部材を加へて之を圍繞ラーメンとする。例へば 圖-4 の左例の開口ラーメンは斷面二次率 ∞ なる部材 A B を加へることによつて圍繞ラーメンと考へることが出來る。

3. 動力學的 4 連モーメント定理

剛性率 EI 單位長さ當り質量 m なる斷面一樣なる棒の撓み振動の方程式は前述の假定により次式となる。

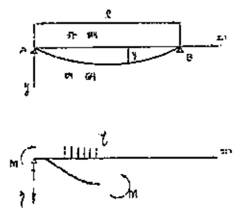
$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\quad\cdots\cdots(10)$$

こゝに x は坐標, t は時間, y は撓度で內側に向ふものを正とす (圖-5)。之を解くに

$$y=\eta\sin(pt+\varepsilon)\quad\cdots\cdots(11)$$

とおけば

圖-5.



$$EI\frac{d^4\eta}{dx^4}=mp^2\eta \quad\cdots\cdots(12)$$

にしてその解は

$$\eta=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x+C\sinh\lambda x+D\cosh\lambda x \quad\cdots\cdots(13)$$

$$\text{但し}\quad \lambda^4=\frac{mp^2}{EI} \quad\cdots\cdots(14)$$

こゝに $p/2\pi$ は振動數，ε は位相差，η は振幅を示す。$A\ B\ C\ D$ は積分常數であつて A 點及 B 點における撓度を η_a η_b, モーメントを M_a, M_b, なる如く定むれば次の如くなる。

$$A=-\frac{1}{2}\left(\eta_a+\frac{M_a}{EI\lambda^2}\right)\cot\phi+\frac{1}{2}\left(\eta_b+\frac{M_b}{EI\lambda^2}\right)\operatorname{cosec}\phi \quad\cdots\cdots(15)$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\eta_a+\frac{M_a}{EI\lambda^2}\right) \quad\cdots\cdots(16)$$

$$C=-\frac{1}{2}\left(\eta_a-\frac{M_a}{EI\lambda^2}\right)\coth\phi+\frac{1}{2}\left(\eta_b-\frac{M_b}{EI\lambda^2}\right)\operatorname{cosech}\phi \quad\cdots\cdots(17)$$

$$D=\frac{1}{2}\left(\eta_a-\frac{M_a}{EI\lambda^2}\right) \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\text{但し}\quad \phi=l\lambda \quad\cdots\cdots(19)$$

圖-5 の如き方向に諸量を定むれば

$$q=EI\frac{d^4\eta}{dx^4}\qquad\qquad M=-EI\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

なる故 (12) 式は荷重は慣性抵抗 $mp^2\eta$ に等しいことを示してゐる。即ち振動する部材には $q=mp^2\eta$ なる分布荷重が作用してゐると看做し (7), (8) 兩式によつて荷重項 N を計算することが出來る。

$$N_k=-m_kp^2l'_k\int_0^l\eta_kx_k\left(1-\frac{x^2_k}{l^2_k}\right)dx^k \quad\cdots\cdots(20)$$

$$N'_k=-m_kp^2l'_k\int_0^l\eta_k(l_k-x_k)\left\{1-\frac{(l_k-x_k)^2}{l'_k}\right\}dx_k \quad\cdots\cdots(21)$$

この式の η に (13) 式を代入し，$A\ B\ C\ D$ に (15)～(18) 式を代入して整理すれば次式となる。

$$-N_k=\frac{6EJ}{l}(f_5\eta_a+f_6\eta_b)+l'(f_8M_a+f_7M_b) \quad\cdots\cdots(22)$$

$$-N'_k=\frac{6EJ}{l}(f_6\eta_a+f_5\eta_b)+l'(f_7M_a+f_8M_b) \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\text{但し}\quad f_5=\frac{\phi}{2}(\operatorname{cosec}\phi+\operatorname{cosech}\phi)-1 \quad\cdots\cdots(24)$$

$$f_6=1-\frac{\phi}{2}(\cot\phi+\coth\phi) \quad\cdots\cdots(25)$$

$$f_7=\frac{3}{\phi}(\coth\phi-\cot\phi)-2 \quad\cdots\cdots(26)$$

$$f_8=\frac{3}{\phi}(\operatorname{cosec}\phi-\operatorname{cosech}\phi)-1 \quad\cdots\cdots(27)$$

部材 k に關する f の値を $f_{7.k}$, 部材 $k+1$ に關する f の値を $f_{7.k+1}$ の如く示し，部材に直角なる格點の變位を部材 k, $k+1$, に就き 夫々 $\eta_{a.k}$, $\eta_{b.k}$, $\eta_{b.k+1}$, $\eta_{c.k+1}$ を以て示し，(22，(33) 兩式を (5) 式に代入して整理すれば次式を得る (圖-3)。

$$M^r{}_{k-1}l_k'(1+f_{8,k})+M^l{}_k l'_k(2+f_{7,k})+M^r{}_k l'_{k+1}(2+f_{7,k+1})+M^l{}_{k+1}l'_{k+1}(1+f_{8,k+1})$$

$$+6EJ\left\{\frac{\eta_{a,k}}{l_k}(1+f_{5,k})+\frac{\eta_{b,k}}{l_k}(f_{6,k}-1)+\frac{\eta_{b,k+1}}{l_{k+1}}(f_{6,k+1}-1)+\frac{\eta_{c,k+1}}{l_{k+1}}(1+f_{5,k+1})\right\}=0\cdots\cdots\cdots(28)$$

