ある。之等には回路の電流平衡を取る爲ポテンショメーター法を採用してゐる。從つて電源其の他の多少の變化の爲に平衡は破れ振動の如き測定に用ひられるが構造物の如く比較的徐々に応力を受けるものゝ測定には適しない。殊に橋梁等野外の諸種の狀態の變化を伴ふ測定の實施に當つては多大の困難を伴ふ。

2鉸肋拱橋の応力計算に就て

(昭和13年7月17日　土木学會第2回年次学術講演會に於て)

會員　北　澤　忠　男*

要旨　土木学會第1回年次学術講演會に於て「鉄筋コンクリート無鉸拱の計算方法に就て」なる論文を提出して, (1) 計算を出來るだけ簡單にする事, (2) 1つの拱に就て計算した結果を成可く廣く他の拱に對しても應用し得る樣にする事, (3) 理論の示す所に從つて計算を正確にする事, なる3ヶ條に重點を置いて鉄筋コンクリート無鉸拱の応力計算に就て研究した結果を發表したのであるが, 今回提出する論文も亦全く同一趣意に基きて2鉸肋拱橋の応力計算方法を研究したものである。無鉸肋拱橋としては主として鉄筋コンクリート拱肋が實用せられて居る樣であるが, 2鉸拱に於ては寧ろ鈑拱肋或ひは構拱肋が多く用ひられて居るから此の論文に於ては後の2者に就て研究した結果を發表するのである。但し鉄筋コンクリート拱肋の取扱は夫が無鉸拱であつても亦2鉸拱でも別に變る所は無いと思ふから第1回年次学術講演會に於て發表した事を其の儘用ふればよいと考へる。2鉸肋拱の拱軸曲線の形としては勿論種々なる曲線が用ひ得らるゝのであるが實用上から見て著者は Parabola と Circle の2つを選定した。(1) 及 (2) の目的を實現する爲拱曲線の方程式, 拱環の厚さ, 拱環横断面積及断面2次率等は全部拱の支間 l に由りて表はし得る如く工夫し, 拱環の内面曲線及外面曲線は拱軸曲線と同一種類の曲線を用ひる事とした。(3) の目的に對しては $I\cos\varphi$ 及 $A\cos\varphi$ は一定に非ずして變化するものとした事は勿論, 軸圧力に依る拱環圧縮の影響並に拱環横断面に平行に作用する剪力の影響を考慮し, 是等が拱に生ずる応力に對し如何なる割合のものとなるかを求むる事とした。

1. 拱軸曲線

2鉸肋拱の拱軸曲線として拱頂 C に對し全く對稱の形を持つ所の Parabola 及 Circle の2つを考へる。原點を拱の左端鉸 A に置き曲線の任意點の縱距 y 並に $\tan\varphi$ (φ は拱の任意點の横断面が垂直線となす角) を次の如く定める。

図-1. Parabola

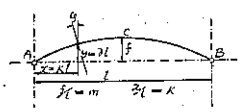
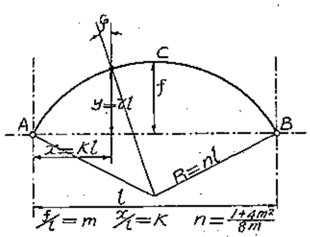


図-2. Circle



(a) Parabola (図-1 參照)

$$y=4\frac{f}{l}\times\frac{x}{l}(l-x),\quad \frac{f}{l}=m,\quad \frac{x}{l}=k$$

$$\therefore\quad y=4mk(1-k)l=\gamma l \cdots\cdots\cdots\cdots (a_1)$$

但　$\gamma=4mk(1-k)$

$$\tan\varphi=4\frac{f}{l}\left(1-2\frac{x}{l}\right)=4m(1-2k)\cdots\cdots\cdots\cdots(a_2)$$

