論　説　報　告

第25巻第6號　昭和14年6月

円形塡充物を有する板の引張り

（昭和13年7月16日 土木学會第2回年次学術講演會に於て）

准員　谷本勉之助*

1. 概　　説

本文は平板に小円形孔が開いてゐて，この中に異なつた物質が詰つてゐるとき，平板の兩端から張力を加へると，この円孔附近にはどんな局部的応力分布が起るかを調べたものである。

これに就ては，私の解いてみたのとは全然別の方法で既に地震研究所，妹澤教授並に西村技師によつて解かれてゐて[1]問題それ自体は別段目新らしくもないのであるが，妹澤，西村解（以下敬稱略）は変位の函數によつて解かれてゐるのに對し，私のは Airy の応力函數を使ふ方法で解いてみたものであつて，本文の興味は相異なる方法で同一の結果が得られたことにあると思ふ。

この種の二次元問題を解くに，妹澤教授も述べてゐられる様に先づ次の 3 つの方法がある

(1) Airy の応力函數による方法

(2) 横田博士の複素函數による方法

(3) 妹澤博士の変位の函數による方法

これらは相互に殆ど關連なしに發展した理論の様であるが，その中 (1) と (3) との關連性に就て本文が示唆を與へるならば尙多少の興味があると思ふ。後程この2つの函數の同一性を眞正面から計算してみようと考へてゐる。

本文を纏めるに就て東京帝大助教授最上武雄先生の御指導を仰いだ，尙この種の問題に於ける孔附近の境の條件に關しては更に考究すべき餘地のあることを御教示下さつた。玆に厚く御禮申しあげる。

2. 本　　文

二次元の彈性体内部の微小部分の釣合の式は物体力なしとして極坐標系により

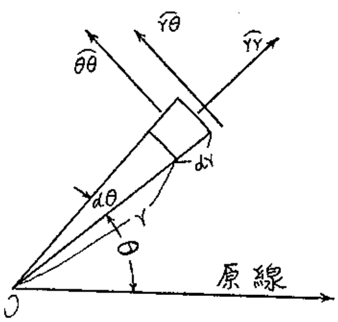


図-1.

半径方向に　$$\frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\left(\widehat{rr}-\widehat{\theta\theta}\right)=0$$

切線方向に　$$\frac{\partial \widehat{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{2}{r}\widehat{r\theta}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

玆に　$\widehat{rr}$ は半径方向の直応力

$\widehat{\theta\theta}$ は切線方向の直応力

---

* 工学士　遞信省電氣局勤務

1) 妹澤克惟博士：東京帝國大学航空研究所報告第 68 號（昭. 6. 4.）
"Stresses under Tension in a Plate with a Heterogeneous Insertion."

$\widehat{r\vartheta}$ は剪斷應力

で 圖-1 の樣である。

Airy の應力函數を $\phi(r,\theta)$ とすれば $\phi(r,\theta)$ は

$$\Delta_4\phi(r,\theta)=0 \qquad \text{又は} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\phi(r,\theta)=0 \cdots\cdots(2)$$

を滿足する。J. H. Michell によつて求められてゐる (2) の特解[2] は

$$\phi(r,\theta)=a_0\log r+b_0r^2+c_0r^2\log r+d_0r^2\theta+d_0'\theta$$
$$+\frac{a_1}{2}r\vartheta\sin\theta+(b_1r^3+a_1'r^{-1}+b_1'r\log r)\cos\theta$$
$$+\frac{c_1}{2}r\theta\cos\theta+(d_1r^3+c_1'r^{-1}+d_1'r\log r)\sin\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}An(r)\cos n\theta+\sum_{n=2}^{\infty}Bn(r)\sin n\theta \cdots\cdots(3)$$

但し　$An(r)=a_nr^n+b_nr^{n+2}+a_n'r^{-n}+b_n'r^{-n+2},\quad Bn(r)=c_nr^n+d_nr^{n+2}+c_n'r^{-n}+d_n'r^{-n+2}$

$$(n=2,\ 3,\ 4,\cdots) \cdots\cdots(4)$$

本問題に入用なのはこの中の一部であるが，これに就ては應力を求めて後に考慮する。

應力函數 $\phi(r,\theta)$ と應力 $\widehat{rr},\ \widehat{\theta\theta},\ \widehat{r\theta}$ との關係は

$$\widehat{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2},\qquad \widehat{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2},\qquad \widehat{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \cdots\cdots(5)$$