本式は 2 連の桁の間の各格點モーメント及 3 個の格點の撓度との關係を示す彈性條件式であつて，M 及 η の係數は ϕ の函數である。本式を動力學的 4 連モーメント定理と名付ける。B 點に集まる部材の數が 2 本のみなる時は

$$M^r{}_{k-1}l'_k(1+f_{8,k})+M_k\{l_k'(2+f_{7,k})+l'_{k+1}(2+f_{7,k+1})\}+M^l{}_{k+1}l'_{k+1}(1+f_{8,k+1})$$

$$+6EJ\left\{\frac{\eta_{a,k}}{l_k}(1+f_{5,k})+\frac{\eta_{b,k}}{l_k}(f_{6,k}-1)+\frac{\eta_{b,k+1}}{l_{k+1}}(f_{6,k+1}-1)+\frac{\eta_{c,k+1}}{l_{k+1}}(1+f_{5,k+1})\right\}=0\cdots\cdots\cdots(29)$$

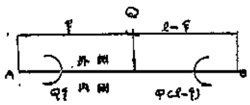
平衡條件式における Q 及 Qd, $Q(l-d)$ も夫々下式を以て置換へることが出來る。

$$Q=mp^2\int_0^l \eta dx$$

$$Qd=mp^2\int_0^l \eta x dx$$

$$Q(l-d)=mp^2\int_0^l \eta(l-x)dx$$

圖-6.



而してその方向は 圖-6 に示す方向を正とす。η に (13) 式を代入し，A B C D に (15)〜(18) 式を代入して整理すれば

$$Q=\frac{EJ}{l^2l'}f_1(\eta_a+\eta_b)+\frac{1}{l}f_2(M_a+M_b)\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$Q\xi=\frac{EJ}{ll'}(f_3\eta_a+f_4\eta_b)+f_5M_a+f_6M_b\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$Q(l-\xi)=\frac{EJ}{ll'}(f_4\eta_a+f_3\eta_b)+f_6M_a+f_5M_b\cdots\cdots\cdots(32)$$

但し $f_1=f_3+f_4\cdots\cdots\cdots(33)$

$f_2=f_5+f_6\cdots\cdots\cdots(34)$

$$f_3=\frac{\phi^3}{2}(\operatorname{cosec}\phi-\operatorname{cosech}\phi)\cdots\cdots\cdots(35)$$

$$f_4=\frac{\phi^3}{2}(\coth\phi-\cot\phi)\cdots\cdots\cdots(36)$$

$f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ は ϕ のみの函數でその値は **表-1** に示す。$\phi=0$ に於て 0 にして $\phi=\pi$ に於て急激に ∞ に增大す。

4. 振動問題の解法

之までに述べた平衡條件式 ((2), (3) 兩式に (31), (32) を代入せる式)，廻轉角方程式 (4′) 及動力學的 4 連モーメント式 ((28) 或は (29) 式) の 3 式を架構に適用すれば振動を解くに必要にして充分なる總ての條件式を導くことが出來る。

この式は格點モーメント及撓度の一次方程式であつて，之等の聯立一次方程式を解いて撓度及モーメントを求めることが出來る。自由振動週期を求むるには固定點に於ける撓度を零とおきて得る聯立方程式からモーメント及

撓度を消去して Eigenwert を求むれば良い。高級な架構に於ては Eigenwert を求むべき式は複雑となる故, 適當なる ϕ を假定し, 係數によつて作らるゝ determinant を計算し, 之を 0 ならしむる如き ϕ を試案的に定めることが出來る。この場合 表-1 を用ひれば便利である。地盤が單弦振動を繼續してゐる樣な簡單なる强制振動による應力を求むるには地盤との固定點の撓度を, 强制振動の振幅に等しくとり $p/2\pi$ の値を强制振動の振動數に等しく置いて聯立方聯式を解くことによつてモーメント及撓度を得る。この場合にも 表-1 を利用すれば便利である。

解法を實例によつて示す爲に次に二, 三の適用例を掲げる。

(a) **兩端固定桁**

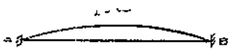
兩端固定桁の自由振動週期を求むる爲に斷面二次率 ∞ なる補助部材を考へ, A B A に對して (29) 式を適用す。(圖-7) 補助部材に對しては $l'=0$ である。$\eta=0$ なる故

$$M_B l'(2+f_7)+M_A l'(1+f_8)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{i})$$

振動が對稱なる時と鏡像の關係にある時により

$$M_B+M_A=0 \quad 又は \quad M_B-M_A=0$$

圖-7.



となる故 (i) は

$$3+f_7+f_8=0 \quad 又は \quad 1+f_7-f_8=0$$

(26), (27) 式により

$$\coth\phi-\cot\phi+\mathrm{cosec}\,\phi-\mathrm{cosech}\,\phi=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

又は

$$\coth\phi-\cot\phi-\mathrm{cosec}\,\phi+\mathrm{cosech}\,\phi=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{iii})$$

(ii) 及 (iii) 式は frequency equation[5] であるが兩者の積を零とおけば兩者を滿足する式が得られる。

$$\{(\coth\phi-\cot\phi)+(\mathrm{cosec}\,\phi-\mathrm{cosech}\,\phi)\}\times\{(\coth\phi-\cot\phi)-(\mathrm{cosec}\,\phi-\mathrm{cosech}\,\phi)\}$$

$$=\frac{2}{\sin\phi\sinh\phi}(1-\cos\phi\cosh\phi)=0$$

$$\therefore\quad 1-\cos\lambda l\cosh\lambda l=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{iv})$$

(iv) は衆知の frequency equation である。

(b) **左右對稱なる下端固定の門構**

圖-8.