(b) Circle (図-2 參照)

$$R=\text{円の半径}=\frac{(l/2)^2+f^2}{2f}=\frac{1+4m^2}{8m}l=nl$$

* 工学士　名古屋高等工業学校教授

但し　$n=\dfrac{1+4m^2}{8m}$　　$m=\dfrac{f}{l}$

$$y=f-R+\sqrt{R^2-(l/2-x)^2}=\left[(m-n)+\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k\right)^2}\right]l=\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]l=\gamma.l\quad\cdots\cdots(b_1)$$

但し　$k'=\dfrac{1}{2}-k,\quad m'=m-n$

$$\tan\varphi=\frac{l/2-x}{\sqrt{R^2-(l/2-x)^2}}=\frac{k'}{\sqrt{n^2-(k')^2}}\quad\cdots\cdots(b_2)$$

(a_2) 及 (b_2) を以て表はす $\tan\varphi$ の値は A～C 間は正，C～B 間は負である。

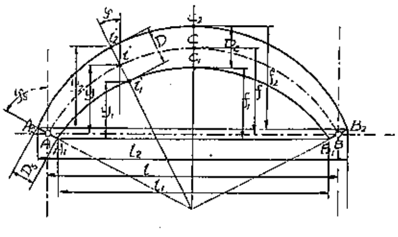
2. 拱肋の形狀及拱環の高さ

拱肋の外觀は其の內面曲線と外面曲線の形狀に依りて定められ，夫に從つて拱軸曲線も定まるものであるが，是等の3つの曲線は必ずしも同一種類のものとはならないのであるが，著者は同一種類のものとして研究を進める。尙又拱肋横斷面は上下，左右共に全く對稱の形を具へて居り，從つて其の重心は橫斷面の對稱軸の交點に位し，故に拱軸は拱肋の高さの 1/2 の點を通るものとする。

2 鉸肋拱橋に使用せらるゝ拱肋の形としては拱端から拱頂に至るまで其の橫斷面の高さが均一である場合が多い。此の條件に於て拱軸が Circle であるならば內面曲線及外面曲線は共に拱軸曲線と同心円となるのであるが，拱軸が Parabola であると外面曲線と內面曲線とがやはり Parabola であるとする事は理論上正確であるとは云ひ得ないが拱環の高さが支間の 1/30～1/40 の程度であり，且つ $m=f/l$ が 0.3 以下の程度であるならば是等兩曲線は Parabola と極めてよく一致する，故に既に述べた通り 3 つの曲線は同一種類の曲線であるとして差支無きものと思はれる。

2 鉸肋拱に於ては屢々拱環の高さを拱端から拱頂に向つて漸次增加する事がある，之は勿論拱環に生ずる應力の變化に伴つて行ふべきであり，從つて拱肋を經濟的に設計する立場から見れば重要な問題ではあるが，著者現在の研究は此の問題には觸れないで只拱環の高さが漸次變化する樣な拱肋の應力を如何にして計算すべきかに就て考慮するのである。拱環の高さを漸次變化せしめる方法は種々あるとは思ふが著者は拱端の高さ D_S と拱頂の高さ D_C を與へ，內面曲線と外面曲線が拱軸曲線と同一種類の曲線である樣にして拱肋の外觀を整へ，從つて高さ D は拱端から拱頂に向つて漸次變化する樣に定めんとするものであつて具體的に云へば次の如くである。圖-3 に示す如く先づ拱軸曲線の支間 l 及其の拱矢 f を與へて拱端 AB 及拱頂 C を通る如く拱軸曲線を定め，次に A_1A_2, B_1B_2 及 C_1C_2 なる直線を拱軸曲線に直角に引き且 $\overline{AA_1}=\overline{AA_2}=\frac{1}{2}D_S$, $\overline{BB_1}=\overline{BB_2}=\frac{1}{2}D_S$ 及 $\overline{CC_1}=\overline{CC_2}=\frac{1}{2}D_C$ となるが如くに A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 なる點をきめる，但し D_S は拱端，D_C は拱頂に於ける拱環の高さである。次に A_1, C_1, B_1 の 3 點を通して內面曲線を又 A_2, C_2, B_2 なる 3 點を通して外面曲線を畫く但し是等は拱軸曲線と同一種類の曲線である。斯くして作られた拱肋の任意點の高さ D は拱軸に對して直角の方向に直線 $i_1\,i_2$ を引き夫が內面曲線及外面曲線と交る點を夫々 i_1 及 i_2 とすれば，此の $i_1\,i_2$ 間の距離が D であるから