であるから，(3) を (5) に代入して[3]

$$\widehat{rr}=a_0r^{-2}+2b_0+(1+2\log r)c_0+2d_0\theta$$
$$+\left[a_1r^{-1}+2b_1r-2a_1'r^{-3}+b_1'r^{-1}\right]\cos\theta+\left[-c_1r^{-1}+2d_1r-2c_1'r^{-3}+d_1'r^{-1}\right]\sin\theta$$
$$+\sum\left[\frac{1}{r}\frac{dAn}{dr}-n^2\frac{An}{r^2}\right]\cos n\theta+\sum\left[\frac{1}{r}\frac{dBn}{dr}-n^2\frac{Bn}{r^2}\right]\sin n\theta$$
$$\widehat{\theta\theta}=-a_0r^{-2}+2b_2+(3+2\log r)c_0+2d_0\theta$$
$$+\left[0+6b_1r+2a_1'r^{-3}+b_1'r^{-1}\right]\cos\theta+\left[0+6d_1r+2c_1'r^{-3}+d_1'r^{-1}\right]\sin\theta$$
$$+\sum\frac{d^2An}{dr^2}\cos n\theta+\sum\frac{d^2Bn}{dr^2}\sin n\theta$$
$$\widehat{r\theta}=d'_0r^{-2}+\left[0+2b_1r-2a_1'r^{-3}+b_1'r^{-1}\right]\sin\theta-\left[0+2d_1r-2c_1'r^{-3}+d_1'r^{-1}\right]\cos\theta$$
$$+\sum\left[n\frac{d}{dr}\left(\frac{An}{r}\right)\right]\sin n\theta-\sum\left[n\frac{d}{dr}\left(\frac{Bn}{r}\right)\right]\cos n\theta \cdots\cdots(6)$$

これらの應力は x 軸（原線）及 y 軸に關して對稱的に分布してゐなければならないから（圖-3）

$$(\widehat{rr})_{+\theta}=(\widehat{rr})_{-\theta},\quad (\widehat{\theta\theta})_{+\theta}=(\widehat{\theta\theta})_{-\theta},\quad (\widehat{r\theta})_{+\theta}=-(\widehat{r\theta})_{-\theta} \cdots\cdots(7)$$

及　$(\widehat{rr})_{+\theta}=(\widehat{rr})_{\pi-\theta},\quad (\widehat{\theta\theta})_{+\theta}=(\widehat{\theta\theta})_{\pi-\theta},\quad (\widehat{r\theta})_{+\theta}=-(\widehat{r\theta})_{\pi-\theta} \cdots\cdots(8)$

---

[2] Timoshenko: Theory of Elasticity 譯 91～92 頁及拙著捲立円形隧道の應力分布（本誌昭. 13. 4.）原著 1899 年 Proc. London Math. Soc. XXXI.（東京帝大理学科部物理学図書室所藏）111 頁

[3] Coker and Eilon: Photo-Elasticity 376 頁

が成立しなければならない。(6) は (7) により

$$d_0=d_0'=c_1=d_1=c_1'=d_1'=0,\qquad B_n=0\ \text{即ち}\ c_n=d_n=c_n'=d_n'=0\quad(n=2,3,4,\cdots\cdots)$$

となり，且つ (8) により

$$\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right)\theta,\quad \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right)3\theta,\quad \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right)5\theta,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

は消失しなければならないから

$$a_1=a_3=a_5=\cdots\cdots\cdots=b_1=b_3=b_5=\cdots\cdots\cdots=$$

$$a_1'=a_3'=a_5'=\cdots\cdots\cdots=b_1'=b_3'=b_5'=\cdots\cdots\cdots=0$$

となる。c_0 の項は変位が Dislocation を起すので[4]これを除き，又 4θ 以上の項も一先づ不用であるとすれば (6) は次の様な簡單な形になる。

$$\widehat{rr}=(a_0r^{-2}+2b_0)+(-2a_2+0-6a_2'r^{-4}-4b_2'r^{-2})\cos 2\theta$$

$$\widehat{\theta\theta}=(-a_0r^{-2}+2b_0)+(2a_2+12b_2r^2+6a_2'r^{-4}+0)\cos 2\theta$$

$$\widehat{r\theta}=(2a_2+6b_2r^2-6a_2'r^{-4}-2b_2'r^{-2})\sin 2\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