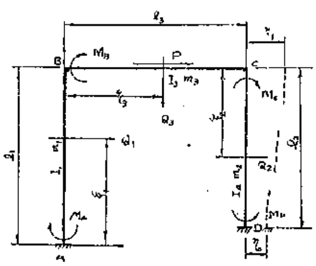


圖-8 の如き門構 A B C D に於て桁長を l_3, 兩柱の高さを l_1, l_2 とし夫々の斷面二次率及單位長當質量を I_3, I_1, I_2 及 m_3, m_1, m_2 とす。しからば ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 及 l_1', l_2', l_3' は次の如くなる。

$$\phi_1=l_1\sqrt[4]{\frac{m_1p^2}{EI_1}} \quad \phi_2=l_2\sqrt[4]{\frac{m_2p^2}{EI_2}} \quad \phi_3=l_3\sqrt[4]{\frac{m_3p^2}{EI_3}} \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

$$l_1'=\frac{J}{I_1}l_1 \qquad l_2'=\frac{J}{I_2}l_2 \qquad l_3'=\frac{J}{I_3}l_3 \cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 に關する f_5 の値を $f_{5.1}, f_{5.2}, f_{5.3}$ の如く脚付號 1, 2, 3 を付して示す。部材の伸張を無視すれば B 及 C の變位は等しく之を η_1 とし, 地盤の變位は η_0 とす。しからば平衡條件式は (2) 式により

$$P=\frac{1}{l_1}(M_B-M_A-Q_1\xi_1)+\frac{1}{l_2}\Big\{M_D-M_C+Q_2(l_2-\xi_2)\Big\}$$

---

5) Eigenwert を定むべき關係式を frequency equation と呼ぶことにする

$Q_1\xi_1$ 及 $Q_2(l_2-\xi_2)$ は (31), (32) 兩式にて與へられ，P は桁の水平慣性抵抗を表はし次式となる。

$$P=m_3l_3p^2\eta_1=\frac{EJ}{l_3{}^2l_3{}'}f_{0.3}\,\eta_1$$

こゝに　$f_0=\phi^4$ ……………………………………………(37)

にしてその値は 表-1 によつて與へられてゐる。

簡單の爲に

$$\frac{l_1}{l_3}=\alpha \quad \frac{l_3'}{l_1'}=\alpha' \quad \frac{l_1}{l_2}=\beta \quad \frac{l_2'}{l_1'}=\beta' \quad \cdots\cdots\text{(iii)}$$

と書けば平衡方程式は次式となる。

$$(1+f_{5.1})M_A-(1-f_{6.1})M_B+\beta(1-f_{6.2})M_C-\beta(1+f_{5.2})M_D$$
$$+\frac{EJ}{l_1l_1'}\left\{\left(\frac{\beta^2}{\beta'}f_{4.2}+f_{4.1}+\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)\eta_1+\left(f_{3.1}+\frac{\beta^2}{\beta'}f_{3.2}\right)\eta_0\right\}=0 \quad \cdots\cdots\text{(iv)}$$

動力學的 4 連モーメント式を $\overrightarrow{\mathrm{DAB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{ABC}}$ $\overrightarrow{\mathrm{BCD}}$ $\overrightarrow{\mathrm{CDA}}$ に適用すれば

$$\left.\begin{aligned}
&(2+f_{7.1})M_A+(1+f_{3.1})M_B+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{(f_{6.1}-1)\eta_0+(1+f_{5.1})\eta_1\}=0\\
&(1+f_{8.1})M_A+\{(2+f_{7.1})+\alpha'(2+f_{7.3})\}M_B+\alpha'(1+f_{8.3})M_C+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{(f_{6.1}-1)\eta_1+(1+f_{5.1})\eta_0\}=0\\
&\alpha'(1+f_{8.3})M_B+\{\alpha'(2+f_{7.3})+\beta'(2+f_{7.2})\}M_C+\beta'(1+f_{8.3})M_D\\
&\qquad\qquad+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{\beta(1-f_{6.2})\eta_1-\beta(1+f_{5.2})\eta_0\}=0\\
&\beta'(1+f_{8.3})M_C+\beta'(2+f_{7.3})M_D+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{-\beta(1+f_{5.3})\eta_1+\beta(1-f_{6.3})\eta_0\}=0
\end{aligned}\right\}$$

……………………………(v)

(iv) 及 (v) の聯立一次方程式より强制振動による應力及自由振動週期を求むることを得，frequency equation は次式となる。

$$\begin{vmatrix}
1+f_{5.1} & f_{6.1}-1 & \beta(1-f_{6.2}) & -\beta(1+f_{5.2}) & \frac{1}{6}\left(f_{4.1}+\frac{\beta^2}{\beta'}f_{4.2}+\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)\\
2+f_{7.1} & 1+f_{8.1} & 0 & 0 & 1+f_{5.1}\\
1+f_{8.1} & 2+f_{7.1}+\alpha'(2+f_{7.3}) & \alpha'(1+f_{8.3}) & 0 & f_{6.1}-1\\
0 & \alpha'(1+f_{8.3}) & \alpha'(2+f_{7.3})+\beta'(2+f_{7.2}) & \beta'(1+f_{8.3}) & \beta(1-f_{6.2})\\
0 & 0 & \beta'(1+f_{8.3}) & \beta'(2+f_{7.3}) & -\beta(1+f_{5.3})
\end{vmatrix}=0$$