圖-3.



$$D=(y_2+D_S\cos\varphi_A-y_1)\sec\varphi\quad\cdots\cdots(c)$$

なる式を以て拱環の高さを表はす事が出來る。y_1 は A_1 を原點とする內面曲線の水平軸 A_1B_1 から計つた i_1 の縱距であり又 y_2 は A_2 を原點とする外面曲線の水平軸 A_2B_2 から計つた i_2 の縱距である。而して D の實際の値を求めるには y_1 及 y_2 を知る事を要し，夫が爲には各曲線の原點からの橫距たる x_1 及 x_2 を定める事が必要である。拱頂及拱端に於ける拱環の高さを夫々 $D_c=\alpha_c l$, $D_s=\alpha_s l$ の如く拱軸曲線の徑間 l で表はせば 図-3 に依り

$$l_1=\text{內面曲線の徑間}=l-D_s\sin\varphi_A=(1-\alpha_s\sin\varphi_A)\times l=a_1\times l$$

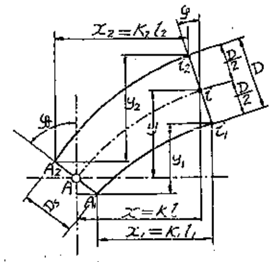
$$l_2=\text{外面曲線の徑間}=l+D_s\sin\varphi_A=(1+\alpha_s\sin\varphi_A)\times l=a_2\times l$$

$$f_1=\text{內面曲線の拱矢}=f-\frac{1}{2}D_c+\frac{1}{2}D_s\cos\varphi_A=\left(m-\frac{1}{2}\alpha_c+\frac{1}{2}\alpha_s\cos\varphi_A\right)\times l=b_1\times l$$

$$f_2=\text{外面曲線の拱矢}=f+\frac{1}{2}D_c-\frac{1}{2}D_s\cos\varphi_A=\left(m+\frac{1}{2}\alpha_c-\frac{1}{2}\alpha_s\cos\varphi_A\right)\times l=b_2\times l$$

であるから $m_1=f_1/l_1=b_1/a_1$, $m_2=f_2/l_2=b_2/a_2$ となる。図-4 に依り拱軸曲線上の與へられたる點 i の $\tan\varphi$ を式で表はせば

図-4.



$$\tan\varphi=\frac{x_1+\frac{1}{2}D_s\sin\varphi_A-x}{y+\frac{1}{2}D_s\cos\varphi_A-y_1}=\frac{x+\frac{1}{2}D_s\sin\varphi_A-x_2}{y_2+\frac{1}{2}D_s\cos\varphi_A-y}$$

であり y_1 は x_1 の函數，又 y_2 は x_2 の函數であるから此の 2 つの方程式に依りて x_1 及 x_2 の値を求むる事が出來るわけである。

1.　Parabola

拱軸曲線が parabola である場合には內面曲線も外面曲線も共に parabola であるとせば

$$x=kl,\quad y=4mk(1-k)l=\gamma l,\quad D_s=\alpha_s l,\quad x_1=k_1l_1=k_1a_1l$$

$$x_2=k_2l_2=k_2a_2l,\quad m_1=b_1/a_1,\quad m_2=b_2/a_2$$

$$\therefore\quad y_1=4m_1k_1(1-k_1)l_1=4m_1k_1(1-k_1)a_1l=4b_1(k_1-k_1^2)l$$

$$y_2=4m_2k_2(1-k_2)l_2=4m_2k_2(1-k_2)a_2l=4b_2(k_2-k_2^2)l$$

となり之を $\tan\varphi$ の式に代入すれば

$$\tan\varphi=\frac{k_1a_1+\frac{1}{2}\alpha_s\sin\varphi_A-k}{\gamma+\frac{1}{2}\alpha_s\cos\varphi_A-4b_1(k_1-k_1^2)}$$