次に變位を求める。應力と歪との關係は

$$\widehat{rr}=\lambda\varDelta+2\mu e_{rr},\qquad \widehat{\theta\theta}=\lambda\varDelta+2\mu e_{\theta\theta},\qquad \widehat{r\theta}=\mu e_{r\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

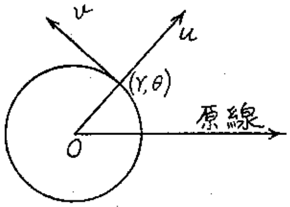
茲に　$\varDelta$ は板の面積膨脹率 (Areal dila‘ation of the pla‘e)

e_{rr} は $\widehat{rr}$ に對應する歪

$e_{\theta\theta}$ は $\widehat{\theta\theta}$ に對應する歪

$e_{r\theta}$ は $\widehat{r\theta}$ に對應する歪

図-2.



λ, μ は彈性常數で μ は Lamé の常數そのまゝ λ の方は平面應力常數(Plane stress constant) で Lamé の常數 λ_1, μ に對し，本文の λ は

$$\lambda_1:\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

とする。さて 図-2 の様に u を半徑方向の變位 v を切線方向の變位とすれば

$$\varDelta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\qquad e_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\qquad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r},\qquad e_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

であるから[5]，(11) を (10) に代入すれば

$$\widehat{rr}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right),\qquad \widehat{\theta\theta}=\lambda\frac{\partial u}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$$

$$\widehat{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(12) の始めの 2 式から u, v を求めると

$$4\mu(\lambda+\mu)u=(\lambda+2\mu)\int\widehat{rr}\,dr-\lambda\int\widehat{\theta\theta}\,dr$$

---

4) Coker and Filon: Photo-Elasticity 370 頁

5) Love: Elasticity 56 頁

$$4\mu(\lambda+\mu)v=-(\lambda+2\mu)\int\int\widehat{rr}\,dr\,d\theta+\lambda\int\int\widehat{\theta\theta}\,dr\,d\theta$$
$$-\lambda r\int\widehat{rr}\,d\theta+(\lambda+2\mu)r\int\widehat{\theta\theta}\,d\theta \quad\cdots\cdots(13)$$

一般には積分による任意函数として第1式には $\Theta(\theta)$, 第2式には $-\int\Theta(\theta)d\theta+R(r)$ が添加されるのであるが[6], 本問題ではこれらは消失することを示し得て考慮する必要がないから，便宜上省略しておく。

(9) で求めた応力を (13) に代入して u, v を求めると

$$u=\left(-\frac{1}{2\mu}a_0r^{-1}+\frac{1}{\lambda+\mu}b_0r\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{\mu}a_2r-\frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)}b_2r^3+\frac{1}{\mu}a_2'r^{-3}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2'r^{-1}\right)\cos 2\theta$$
$$v=\left(\frac{1}{\mu}a_2r+\frac{2\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2r^3+\frac{1}{\mu}a_2'r^{-3}-\frac{\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2'r^{-1}\right)\sin 2\theta \quad\cdots\cdots(14)$$

玆に (9), (14) は内部の円形挿入物にも外部の平板にも共に適用できる形である。依つて (9) 及 (14) に於て, 外部の平板に此のまゝの文字を用ひ, 内部の円形挿入物には未定係數を大文字とし応力変位, 彈性常數にはダッシュをつけたものを用ひることにする。

共用の応方の式 (9) に於て，これを平板のものと考へれば円孔から充分遠ざかつた所で応力が或る値に治りがつかねばならぬ爲，r の正冪は採れない。即ち

$$b_2=0$$

又円形挿入物では中心近くでも応力が或る値に治まらねばならぬ爲，r の負冪は採れない。即ち

$$A_2'=0,\qquad B_2'=0$$

かくして平板，円形挿入物の応力，変位の式として

平板の応力は $(r\geqq a)$

$$\widehat{rr}=(\ a_0r^{-2}+2b_0)+(-2a_2-6a_2'r^{-4}-4b_2'r^{-2})\cos 2\theta$$
$$\widehat{\theta\theta}=(-a_0r^{-2}+2b_0)+(\ 2a_2+6a_2'r^{-4}+0\ )\cos 2\theta$$
$$\widehat{r\theta}=\qquad(\ 2a_2-6a_2'r^{-4}-2b_2'r^{-2})\sin 2\theta \quad\cdots\cdots(15)$$