……………………………(vi)

f_0 及 f_4 以外の f が 1 に比して無視出來る場合は次の近似式が成立す。

$$\frac{1}{6}\left(f_{4.1}+\frac{\beta^2}{\beta'}f_{4.2}+\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)=\frac{3(\beta'+\beta^2)+\alpha'\left(\beta'+4+4\beta^2+3\beta+\frac{\beta^2}{\beta'}\right)+\alpha'^2\left(1+\frac{\beta^2}{\beta'}\right)}{1.5\beta'+2\alpha'\left(1+\frac{\beta^2}{\beta'}\right)+2\alpha'^2}\cdots\cdots\text{(vii)}$$

兩柱が相等しき場合には

$$\frac{1}{6}\left(f_{4.1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)=\frac{\alpha'+6}{2\alpha'+3}\cdots\cdots\text{(iix)}$$

左右對稱なる場合は聯立方程式は次式となる。

$$(1+f_{5.1})M_A-(1-f_{6.1})M_B+\frac{EJ}{l_1l_1'}\left\{\left(f_{4.1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)\eta_1+f_{3.1}\eta_0\right\}=0$$

$$(2+f_{7.1})M_A+(1+f_{8.1})M_B+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{(1+f_{5.1})\eta_1+(f_{6.1}-1)\eta_0\}=0$$

$$(1+f_{8.1})M_A+\{(2+f_{7.1})+\alpha'(1+f_{7.3}-f_{8.3})\}M_B+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{(f_{6.1}-1)\eta_1+(1+f_{5.1})\eta_0\}=0$$

frequency equation を作れば

$$\begin{vmatrix} 1+f_{5.1} & f_{6.1}-1 & \frac{1}{6}\left(f_{4.1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right) \\ 2+f_{7.1} & 1+f_{8.1} & 1+f_{5.1} \\ 1+f_{8.1} & 2+f_{7.1}+\alpha'(1+f_{7.3}-f_{8.3}) & f_{6.1}-1 \end{vmatrix}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ix})$$

$\alpha'=\alpha=\beta=\beta'=1$ なる斷面均一なる正方形の門構の場合について 表-1 を用ひて ϕ を求むれば (iix) 式による時は

$$\frac{1}{6}\left(f_4+\frac{f_0}{2}\right)=\frac{7}{5}=1.40$$

表-1 により $\phi=1.77$ を得 $\left(\because\ \frac{1}{6}\left(3.498+\frac{9.815}{2}\right)=1.401\right)$。

(ix) 式による時は試案的に ϕ を假定し $\Delta=0$ ならしむべき ϕ を求む。先づ $\phi=1.78$ とおけば 表-1 に依り $f_0=10.039$, $f_4=3.584$, $f_5=0.219$, $f_6=0.247$, $f_7=0.142$, $f_8=0.138$ なる故

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1.219 & -0.753 & 1.434 \\ 2.142 & 1.138 & 1.219 \\ 1.138 & 3.146 & -0.753 \end{vmatrix}=-0.174$$

$\phi=1.79$ とおけば $f_0=10.266$, $f_4=3.672$, $f_5=0.224$, $f_6=0.253$, $f_7=0.146$, $f_8=0.141$ なる故

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1.224 & -0.746 & 1.468 \\ 2.146 & 1.141 & 1.224 \\ 1.141 & 3.151 & -0.746 \end{vmatrix}=0.016$$

$\phi=1.80$ とおけば $f_0=10.498$, $f_4=3.760$, $f_5=0.230$, $f_6=0,259$, $f_7=0.149$, $f_8=0.145$ なる故

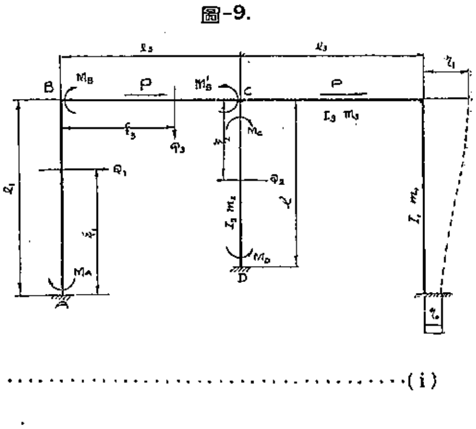
$$\Delta=\begin{vmatrix} 1.230 & -0.741 & 1.502 \\ 2.149 & 1.145 & 1.230 \\ 1.145 & 3.153 & -0.741 \end{vmatrix}=0.173$$

以上の結果により $\phi=1.79$ を得。

(c) 2 張間單層架構

圖-9 の如き 2 張間單層架構に於て中央支柱を中心にして左右對稱なる構造を有する場合の振動問題を考ふ。兩端柱中央支柱及桁の長さを l_1, l_2, l_3, 斷面二次率を I_1, I_2, I_3, 單位長當質量を m_1, m_2, m_3 とす。しからば ϕ 及 l' は次の如くなる。

圖-9.



