論説報告

第25巻第6號　昭和14年6月

軸圧と横圧とを受くる長柱の挠み竝に軌條の浮上り挫屈に就て

會員　工学博士　稲　田　　隆*

要旨 軌條が軸圧力を受けて浮上り挫屈をなす場合には，軌條及枕木の重さが横圧抵抗として作用する。而してこの抵抗は，挫屈による挠み（浮上り）が起ると同時に作用し，且つ挠みの方向とは反對の方向に作用するものである。

本文は斯様な長柱の挫屈を Trefftz の解法を用ひて考察したものである。

1. 緒　言

軌條の挫屈は水平方向への張出しと上方への浮上りとの形に於て現はれる。上方への浮上りとは，暑熱による軌條の膨脹のために軌條が之に取りつけられて居る枕木と共に持ち上げられることである。その際軌條及枕木の重さは軌條の浮上りに對し横圧抵抗として作用し，浮上りを阻止しようとする。從つて軌條及枕木の重さは，軌條の浮上り挫屈と密接な關係がある筈であり，又之を防止するに必要な一要素である。

而るに普通の長柱理論に於ては，長柱の挫屈を起すべき限界軸圧は横圧の有無には無關係となつて居る。而し之は曲率半径 ρ を近似的に $1/\rho=d^2y/dx^2$ と置いたことから起る理論の缺陥によるものであつて，普通の長柱理論に於て，挫屈による長柱の挠みが不定となるが如きも亦之がためである。

故に軌條の浮上り挫屈を論ずるには，更に嚴密なる解法によらなければならないが，こゝには Trefftz の解法** を応用してこの問題を攻究する。

2. 微分方程式とその解

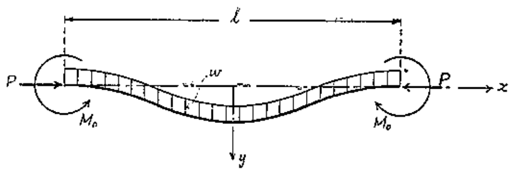
柱軸の挠みを y とし，之に沿つて測つた柱の長さを s とすれば，曲率半径 ρ は次の式によつて表はされる。

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\ddot{y}}{\sqrt{1-\dot{y}^2}}\quad ,\text{但し}\quad \dot{y}=\frac{dy}{ds}\quad ,\quad \ddot{y}=\frac{d^2y}{ds^2}$$

故に 図-1 に示す如く，座標原點を挫屈前の柱の中央にとり，柱の全長を l とすれば，軸圧 P と横圧 w とを受くる柱に對しては，次の微分方程式が成立つ。

$$EJ\frac{\ddot{y}}{\sqrt{1-\dot{y}^2}}=-Py-\frac{w}{2}\left(\frac{l^2}{4}-s^2\right)+M_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

図-1.



---

* 九州帝國大学教授

** Trefftz, Zur Frage der Holmfestigkeit, Zeitschrifft für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1918, S. 101-103.

今

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y}{l}=\eta \quad , \quad \frac{s}{l}=\sigma \quad , \quad L=\sqrt[3]{\frac{EJ}{w}}\\&\delta=\frac{l}{L} \quad , \quad \gamma=\frac{P}{wL} \quad , \quad \tau=\frac{M_0}{wL^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

とおけば

$$\ddot{\eta}=\left\{-\delta^2\gamma\eta-\frac{1}{2}\delta^3\left(\frac{1}{4}-\sigma^2\right)+\delta\tau\right\}\sqrt{1-\dot{\eta}^2}\cdots\cdots(3)$$

この式に於て $\sqrt{1-\dot{\eta}^2}\fallingdotseq 1$ とおいた場合の解を第1次の近似解 η_{I} とすれば，左右對稱の挫屈形に對して

$$\left.\begin{aligned}&\eta_{\mathrm{I}}=A\cos\theta\sigma-\frac{\delta^3}{2\theta^2}\left(\frac{1}{4}-\sigma^2\right)-\frac{\delta^3}{\theta^4}+\frac{\delta\tau}{\theta^2}\\&\text{但し}\quad A=\text{積分常數}\\&\qquad \theta=\delta\sqrt{\gamma}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