円形挿入物の応力は $(r\geqq a)$

$$\widehat{rr}'=2B_0+(-2A_2+\ 0\ )\cos 2\theta$$
$$\widehat{\theta\theta}'=2B_0+(\ 2A_2+12B_2r^2)\cos 2\theta$$
$$\widehat{r\theta}'=\qquad(\ 2A_2+\ 6B_2r^2)\sin 2\theta \quad\cdots\cdots(16)$$

平板の変位は $(r\geqq a)$

$$u=\left(-\frac{1}{2\mu}a_0r^{-1}+\frac{1}{\lambda+\mu}b_0r\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{\mu}a_2r+\frac{1}{\mu}a_2'r^{-3}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2'r^{-1}\right)\cos 2\theta$$
$$v=\quad\left(\ \frac{1}{\mu}a_2r+\frac{1}{\mu}a_2'r^{-3}-\frac{\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2'r^{-1}\right)\sin 2\theta \quad\cdots\cdots(17)$$

6) Timoshenko: Theory of Elasticity 譯 69 頁

円形挿入物の変位は　$(r\leqq a)$

$$\left.\begin{aligned} u'&=\frac{1}{\lambda'+\mu'}B_0 r+\left(-\frac{1}{\mu'}A_2 r-\frac{\lambda'}{\mu'(\lambda'+\mu')}B_2 r^3\right)\cos 2\theta \\ v'&=\qquad\qquad\quad\left(\frac{1}{\mu'}A_2 r+\frac{2\lambda'+3\mu'}{\mu'(\lambda'+\mu')}B_2 r^3\right)\sin 2\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

(17) を見るに $r\to\infty$ では $u, v\to\infty$ となるが，後に調べる如く変位に關しての境の條件は円孔周邊でしか考へないから，このことは意に介するに足らぬと思はれる。事實，平板に $r\to\infty$ の所に於ても或る値の応力が存在すれば，これに相當する歪が生じ，この歪が集積する結果は當然変位が無限大となる筈である。

さて境の條件を考へよう。円孔周邊では相互にずれがないと假定し，円孔の半径を a とすれば

応力に就ては

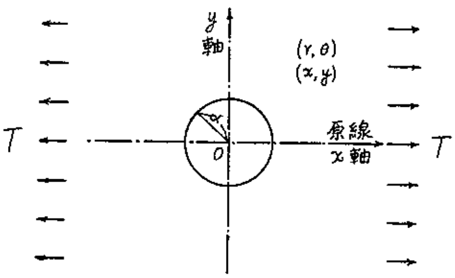
$$(\widehat{rr})_{r=a}=(\widehat{rr'})_{r=a},\qquad (\widehat{r\theta})_{r=a}=(\widehat{r\theta'})_{r=a}\cdots\cdots(19)$$

変位に就ては

$$(u)_{r=a}=(u')_{r=a},\qquad (v)_{r=a}=(v')_{r=a}\cdots\cdots(20)$$

又平板で $r\to\infty$ に於ては θ の値の如何に拘らず円孔附近に現はれた局部応力の影響は消失して孔のない單純な平板の引張に一致すべきであるから，**図-1, 2** の原線が x 軸と重なる様な直角坐標系 $0-xy$ を考へれば (**図-3**)

図-3.



$$\begin{aligned} (\widehat{xx})_{r=\infty}&=T \\ (\widehat{yy})_{r=\infty}&=0 \\ (\widehat{xy})_{r=\infty}&=0\cdots\cdots(21) \end{aligned}$$

而して一般に兩坐標系による応力の間の關係は[7]

$$\begin{aligned} \widehat{rr}&=\widehat{xx}\cos^2\theta+\widehat{yy}\sin^2\theta+2\widehat{xy}\cos\theta\sin\theta \\ \widehat{\theta\theta}&=\widehat{xx}\sin^2\theta+\widehat{yy}\cos^2\theta-2\widehat{xy}\cos\theta\sin\theta \\ \widehat{r\theta}&=(\widehat{yy}-\widehat{xx})\cos\theta\sin\theta+\widehat{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdots\cdots(22) \end{aligned}$$