$$\therefore\quad 4b_1\tan\varphi\,k_1^2-(4b_1\tan\varphi+a_1)k_1+\left[k-\frac{1}{2}\alpha_s\sin\varphi_A+\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha_s\cos\varphi_A\right)\tan\varphi\right]=0\quad\cdots\cdots(d_1)$$

$$\tan\varphi=\frac{k+\frac{1}{2}\alpha_s\sin\varphi_A-k_2a_2}{4b_2(k_2-k_2^2)+\frac{1}{2}\alpha_s\cos\varphi_A-\gamma}$$

$$\therefore\quad 4b_2\tan\varphi\,k_2^2-(4b_2\tan\varphi+a_2)k_2+\left[k+\frac{1}{2}\alpha_s\sin\varphi_A+\left(\gamma-\frac{1}{2}\alpha_s\cos\varphi_A\right)\tan\varphi\right]=0\quad\cdots\cdots(d_2)$$

是等の 2 つの式から k_1 及 k_2 を定める事が出來，夫に依りて y_1 及 y_2 の値が求まるから (c) の式に依り D を見出す事が出來る。

2.　Circle

拱軸曲線が circle である場合には內面曲線及外面曲線も共に circle であるとすれば夫等の縱距 y_1 及 y_2 は y

と同様に表はす事が出來る。即ち

$$y=\left[(m-n)+\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k\right)^2}\right]l=\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]l=\gamma l$$

$$y_1=\left[(m_1-n_1)+\sqrt{n_1^2-\left(\frac{1}{2}-k_1\right)^2}\right]l_1=\left[m_1'+\sqrt{n_1^2-(k_1')^2}\right]a_1 l$$

$$y_2=\left[(m_2-n_2)+\sqrt{n_2^2-\left(\frac{1}{2}-k_2\right)^2}\right]l_2=\left[m_2'+\sqrt{n_2^2-(k_2')^2}\right]a_2 l$$

$$\tan\varphi=\frac{k_1a_1+\frac{1}{2}\alpha_S\sin\varphi_A-k}{\gamma+\frac{1}{2}\alpha_S\cos\varphi_A-\left[m_1'+\sqrt{n_1^2-(k_1')^2}\right]a_1}$$

$$\therefore\quad a_1^2(1+\tan^2\varphi)k_1^2-(a_1^2\tan^2\varphi+2a_1c_1)k_1+\left(\frac{1}{4}a_1^2\tan^2\varphi-a_1^2n_1^2\tan^2\varphi+c_1^2\right)=0\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{d}_3)$$

$$\text{但し}\quad c_1=\left[\left\{-m_1'a_1+\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha_S\cos\varphi_A\right)\right\}\tan\varphi-\frac{1}{2}\alpha_S\sin\varphi_A+k\right]$$

$$\tan\varphi=\frac{k+\frac{1}{2}\alpha_S\sin\varphi_A-k_2a_2}{\left[m_2'+\sqrt{n_2^2-(k_2')^2}\right]a_2+\frac{1}{2}\alpha_S\cos\varphi_A-\gamma}$$

$$\therefore\quad a_2^2(1+\tan^2\varphi)k_2^2-(a_2^2\tan^2\varphi+2a_2c_2)k_2+\left(\frac{1}{4}a_2^2\tan^2\varphi-a_2^2n_2^2\tan^2\varphi+c_2^2\right)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{d}_4)$$

$$\text{但し}\quad c_2=\left[\left\{-m_2'a_2+\left(\gamma-\frac{1}{2}\alpha_S\cos\varphi_A\right)\right\}\tan\varphi+\frac{1}{2}\alpha_S\sin\varphi_A+k\right]$$