從つてこの式から

$$\dot{\eta}_{\mathrm{I}}=-A\theta\sin\theta\sigma+\frac{\delta^3\sigma}{\theta^2}$$

$$\ddot{\eta}_{\mathrm{I}}=-A\theta^2\cos\theta\sigma+\frac{\delta^3}{\theta^2}$$

次に (4) 式を (3) 式の右邊に用ひ，$\sqrt{1-\dot{\eta}^2}\fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\dot{\eta}_{\mathrm{I}}^2$ とおいて解いたものを第2次の近似解 η_{II} とすれば

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_{\mathrm{II}}&=\left\{-\delta^2\gamma\eta_{\mathrm{I}}-\frac{1}{2}\delta^3\left(\frac{1}{4}-\sigma^2\right)+\delta\tau\right\}\left(1-\frac{1}{2}\dot{\eta}_{\mathrm{I}}^2\right)\\&=\ddot{\eta}_{\mathrm{I}}\left(1-\frac{1}{2}\dot{\eta}_{\mathrm{I}}^2\right)\end{aligned}$$

之を積分して

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\eta}_{\mathrm{II}}=\dot{\eta}_{\mathrm{I}}-\frac{1}{6}\dot{\eta}_{\mathrm{I}}^3\\&\eta_{\mathrm{II}}=\eta_{\mathrm{I}}-\frac{1}{6}\int_0^\sigma\dot{\eta}_{\mathrm{I}}^3d\sigma\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

從つて次の解が得られる。

$$\begin{aligned}\eta_{\mathrm{II}}=&A\cos\theta\sigma-\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{1}{4}-\sigma^2\right)-\frac{1}{\delta\gamma^2}+\frac{\tau}{\delta\gamma}+\frac{A^3\theta^2}{18}(2-3\cos\theta\sigma+\cos^3\theta\sigma)\\&-\frac{A^2\delta}{16\gamma}(1+2\theta^2\sigma^2-2\theta\sigma\sin2\theta\sigma-\cos2\theta\sigma)-\frac{A}{2\gamma^3}(2+\theta^2\sigma^2\cos\theta\sigma-2\theta\sigma\sin\theta\sigma-2\cos\theta\sigma)\\&-\frac{\delta^3}{24\gamma^3}\sigma^4\cdots\cdots(6)\end{aligned}$$

3. 軌條の浮上り挫屈に於ける端條件

軌條が浮上り挫屈を起した場合の端條件は次の3つである。

(i) $\eta=0$, (ii) $\dot{\eta}=0$, (iii) $\ddot{\eta}=0$, $\tau=0$ $(M_0=0)$

(iii) により (6) 式中 $\tau=0$ とおき，且つ

$$\delta^2\gamma=\theta^2=\pi^2\lambda,\qquad \delta^3=\pi^2\lambda\mu \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

とおいて，(i) の端條件を求むれば $\eta_{\mathrm{II}(\sigma=\frac{1}{2})}=0$ から

$$A^3\left\{\frac{\pi^2\lambda}{18}\left(2-3\cos\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}+\cos^3\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right)\right\}-A^2\left\{\frac{\mu}{16}\left(1+\frac{\pi^2\lambda}{2}-\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\sin\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}-\cos\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right)\right\}$$
$$-A\left\{\frac{\mu^2}{2\pi^2\lambda}\left(2+\frac{\pi^2\lambda-8}{4}\cos\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}-\pi\sqrt{\lambda}\sin\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right)-\cos\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right\}=\mu\left(\frac{1}{\pi^2\lambda}+\frac{\mu^2}{384}\right)\quad\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

又 (iii) の端條件は $\dot{\eta}_{\mathrm{II}(\sigma=\frac{1}{2})}=0$ から

$$A^3\left\{\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\sin\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right\}^3-A^2\left\{\frac{3\mu}{4}\left(\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\sin\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2\right\}+A\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\mu^2}{8}-1\right)\left(\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\sin\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{3\mu}{8}\left(\frac{\mu^2}{24}-1\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