であるから，これに (21) を入れて

$$\begin{aligned} (\widehat{rr})_{r=\infty}&=\quad T\cos^2\theta=\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\cos 2\theta \\ (\widehat{\theta\theta})_{r=\infty}&=\quad T\sin^2\theta=\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\cos 2\theta \\ (\widehat{r\theta})_{r=\infty}&=-T\cos\theta\sin\theta=-\frac{T}{2}\sin 2\theta\cdots\cdots(23) \end{aligned}$$

(15), (23) により

$$\begin{aligned} \frac{T}{2}+\frac{T}{2}\cos 2\theta&=2b_0-2a_2\cos 2\theta \\ \frac{T}{2}-\frac{T}{2}\sin 2\theta&=2b_0+2a_2\cos 2\theta \\ -\frac{T}{2}\sin 2\theta&=\qquad\ 2a_2\sin 2\theta \end{aligned}$$

7) Coker and Filon: Photo-Elasticity 135 頁

これから

$$2b_0=\frac{T}{2},\qquad 2a_2=-\frac{T}{2}\cdots\cdots(24)$$

(15), (16), (17), (18) を (19), (20) で關係づけて

θ を含まぬ項に就き

$$\begin{aligned}
a_0a^{-2}+\frac{T}{2}&=2B_0\\
-\frac{1}{2\mu}a_0a^{-1}+\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\frac{T}{2}a&=\frac{1}{\lambda'+\mu'}B_0a
\end{aligned}\cdots\cdots(25)$$

2θ の項に就き

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2}-6a_2'a^{-4}-4b_2'a^{-2}&=-2A_2+0\\
-\frac{T}{2}-6a_2'a^{-4}-2b_2'a^{-2}&=2A_2+6B_2a^2\\
\frac{1}{2\mu}\frac{T}{2}a+\frac{1}{\mu}a_2'a^{-3}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2'a^{-1}&=-\frac{1}{\mu'}A_2a-\frac{\lambda'}{\mu'(\lambda'+\mu')}B_2a^3\\
-\frac{1}{2\mu}\frac{T}{2}a+\frac{1}{\mu}a_2'a^{-3}-\frac{\mu}{\mu(\lambda+\mu)}b_2'a^{-1}&=\frac{1}{\mu'}A_2a+\frac{2\lambda'+3\mu'}{\mu'(\lambda'+\mu')}B_2a^3
\end{aligned}\cdots\cdots(26)$$

(25), (26) の聯立方程式を整頓して

$$\begin{vmatrix}
a_0a^{-2} & B_0 & T/2\\
1 & -2 & 1\\
-\frac{1}{2\mu} & -\frac{1}{\lambda'+\mu'} & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}
\end{vmatrix}\cdots\cdots(27)$$

及

$$\begin{vmatrix}
a_2'a^{-4} & b_2'a^{-2} & A_2 & B_2a^2 & T/2\\
-6 & -4 & 2 & 0 & 1\\
6 & 2 & 2 & 6 & 1\\
\frac{1}{\mu} & \frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} & \frac{1}{\mu'} & \frac{\lambda'}{\mu'(\lambda'+\mu')} & \frac{1}{2\mu}\\
\frac{1}{\mu} & -\frac{1}{\lambda+\mu} & -\frac{1}{\mu'} & -\frac{2\lambda'+3\mu'}{\mu'(\lambda'+\mu')} & -\frac{1}{2\mu}
\end{vmatrix}\cdots\cdots(28)$$

とする。(27) により未定の係數 a_0, B_0 は

$$a_0a^{-2}\Big/\frac{T}{2}=+\frac{\varDelta(a_0a^{-2})}{\varDelta\left(\frac{T}{2}\right)}\qquad\therefore\quad a_0=\frac{T}{2}\frac{\varDelta(a_0a^{-2})}{\varDelta_0}a^2$$

$$B_0\Big/\frac{T}{2}=-\frac{\varDelta(B_0)}{\varDelta_0}\qquad\therefore\quad B_0=-\frac{T}{2}\frac{\varDelta(B_0)}{\varDelta_0}\cdots\cdots(29)$$