(d_3) 及 (d_4) を 2 次方程式として解きて k_1 及 k_2 を求め，夫によりて縦距 y_1 及 y_2 を計算し，夫等を (c) 式にあてはめて與へられたる點の拱環の高さ D を決定する。

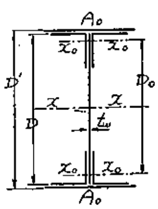
3. 拱肋横断面積及其の 2 次率

1. 鈑拱肋

鈑拱肋は 図-5 に示す如く突縁及腹鈑より成るものであり，突縁は 4 個の山形鋼と蓋鈑から成立つ事が普通であるけれ共，蓋鈑の數は拱肋の全長を通じて一定とは限らず，又上突縁と下突縁とに於て其の數を異にする事がある。故に拱肋の高さを定めるのに其の全高 D' を以てする事は不適當であるから，蓋鈑を取除ける部分の高さ即ち上下突縁山形鋼の水平脚の外面から外面に至る距離 D を以て拱肋の高さとする，更に換言すれば下突縁山形鋼の水平脚の下面が拱肋の内面曲線を形作り，上突縁山形鋼の水平脚の上面が拱肋の外面曲線を形成するものと定めるのである。腹鈑の高さは D より極僅かに小ならしむる必要があるけれ共 D に等しきものとして計算しても差支無き程度である，又上下の突縁横斷面積は實際には異なる場合もあるけれ共，問題の複雑化を避くる爲其の形も面積も全く相等しきものとする。之に由り拱肋横断面は上下，左右共に對稱の形となり，其の重心は腹鈑の中央に位する事になる。上下突縁の横断面積を各 A_0 とし，其の各の重心間の距離を D_0 とし腹鈑の厚さを t_w とせば

図-5. 鈑拱肋横断面

A_0＝突縁横断面積
x_0＝突縁中立軸線



$$A=\text{拱肋横断面積}=2A_0+t_w\times D$$

$$I=\text{水平軸に對する横斷面2次率}=2\left[I_0+A_0\left(\frac{D_0}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{12}t_wD^3$$

腹鈑の横斷面積 $t_w\times D$ を A_wとし，拱肋の高さ D を拱軸曲線の徑間 l で表はせば $D=\alpha l$ と置く事が出來，I_0 は極めて小であるから之を省略し，又 D_0 は蓋鈑を有する鈑拱肋に於ては D と大差が無いから假に $D_0=D$ として A 及 I を求めると

$$A=2A_0+A_w=A_w\left[2\frac{A_0}{A_w}+1\right]=t_wD\left[2\frac{A_0}{A_w}+1\right]=t_w\alpha l\times\mu_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(e_1)$$

$$I=\frac{1}{2}A_0D^2+\frac{1}{12}A_wD^2=D^2\left[\frac{1}{2}A_0+\frac{1}{12}A_w\right]=A_wD^2\left[\frac{1}{2}\frac{A_0}{A_w}+\frac{1}{12}\right]$$

$$=t_wD^3\left[\frac{1}{2}\frac{A_0}{A_w}+\frac{1}{12}\right]=t_w\alpha^3l^3\times\mu_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(e_2)$$

$$\text{但し}\quad \mu_1=\left[2\frac{A_0}{A_w}+1\right],\qquad \mu_2=\left[\frac{1}{2}\frac{A_0}{A_w}+\frac{1}{12}\right]$$

μ_1 及 μ_2 の値は A_0/A_w の比に依りて支配せらるゝものであり，之を檢討する爲に多くの實際の鈑拱肋横斷面を系統的に取りて A_0/A_w を求め，夫から μ_1 及 μ_2 の値を算出して見た。但し I に就きては $D_0=D$ として (e_2) 式を作つたのであるから A_0 及 A_w の實際の値を其の儘用ひて μ_2 を計算すると $t_wD^3\times\mu_2$ は實際横斷面の2次率に等しくならないから之を修正する爲 A_0'/A_w' なる比を考へ