となる。即ち軌條の浮上り挫屈が起るには (I), (II) の式が同時に滿足されなければならない。この挫屈條件を滿足する μ と λ との値は試算によつて図式的に定むることが出來る。即ち先づ μ に或る一定値をとり，λ に種々の値を與へて (I) 式から A を算定し，その A, μ, λ を用ひて (II) 式の左邊の値を求め之を図示すれば，図-2 の曲線が得られる。而して (II) 式の右邊は 図-2 に於ては直線を以て示されるから，之と曲線との交點は (II) 式を滿足し且つ同時に (I) 式を滿足する μ と λ との値を與へる。斯くして定められる μ と λ の値は次の通りである。

$\mu=0.1$	0.2 ,	0.4 ,	0.6
	1.0 ,	1.2 ,	1.36
$\lambda=4.062$	4.125 ,	4.285 ,	4.445
	4.900 ,	5.270 ,	6.150

図-2.

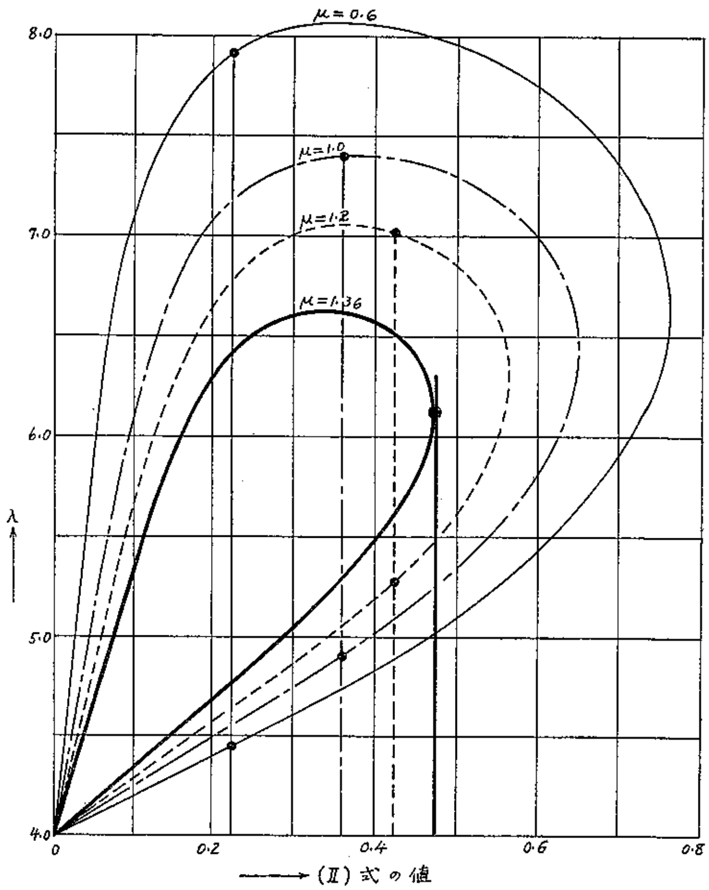


図-2 から分るやうに，μ が大となるに從ひ (II) 式の左邊を示す曲線は漸次左方內側に縮まるに反し(II)式の右邊を示す直線は漸次右方に移動する。故に μ が或る値以上に大となれば，(II) 式の左邊を示す曲線と右邊を示す直線とは最早交はることがない。即ち μ の一定値以上に於ては挫屈條件は最早滿足されず，挫屈は起らないことゝな

る。その μ の限界値は 図-2 から分るやうに凡そ $\mu=1.36$ である。

4. 挫屈荷重と挫屈長との關係

挫屈條件 (I), (II) 式を同時に満足する μ と λ との値が決定さるれば (7) 式から

先づ $$\delta=\sqrt[3]{\pi^2\lambda\mu}$$

次に $$\gamma=\frac{\pi^2\lambda}{\delta^2}$$

が定まる。この δ と γ との値を算出すれば

$\mu=$	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	1.2	1.36
$\delta=$	1.589	2.012	2.567	2.975	3.643	3.967	4.354
$\gamma=$	15.886	10.059	6.418	4.958	3.643	3.306	3.202