但し $\varDelta(a_0a^{-2})$ は (27) の行列に於て第1行と第1列とを除いた殘りの要素で出來る行列式を表はし，$\varDelta(B_0)$, $\varDelta\left(\frac{T}{2}\right)=\varDelta_0$ も同様である。卽ち

$$\varDelta(a_0a^{-2})=\begin{vmatrix}
-2 & 1\\
-\frac{1}{\lambda'+\mu'} & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}
\end{vmatrix}$$

$$\Delta(B_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{2\mu} & \dfrac{1}{2(\lambda+\mu)} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\dfrac{1}{2\mu} & -\dfrac{1}{\lambda'+\mu'} \end{vmatrix}$$

の如くである。同様の記法により (28) から未定の係數は

$$a_2' a^{-4}\Big/\frac{T}{2}=\frac{\Delta(a_2' a^{-4})}{\Delta_2} \qquad \therefore\quad a_2'=\frac{T}{2}\frac{\Delta(a_2' a^{-4})}{\Delta_2}a^4, \qquad b_2'=-\frac{T}{2}\frac{\Delta(b_2' a^{-2})}{\Delta_2}a^2$$

$$A_2=\frac{T}{2}\frac{\Delta(A_2)}{\Delta_2}, \qquad B_2=-\frac{T}{2}\frac{\Delta(B_2 a^2)}{\Delta_2}\frac{1}{a^2} \qquad \cdots\cdots(30)$$

例へば

$$\Delta(a_2' a^{-4})=\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} & \dfrac{1}{\mu'} & \dfrac{\lambda'}{\mu'(\lambda'+\mu')} & \dfrac{1}{2\mu} \\ -\dfrac{1}{\lambda+\mu} & -\dfrac{1}{\mu'} & -\dfrac{2\lambda'+3\mu'}{\mu'(\lambda'+\mu')} & -\dfrac{1}{2\mu} \end{vmatrix}$$

の如くである。

(29), (30) で未定の係數が求められたから，これらを応力の式 (15), (I6) に代入して，

平板の力は

$$\widehat{rr}=\frac{T}{2}\left[\frac{\Delta(a_0 a^{-2})}{\Delta_0}\frac{a^2}{r^2}+1+\left(1-6\frac{\Delta(a_2' a^{-4})}{\Delta_2}\frac{a^4}{r^4}+4\frac{\Delta(b_2' a^{-2})}{\Delta_2}\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\widehat{\theta\theta}=\frac{T}{2}\left[-\frac{\Delta(a_0 a^{-2})}{\Delta_0}\frac{a^2}{r^2}+1+\left(-1+6\frac{\Delta(a_2' a^{-4})}{\Delta_2}\frac{a^4}{r^4}\qquad 0\qquad\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\widehat{r\theta}=\frac{T}{2}\left[\qquad 0\qquad+\left(-1-6\frac{\Delta(a_2' a^{-4})}{\Delta_2}\frac{a^4}{r^4}+2\frac{\Delta(b_2' a^{-2})}{\Delta_2}\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$\cdots\cdots(31)$$

円形挿入物の応力は

$$\widehat{rr}'=\frac{T}{2}\left[-\frac{\Delta(B_0)}{\Delta_0}+\left(-2\frac{\Delta(A_2)}{\Delta_2}\qquad 0\qquad\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\widehat{\theta\theta}'=\frac{T}{2}\left[-\frac{\Delta(B_0)}{\Delta_0}+\left(2\frac{\Delta(A_2)}{\Delta_2}-12\frac{\Delta(B_2 a^2)}{\Delta_2}\frac{r^2}{a^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\widehat{r\theta}'=\frac{T}{2}\left[\quad 0\quad+\left(2\frac{\Delta(A_2)}{\Delta_2}+6\frac{\Delta(B_2 a^2)}{\Delta_2}\frac{r^2}{a_2}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$\cdots\cdots(32)$$

(31), (32) が所要の式である。

最後に妹澤，西村兩先生の得られた結果と較べてみるに，以下の樣に全く同一であることがわかる。妹澤，西村解の (19) 式の行列式を纒めて次の行列をうる。

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu} & 1 & \dfrac{\lambda'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\ -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\ 2(\lambda+\mu) & -6\mu & 0 & 2\mu' & 1 \\ -(\lambda+\mu) & 6\mu & \lambda'+\mu' & 2\mu' & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