$$\phi_1=l_1\sqrt[4]{\frac{m_1p^2}{EI_1}}\quad \phi_2=l_2\sqrt[4]{\frac{m_2P^2}{EI_2}}\quad \phi_3=l_3\sqrt[4]{\frac{m_3p^2}{EI_3}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

$$l_1'=\frac{J}{I_1}l_1 \qquad l_2'=\frac{J}{I_2}l_2 \qquad l_3'=\frac{J}{I_3}l_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 に關する f_6 の値を $f_{5.1}$, $f_{5.2}$, $f_{5.3}$ の如く脚付號 1, 2, 3 を付して示す。部材の伸張を無視する故 B 及 C の水平變位は等しく，之を η_1 とし，地盤の水平變位は η_0 とす。簡單の爲に次の如くおく。

$$\frac{l_1}{l_3}=\alpha \quad \frac{l_1}{l_2}=\beta \quad \frac{l_3'}{l_1'}=\alpha' \quad \frac{l_2'}{l_1'}=\beta' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

平衡條件式は

$$2M_B'=M_C$$

$$\frac{1}{l_1}\{(M_A-M_B)+Q_1\xi_1\}+\frac{1}{2l_2}\{(M_C-M_D)-Q_2(l_2-\xi_2)\}+P=0$$

$$\text{但し}\quad P=m_3l_3p^2\eta_1=\frac{EJ}{l_3^2l_3'}f_{0.3}\eta_1$$

(31), (32) 兩式を代入して整理すれば

$$(1+f_{5.1})M_A-(1-f_{6.1})M_B+\frac{\beta}{2}(1-f_{6.2})M_C-\frac{\beta}{2}(1+f_{5.2})M_D$$
$$+\frac{EJ}{l_1l_1'}\left\{\left(f_{3.1}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\beta'}f_{3.2}\right)\eta_0+\left(f_{4.1}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\beta'}f_{4.2}+\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)\eta_1\right\}=0 \quad \cdots\cdots(\text{iv})$$

動力學的 4 連モーメント式を $\overrightarrow{\mathrm{DAB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{ABC}}$ $\overrightarrow{\mathrm{BCD}}$ $\overrightarrow{\mathrm{CDA}}$ に適用すれば

$$\left.\begin{aligned}
&(2+f_{7.1})M_A+(1+f_{8.1})M_B+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{(f_{6.1}-1)\eta_0+(1+f_{5.1})\eta_1\}=0\\
&(1+f_{8.1})M_A+\{(2+f_{7.1})+\alpha'(2+f_{7.3})\}M_B+\frac{\alpha'}{2}(1+f_{8.3})M_C+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{(1+f_{5.1})\eta_0+(f_{6.1}-1)\eta_1\}=0\\
&\alpha'(1+f_{8.3})M_B+\left\{\frac{\alpha'}{2}(2+f_{7.3})+\beta'(2+f_{7.2})\right\}M_C+\beta'(1+f_{8.2})M_D\\
&\qquad\qquad+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{\beta(1-f_{6.2})\eta_1-\beta(1+f_{5.2})\eta_0\}=0\\
&\beta'(1+f_{8.2})M_C+\beta'(2+f_{7.2})M_D+\frac{6EJ}{l_1l_1'}\{-\beta(1+f_{5.2})\eta_1+\beta(1-f_{6.2})\eta_0\}=0
\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

以上の 5 式を用ひれば η_0 を與へたる時の他の未知量及自由振動週期を求むることを得，frequency equation は次式となる。

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1+f_{5.1} & f_{6.1}-1 & \frac{\beta}{2}(1-f_{6.2}) & -\frac{\beta}{2}(1+f_{5.2}) & \frac{1}{6}\left(f_{4.1}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\beta'}f_{4.2}+\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)\\
2+f_{7.1} & 1+f_{8.1} & 0 & 0 & 1+f_{5.1}\\
1+f_{8.1} & 2+f_{7.1}+\alpha'(2+f_{7.3}), & \frac{\alpha'}{2}(1+f_{8.3}) & 0 & f_{6.1}-1\\
0 & \alpha'(1+f_{8.3}) & \frac{\alpha'}{2}(2+f_{7.3})+\beta'(2+f_{7.2}) & \beta'(1+f_{8.2}) & \beta(1-f_{6.2})\\
0 & 0 & \beta'(1+f_{8.2}) & \beta'(2+f_{7.2}) & -\beta.1+f_{5.2})
\end{vmatrix}=0 \quad (\text{vi})$$