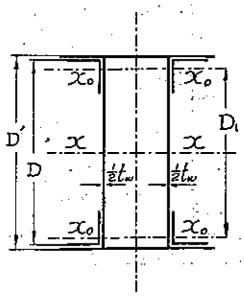
$$A_wD^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_0'}{A_w'}\right)+\frac{1}{12}\right]=I\quad\therefore\quad\frac{A_0'}{A_w'}=\frac{2I}{A_wD^2}-\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad\mu_2=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_0'}{A_w'}\right)+\frac{1}{12}\right]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2I}{A_wD^2}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{12}\right]=\frac{I}{A_wD^2}$$

に依りて μ_2 を定むる事とした。斯く A と I とを (e_1) 及 (e_2) の如く表はす事に依りて著者の提唱する目的が達せられる事になる，即ち t_w は拱肋の全長を通じて一定であり，又 l は拱軸曲線の徑間を示す一定數であるから2鉸拱の不靜定條件たる水平反力 H を求むる爲の各種積分から取除く事が出來，從つて夫等積分の中には A は $\alpha\mu_1$ なる形として，又 I は $\alpha^3\mu_2$ なる形に於て取入れられ，是に依りて積分を可能ならしめ，若しくは容易ならしむる事が出來る。又 H の値の中には徑間 l の實際數値を含まずして $f/l=m$ なる比の形に於て含まれて居るのであるから，徑間及拱矢の實際の値の如何に關せず其の比 m が同じであるならば H も亦同じになるから，1つの拱橋に就きて計算せられたる H の値を他の幾多の拱に對して利用する事が可能となる。

多くの鈑拱肋横斷面に就き μ_1 及 μ_2 の値を實際に計算した結果は 圖-7 及 圖-8 に示す如くで兩者共に拱肋高が小なる程大であり，又突緣横斷面積を増すに從つて大となる。μ_1 及 μ_2 の曲線は圖示する通り極めて整然たる形をなして居るから，圖示する以外の横斷面の μ_1 及 μ_2 を補挿法に依りて相當正確に決定する事が出來る。

圖-6. 複鈑拱肋横斷圖



鈑拱肋横斷面の形として 圖-6 に示す如く 2 枚の複鈑を用ひる事が屢ゝある，是は水平軸のみに就て見れば 圖-5 の腹鈑の厚さが 2 倍になつた場合と同一であり，故に其の μ_1 及 μ_2 の値は 圖-5 の横斷面と同樣に求める事が出來，其の結果は 圖-9 に之を示す。