私の (28) 式を変化するに行を 14523 に，列を21435 に入替へて

$$\begin{vmatrix} b_2'a^{-2} & a_2'a^{-4} & B_2a^2 & A_2 & \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} & \dfrac{1}{\mu} & \dfrac{\lambda'}{\mu'(\lambda'+\mu')} & \dfrac{1}{\mu'} & \dfrac{1}{2\mu} \\ -\dfrac{1}{\lambda+\mu} & \dfrac{1}{\mu} & -\dfrac{2\lambda'+3\mu'}{\mu'(\lambda'+\mu')} & -\dfrac{1}{\mu'} & -\dfrac{1}{2\mu} \\ -4 & -6 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

更に第 1 行の各要素に夫々

$$-\frac{2}{\lambda+\mu},\qquad \frac{1}{\mu},\qquad \frac{6}{\lambda'+\mu'},\qquad \frac{1}{\mu'},\qquad 1$$

をとり込んで

$$\begin{vmatrix} -b_2'a^{-2}\dfrac{2}{\lambda+\mu} & a_2'a^{-4}\dfrac{1}{\mu} & B_2a^2\dfrac{6}{\lambda'+\mu'} & A_2\dfrac{1}{\mu'} & \dfrac{T}{2} \\ -\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu} & 1 & \dfrac{\lambda'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\ -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\ 2(\lambda+\mu) & -6\mu & 0 & 2\mu' & 1 \\ -(\lambda+\mu) & 6\mu & \lambda'+\mu' & 2\mu' & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

これは第 1 行を考慮に入れなければ (33) と全く同一である。(34) により未定係數を定めると

$$-b_2'a^{-2}\frac{2}{\lambda+\mu}\Big/\frac{T}{2}=\frac{\varDelta\left(-b_2'a^{-2}\dfrac{2}{\lambda+\mu}\right)}{\varDelta_2}$$

$$\therefore\quad 2b_2'=-\frac{T}{2}(\lambda+\mu)\frac{\varDelta(1)}{\varDelta_2}a^2$$ 但し $\varDelta\left(-b_2'a^{-2}\dfrac{2}{\lambda+\mu}\right)=\varDelta(1)$ と略記する

同様に

$$6a_2'=-\frac{T}{2}6\mu\frac{\varDelta(2)}{\varDelta_2}a^4,\qquad 6B_2=+\frac{T}{2}(\lambda'+\mu')\frac{\varDelta(3)}{\varDelta_2}\frac{1}{a^2},\qquad 2A_2=-\frac{T}{2}2\mu'\frac{\varDelta(4)}{\varDelta_2}\cdots\cdots\cdots(35)$$

(27) を変形すれば

$$\begin{vmatrix} a_0a^{-2}\dfrac{1}{\mu} & 2B_0\dfrac{1}{\lambda'+\mu'} & \dfrac{T}{2}\dfrac{1}{\lambda+\mu} \\ \mu & -(\lambda'+\mu') & \lambda+\mu \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

これから

$$a_0 a^{-2}\frac{1}{\mu}\Big/\frac{T}{2}\frac{1}{\lambda+\mu}=\frac{\Delta(1)}{\Delta_0}=\frac{\begin{vmatrix} -(\lambda'+\mu) & \lambda+\mu \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu & -(\lambda'+\mu') \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\lambda'+\mu'-\lambda-\mu}{\lambda'+\mu'+\mu}$$

$$-2B_0\frac{1}{\lambda'+\mu'}\Big/\frac{T}{2}\frac{1}{\lambda+\mu}=\frac{\begin{vmatrix} \mu & \lambda+\mu \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta_0}=-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda'+\mu'+\mu}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad a_0&=\frac{T}{2}\frac{\mu(\lambda'+\mu'-\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu'+\mu)}a^2 \\ \therefore\quad 2B_0&=\frac{T}{2}\frac{(\lambda'+\mu')(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu'+\mu)} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)$$