f_0 及 f_4 以外のすべての f を無視し得る時は，次の近似式を得。

表-1.　f の 値

φ	f_0	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	φ	f_0	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0.51	0.068	0.011	0.023					1.06	1.263	0.214	0.424	0.025	0.028	0.016	0.016
0.52	0.073	0.012	0.024					1.07	1.311	0.222	0.441	0.026	0.030	0.017	0.017
0.53	0.079	0.013	0.026					1.08	1.361	0.231	0.458	0.027	0.031	0.018	0.017
0.54	0.085	0.014	0.028					1.09	1.411	0.239	0.475	0.028	0.032	0.019	0.018
0.55	0.092	0.015	0.031					1.10	1.464	0.248	0.493	0.029	0.033	0.019	0.018
0.56	0.098	0.016	0.033					1.11	1.518	0.258	0.511	0.030	0.034	0.020	0.019
0.57	0.106	0.018	0.035					1.12	1.574	0.267	0.530	0.031	0.036	0.021	0.020
0.58	0.113	0.019	0.038					1.13	1.631	0.277	0.549	0.032	0.037	0.021	0.021
0.59	0.121	0.020	0.040					1.14	1.689	0.288	0.569	0.034	0.038	0.022	0.021
0.60	0.130	0.022	0.043					1.15	1.749	0.298	0.590	0.035	0.039	0.023	0.022
0.61	0.139	0.023	0.046					1.16	1.811	0.309	0.611	0.036	0.041	0.024	0.022
0.62	0.148	0.025	0.049					1.17	1.874	0.320	0.632	0.037	0.042	0.025	0.023
0.63	0.158	0.026	0.053					1.18	1.939	0.331	0.655	0.038	0.044	0.025	0.024
0.64	0.168	0.028	0.056					1.19	2.005	0.343	0.677	0.039	0.045	0.026	0.025
0.65	0.179	0.030	0.060					1.20	2.074	0.355	0.704	0.041	0.047	0.027	0.026
0.66	0.190	0.032	0.063					1.21	2.144	0.367	0.725	0.043	0.048	0.028	0.027
0.67	0.202	0.034	0.067					1.22	2.215	0.380	0.749	0.044	0.050	0.029	0.028
0.68	0.214	0.036	0.071					1.23	2.252	0.393	0.774	0.046	0.052	0.030	0.029
0.69	0.227	0.038	0.076					1.24	2.364	0.406	0.800	0.047	0.054	0.031	0.030
0.70	0.240	0.040	0.080					1.25	2.441	0.419	0.827	0.049	0.056	0.032	0.031
0.71	0.254	0.043	0.085					1.26	2.520	0.433	0.854	0.050	0.058	0.033	0.032
0.72	0.269	0.045	0.090					1.27	2.602	0.448	0.882	0.052	0.059	0.034	0.033
0.73	0.284	0.047	0.095					1.28	2.684	0.463	0.910	0.054	0.061	0.035	0.034
0.74	0.300	0.050	0.100					1.29	2.769	0.478	0.940	0.056	0.063	0.036	0.035
0.75	0.316	0.053	0.105					1.30	2.856	0.493	0.970	0.057	0.065	0.038	0.036
0.76	0.334	0.056	0.112					1.31	2.945	0.509	1.000	0.059	0.067	0.039	0.037
0.77	0.352	0.059	0.117					1.32	3.036	0.526	1.032	0.061	0.070	0.040	0.039
0.78	0.370	0.062	0.124					1.33	3.153	0.546	1.072	0.063	0.072	0.041	0.040
0.79	0.390	0.065	0.130					1.34	3.224	0.559	1.098	0.065	0.074	0.042	0.041
0.80	0.410	0.069	0.137					1.35	3.322	0.577	1.131	0.067	0.076	0.043	0.042
0.81	0.430	0.072	0.144		0.010			1.36	3.420	0.595	1.166	0.069	0.079	0.044	0.043
0.82	0.452	0.076	0.151		0.010			1.37	3.523	0.614	1.202	0.071	0.081	0.046	0.045
0.83	0.475	0.080	0.159		0.011			1.38	3.627	0.632	1.238	0.073	0.084	0.048	0.046
0.84	0.498	0.084	0.167	0.010	0.011			1.39	3.733	0.652	1.275	0.076	0.086	0.049	0.047
0.85	0.522	0.088	0.175	0.010	0.012			1.40	3.842	0.672	1.313	0.078	0.089	0.051	0.049
0.86	0.547	0.092	0.183	0.011	0.012			1.41	3.953	0.692	1.352	0.080	0.091	0.052	0.050
0.87	0.573	0.096	0.192	0.011	0.013			1.42	4.066	0.713	1.392	0.083	0.094	0.053	0.052
0.88	0.600	0.101	0.201	0.012	0.014			1.43	4.182	0.734	1.433	0.085	0.097	0.055	0.054
0.89	0.628	0.105	0.210	0.012	0.014			1.44	4.300	0.756	1.474	0.088	0.100	0.057	0.055
0.90	0.656	0.110	0.220	0.013	0.015			1.45	4.421	0.779	1.517	0.090	0.103	0.058	0.057
0.91	0.686	0.115	0.230	0.014	0.015			1.46	4.558	0.804	1.565	0.093	0.106	0.060	0.059
0.92	0.716	0.120	0.240	0.014	0.016	0.010		1.47	4.670	0.825	1.605	0.096	0.109	0.062	0.060
0.93	0.748	0.126	0.251	0.015	0.017	0.010		1.48	4.798	0.849	1.634	0.098	0.112	0.064	0.062
0.94	0.781	0.131	0.261	0.015	0.018	0.010	0.010	1.49	4.929	0.874	1.697	0.101	0.115	0.066	0.064
0.95	0.815	0.137	0.273	0.016	0.018	0.011	0.010	1.50	5.063	0.899	1.745	0.104	0.118	0.068	0.066
0.96	0.849	0.143	0.285	0.017	0.019	0.011	0.010	1.51	5.199	0.925	1.793	0.107	0.122	0.070	0.068
0.97	0.885	0.149	0.297	0.018	0.020	0.012	0.011	1.52	5.338	0.952	1.843	0.110	0.125	0.072	0.070
0.98	0.922	0.156	0.309	0.018	0.021	0.012	0.011	1.53	5.480	0.979	1.894	0.113	0.129	0.074	0.071
0.99	0.961	0.162	0.322	0.019	0.022	0.013	0.012	1.54	5.625	1.006	1.946	0.116	0.132	0.076	0.074
1.00	1.000	0.169	0.336	0.020	0.023	0.013	0.012	1.55	5.772	1.035	1.999	0.120	0.136	0.078	0.076
1.01	1.030	0.176	0.349	0.020	0.023	0.014	0.013	1.56	5.922	1.064	2.053	0.123	0.140	0.080	0.078
1.02	1.082	0.183	0.363	0.021	0.024	0.014	0.013	1.57	6.076	1.094	2.108	0.126	0.143	0.082	0.080
1.03	1.126	0.190	0.378	0.022	0.025	0.015	0.014	1.58	6.232	1.124	2.165	0.130	0.147	0.084	0.082
1.04	1.170	0.198	0.393	0.023	0.026	0.015	0.015	1.59	6.391	1.155	2.223	0.134	0.151	0.087	0.084
1.05	1.216	0.206	0.409	0.024	0.027	0.015	0.015	1.60	6.554	1.187	2.282	0.137	0.155	0.089	0.086