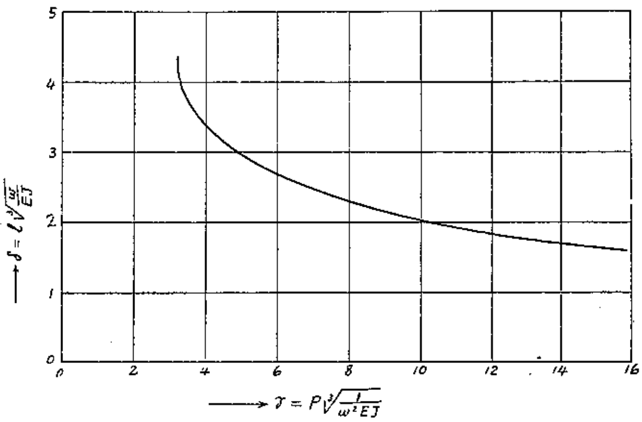
δ と γ との關係を図示すれば 図-3 の通りである。

(2) 式に示す如く γ と δ とは挫屈長と挫屈荷重とを與ふる係數である。即ち

$$\left.\begin{aligned}\delta&=\frac{l}{L}=l\sqrt[3]{\frac{w}{EJ}}\\ \gamma&=\frac{P}{wL}=P\sqrt[3]{\frac{1}{w^2EJ}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

故に 図-3 は又挫屈荷重と挫屈長との關係を示すものである。

図-3.



〔計算例〕 50 kg 軌條が 25 t の軸圧を受けた場合の浮上り挫屈の挫屈長を求む。但し軌條及枕木など重さとして作用する抵抗を $w=0.12$ t/m とする。

解: $P=25$ t, $EJ=366$ t/m², $w=0.12$ t/m であるから (8) 式から

$$\gamma=25\times\sqrt[3]{\frac{1}{0.12\times0.12\times366}}=25\times0.575=14.375$$

故に 図-3 から $\gamma=14.375$ に相當する δ の値を求むれば

$$\delta=1.67$$

從つて挫屈長は (8) 式から

$$l=\delta\sqrt[3]{\frac{EJ}{w}}=1.67\times\sqrt[3]{\frac{366}{0.12}}=1.67\times14.5=24.2\,\mathrm{m}$$

即ち挫屈長は約 24 m である。

5. 浮上り挫屈を絶對に起さないために必要な抵抗

上述の如く $\mu=1.36$ となれば最早挫屈條件は滿足されない。即ち挫屈は起らない。故に浮上り挫屈が起らないための必要條件は $\mu\geqq1.36$ である。而して $\mu=1.36$ の場合には $\gamma=3.2$ である。之を (8) 式に用ひて

$$w=\sqrt{\frac{P^3}{32^3EJ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

之が浮上り挫屈を絶對に起さないために必要な抵抗である。

〔計算例〕 50 kg 軌條が絶對に浮上り挫屈を起さないためには如何なる抵抗を必要とするかを求む。但し軌條の受ける最大軸圧は 50 t とす。

解：(9) 式に於て $P=50,\ EJ\fallingdotseq 366$ とおけば

$$w=\sqrt{\frac{50^3}{32.768\times 366}}=3.228\ \mathrm{t/m}$$

6. 結　　言

Trefftz の解法によれば，軸圧と横圧とを受くる長柱の撓みは先づ横圧の作用方向に起り，軸圧の増加と共に増加するが，軸圧が Euler の限界値を超ゆれば，撓みは横圧の作用方向に一層増加すると共に，逆に反對の方向に横圧に逆つて起る傾向を生ずる。而しこの傾向は横圧の大なるほど小で，恰も軌條の浮上り挫屈に際し軌條及枕木の重さが之に抵抗し，浮上りを防止するに等しい。故に Trefftz の解法を応用して軌條の浮上り挫屈を攻究したのであるが，その結果は上述の通りである。

而してその結果，軌條は極めて浮上り挫屈を起し易く，從つて之を防止するには可なり大なる抵抗を必要とすることが明らかになつたが，これ等の結果が果して實際の場合に適合して居るか否かに就ては猶今後の研究にまつことゝする。