となる。

(35) (36), を応力の式 (15), (16) に代入すれば

平板の応力は

$$\widehat{rr}=\frac{T}{2}\Big[\Big(1+\frac{\mu(\lambda'+\mu'-\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu'+\mu)}\frac{a^2}{r^2}\Big)+\Big(1+2(\lambda+\mu)\frac{\Delta(1)}{\Delta^2}\frac{a^2}{r^2}+6\mu\frac{\Delta(2)}{\Delta_2}\frac{a^4}{r^4}\Big)\cos 2\theta\Big]$$

$$\widehat{\theta\theta}=\frac{T}{2}\Big[\Big(1-\frac{\mu(\lambda'+\mu'-\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu'+\mu)}\frac{a^2}{r^2}\Big)-\Big(1\qquad 0\qquad+6\mu\frac{\Delta(2)}{\Delta_2}\frac{r^4}{a^4}\Big)\cos 2\theta\Big]$$

$$\widehat{r\theta}=-\frac{T}{2}\Big[\quad\Big(1-(\lambda+\mu)\frac{\Delta(1)}{\Delta_2}\frac{a^2}{r^2}-6\mu\frac{\Delta(2)}{\Delta_2}\frac{a^4}{r^4}\Big)\sin 2\theta\Big]\cdots\cdots(37)$$

円形挿入物の応力は

$$\widehat{rr}'=\frac{T}{2}\Big[\frac{(\lambda'+\mu')(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu'+\mu)}+\Big(\quad 2\mu'\frac{\Delta(4)}{\Delta_2}\qquad 0\qquad\Big)\cos 2\theta\Big]$$

$$\widehat{\theta\theta}'=\frac{T}{2}\Big[\frac{(\lambda'+\mu')(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu'+\mu)}+\Big(-2\mu'\frac{\Delta(4)}{\Delta_2}+2(\lambda'+\mu')\frac{\Delta(3)}{\Delta_2}\frac{r^2}{a^2}\Big)\cos 2\theta\Big]$$

$$\widehat{r\theta}'=\frac{T}{2}\Big[\qquad 0\qquad+\Big(-2\mu'\frac{\Delta(4)}{\Delta_2}+(\lambda'+\mu')\frac{\Delta(3)}{\Delta_2}\frac{r^2}{a^2}\Big)\sin 2\theta\Big]=0$$

$$\cdots\cdots(38)$$

念の爲上式中の行列式を (34) により書き下して妹澤，西村解の (19) 式と照合すれば

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} & 1 & \frac{\lambda'}{6\mu'} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'} & 1 \\ 2(\lambda+\mu) & -6\mu & 0 & 2\mu' \\ -(\lambda+\mu) & 6\mu & \lambda'+\mu' & 2\mu' \end{vmatrix}=\vartheta$$

$$
\Delta(1)=\begin{vmatrix}
1 & \dfrac{\lambda'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\
-1 & \dfrac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\
-6\mu & 0 & 2\mu' & 1 \\
6\mu & \lambda'+\mu' & 2\mu' & 1
\end{vmatrix}=\vartheta_{B2}
$$

$$
\Delta(2)=\begin{vmatrix}
-\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu} & \dfrac{\lambda'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\
-\dfrac{1}{2} & \dfrac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'} & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\
2(\lambda+\mu) & 0 & 2\mu' & 1 \\
-(\lambda+\mu) & \lambda'+\mu' & 2\mu' & 1
\end{vmatrix}=\vartheta_{B_2}''
$$

$$
\Delta(3)=\begin{vmatrix}
-\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu} & 1 & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\
-\dfrac{1}{2} & -1 & 1 & \dfrac{1}{2\mu} \\
2(\lambda+\mu) & -6\mu & 2\mu' & 1 \\
-(\lambda+\mu) & 6\mu & 2\mu' & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
\Delta(4)=\begin{vmatrix}
-\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu} & 1 & \dfrac{\lambda'}{6\mu'} & \dfrac{1}{2\mu} \\
-\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'} & \dfrac{1}{2\mu} \\
2(\lambda+\mu) & -6\mu & 0 & 1 \\
-(\lambda+\mu) & 6\mu & \lambda'+\mu' & 1
\end{vmatrix}=\vartheta_{C_2}''
$$

(ϑ は妹澤，西村解の Notation を引用せるもの)

となる。$\Delta(3)$ は計算遂行の結果恰度 0 になる。

妹澤，西村解の (19) 式中に

$$\frac{\lambda'+\mu'}{6\mu'}$$

なる項があるが，これに就ては航研報告 84 號に

$$\frac{2\lambda'+3\mu'}{6\mu'}$$

と訂正してあるので，(33) 式はこれに依つておいた。

尙本問題は

$$\lambda=\lambda' \qquad \mu=\mu'$$

のときは孔の無い單純な平板の引張りに歸するわけであるが，事實應力の式 (31)，(32) を上の樣に假定して簡單にすると (23) 式になることが確められた。