表-1. (續き)

ϕ	f_0	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	ϕ	f_0	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1.61	6.719	1.219	2.342	0.141	0.160	0.092	0.089	2.06	18.008	3.819	6.834	0.434	0.484	0.279	0.273
1.62	6.887	1.253	2.404	0.145	0.164	0.094	0.091	2.07	18.360	3.914	6.996	0.444	0.496	0.286	0.279
1.63	7.059	1.287	2.466	0.149	0.168	0.096	0.094	2.08	18.718	4.009	7.155	0.456	0.508	0.294	0.285
1.64	7.234	1.322	2.531	0.153	0.173	0.099	0.096	2.09	19.080	4.111	7.315	0.466	0.520	0.300	0.293
1.65	7.412	1.357	2.596	0.157	0.177	0.102	0.099	2.10	19.448	4.213	7.479	0.477	0.532	0.307	0.300
1.66	7.593	1.393	2.664	0.161	0.182	0.105	0.106	2.11	19.821	4.318	7.648	0.489	0.545	0.315	0.307
1.67	7.778	1.431	2.732	0.165	0.187	0.108	0.104	2.12	20.200	4.425	7.819	0.501	0.558	0.323	0.314
1.68	7.966	1.470	2.802	0.169	0.192	0.110	0.107	2.13	20.583	4.535	7.993	0.513	0.571	0.330	0.322
1.69	8.157	1.509	2.873	0.174	0.197	0.113	0.110	2.14	20.973	4.648	8.173	0.526	0.585	0.338	0.330
1.70	8.352	1.549	2.945	0.178	0.202	0.116	0.113	2.15	21.368	4.764	8.356	0.538	0.599	0.346	0.338
1.71	8.515	1.590	3.020	0.183	0.207	0.119	0.115	2.16	21.768	4.883	8.544	0.552	0.613	0.355	0.346
1.72	8.752	1.631	3.095	0.188	0.212	0.122	0.118	2.17	22.173	5.005	8.733	0.565	0.627	0.363	0.354
1.73	8.958	1.674	3.173	0.193	0.218	0.125	0.121	2.18	22.585	5.130	8.928	0.579	0.642	0.372	0.363
1.74	9.166	1.718	3.252	0.198	0.223	0.129	0.125	2.19	23.002	5.257	9.126	0.593	0.657	0.381	0.371
1.75	9.379	1.763	3.332	0.203	0.229	0.132	0.130	2.20	23.426	5.391	9.332	0.607	0.673	0.390	0.381
1.76	9.595	1.809	3.414	0.208	0.235	0.135	0.131	2.21	23.855	5.524	9.539	0.622	0.689	0.399	0.389
1.77	9.815	1.856	3.498	0.213	0.241	0.139	0.134	2.22	24.289	5.665	9.753	0.638	0.706	0.409	0.399
1.78	10.039	1.904	3.584	0.219	0.247	0.142	0.138	2.23	24.840	5.808	9.970	0.653	0.723	0.419	0.409
1.79	10.266	1.953	3.672	0.224	0.253	0.146	0.141	2.24	25.175	5.955	10.195	0.669	0.740	0.430	0.419
1.80	10.498	2.003	3.760	0.230	0.259	0.149	0.145	2.25	25.630	6.106	10.422	0.686	0.758	0.440	0.429
1.81	10.733	2.055	3.851	0.236	0.266	0.153	0.149	2.26	26.087	6.260	10.653	0.703	0.776	0.450	0.440
1.82	10.972	2.107	3.945	0.242	0.282	0.157	0.152	2.27	26.552	6.421	10.893	0.720	0.795	0.462	0.451
1.83	11.215	2.161	4.039	0.248	0.279	0.161	0.156	2.28	27.023	6.583	11.136	0.738	0.814	0.472	0.462
1.84	11.462	2.216	4.136	0.254	0.286	0.165	0.160	2.29	27.501	6.752	11.385	0.756	0.834	0.484	0.473
1.85	11.714	2.272	4.235	0.261	0.293	0.169	0.164	2.30	27.984	6.926	11.643	0.775	0.854	0.496	0.485
1.86	11.969	2.330	4.335	0.267	0.301	0.173	0.168	2.31	28.473	7.104	11.903	0.794	0.875	0.508	0.497
1.87	12.228	2.389	4.438	0.274	0.308	0.178	0.172	2.32	28.970	7.288	12.174	0.815	0.897	0.521	0.509
1.88	12.492	2.450	4.543	0.281	0.315	0.182	0.177	2.33	29.472	7.476	12.447	0.835	0.918	0.534	0.522
1.89	12.760	2.512	4.649	0.288	0.323	0.186	0.181	2.34	29.982	7.670	12.727	0.856	0.941	0.547	0.535
1.90	13.032	2.575	4.758	0.295	0.331	0.191	0.185	2.35	30.498	7.873	13.019	0.878	0.964	0.561	0.549
1.91	13.309	2.640	4.870	0.302	0.339	0.195	0.190	2.36	31.020	8.078	13.312	0.900	0.988	0.575	0.562
1.92	13.590	2.706	4.983	0.309	0.347	0.200	0.195	2.37	31.549	8.289	13.614	0.923	1.012	0.589	0.577
1.93	13.875	2.774	5.100	0.317	0.356	0.205	0.199	2.38	32.085	8.510	13.927	0.947	1.038	0.604	0.591
1.94	14.165	2.843	5.217	0.325	0.364	0.210	0.204	2.39	32.638	8.735	14.244	0.971	1.063	0.619	0.606
1.95	14.459	2.914	5.338	0.333	0.374	0.215	0.209	2.40	33.178	8.970	14.574	0.996	1.090	0.636	0.622
1.96	14.758	2.987	5.461	0.341	0.382	0.220	0.214	2.41	33.735	9.209	14.909	1.022	1.118	0.652	0.638
1.97	15.061	3.062	5.586	0.349	0.392	0.225	0.220	2.42	34.296	9.455	15.251	1.048	1.146	0.669	0.655
1.98	15.370	3.138	5.715	0.358	0.401	0.231	0.225	2.43	34.868	9.714	15.609	1.076	1.175	0.687	0.672
1.99	15.682	3.216	5.845	0.367	0.410	0.236	0.230	2.44	35.446	9.976	15.970	1.105	1.205	0.704	0.690
2.00	16.000	3.296	5.979	0.37	0.420	0.242	0.236	2.45	36.030	10.249	16.342	1.134	1.235	0.722	0.707
2.01	16.322	3.376	6.117	0.385	0.431	0.249	0.241	2.46	36.622	10.534	16.729	1.164	1.268	0.742	0.727
2.02	16.650	3.462	6.255	0.394	0.441	0.254	0.248	2.47	37.220	10.824	17.121	1.195	1.301	0.761	0.746
2.03	16.982	3.548	6.398	0.404	0.451	0.261	0.254	2.48	38.132	11.129	17.532	1.228	1.335	0.782	0.766
2.04	17.319	3.636	6.543	0.414	0.462	0.267	0.260	2.49	38.441	11.439	17.947	1.261	1.370	0.802	0.786
2.05	17.661	3.726	6.690	0.423	0.473	0.273	0.266	2.50	39.063	11.761	18.375	1.295	1.406	0.822	0.807

$$\frac{1}{6}\left(f_{4.1}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\beta'}f_{1.2}+\frac{\alpha^2}{\alpha'}f_{0.3}\right)$$

$$=\frac{\beta^2(1+\alpha')(\alpha'+8\beta')+2\beta'(\alpha'+2\beta')(4+\alpha')+2\beta'(3\alpha'\beta-2\beta'-1)}{2\beta\beta'\{2(1+\alpha')(\alpha'+2\beta')-\beta'\}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vii)}$$

同一斷面を有する正方形の 2 連單層架構にては $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ はすべて 1 にして, (vii) 式は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}f_4+f_0\right)=\frac{24}{11}=2.182$$

表-1 により $\phi=1.71$ を得 $\left(\because\ \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\times 3.020+8.515\right)=2.174\right)$。

(vi) 式による時は試案的に ϕ を假定し，$\Delta=0$ ならしむべき ϕ を求む。まづ $\phi=1.72$ と假定すれば 表-1 により

$f_0=8.752,\ f_4=3.095,\ f_5=0.188,\ f_6=0.212,\ f_7=0.122,\ f_8=0.118$ なる故

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1.188 & -0.788 & 0.394 & -0.594 & 2.233 \\ 2.122 & 1.118 & 0 & 0 & 1.188 \\ 1.118 & 4.244 & 0.559 & 0 & -0.788 \\ 0 & 1.118 & 3.183 & 1.118 & 0.788 \\ 0 & 0 & 1.118 & 2.122 & -1.188 \end{vmatrix}=-1.95$$

$\phi=1.73$ と假定すれば 表-1 により

$f_0=8.958,\ f_4=3.173,\ f_5=0.193,\ f_6=0.218,\ f_7=0.125,\ f_8=0.121$ なる故

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1.193 & -0.782 & 0.391 & -0.597 & 2.286 \\ 2.125 & 1.121 & 0 & 0 & 1.193 \\ 1.121 & 4.250 & 0.561 & 0 & -0.782 \\ 0 & 1.121 & 3.188 & 1.121 & 0.782 \\ 0 & 0 & 1.121 & 2.125 & -1.193 \end{vmatrix}=1.43$$

以上の結果により $\phi=1.73$ を得[6]。

---

6) 妹澤博士著 "振動學" 610 頁の結果と一致してゐる