2. 構 拱 肋

構拱肋に就きては 圖-10 (a) 及 (b) の如き 2 つの形が考へられるのであるが 圖-

図-7.　鈑拱肋横断面 μ_1 曲線

A＝鈑拱肋横断面積＝$\mu_1 \times t_w \alpha\, l$

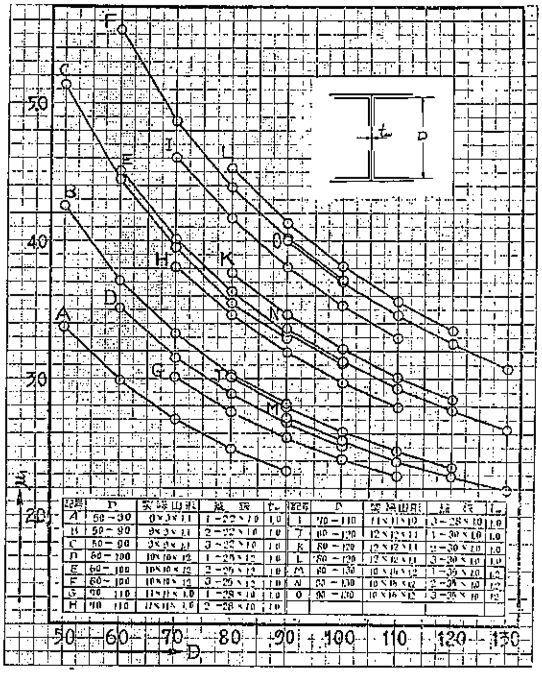


図-8.　鈑拱肋横断面 μ_2 曲線

I＝鈑拱肋横断面２次率＝$\mu_2 \times t_w \alpha^3 l^3$

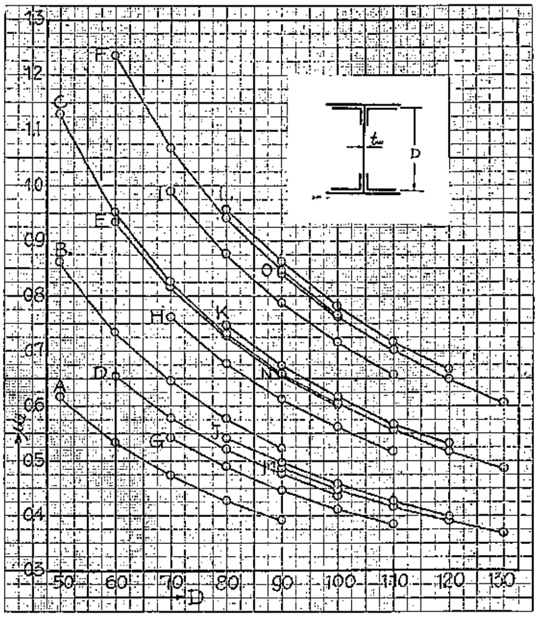


図-9.　複鈑拱肋 μ_1 及 μ_2 曲線

$A=\mu_1 \times t_w \alpha\, l,\ I=\mu_2 \times t_w \alpha^3 l^3$

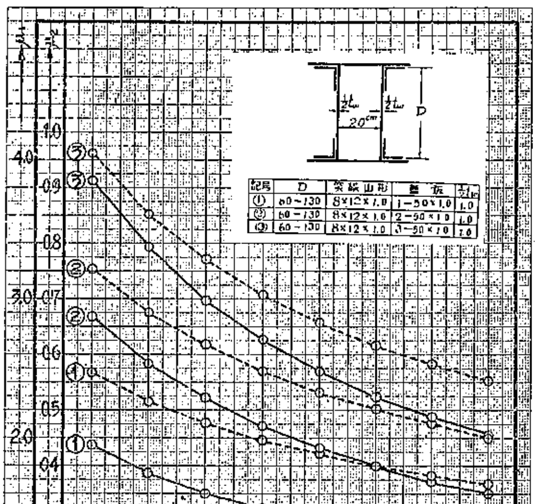
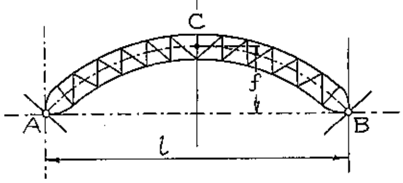
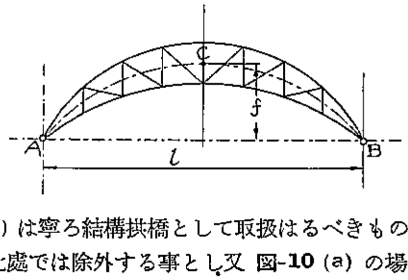


図-10 (a).



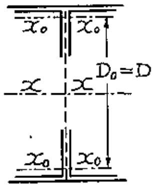
(b).



10 (b) は寧ろ結構拱橋として取扱はるべきものであり故に此處では除外する事とし又 図-10 (a) の場合は上下の弦材は全く平行するか又は極めて平行に近きものであり，且つ拱肋高 D は径間に比して甚小であり，從つて拱肋の全仕事量に對する腹材の影響は之を省略しても差支無き程度のものであるとして研究を進める。図-11 に依り構拱肋の横断面積及其の２次率は次の如く表はす。

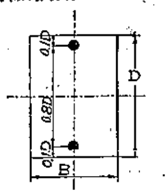
$$A=2A_0,\quad I=2\left[I_0+A_0\left(\frac{D_0}{2}\right)^2\right]$$

図-11. 横拱肋横断図



但し A_0 は弦材の横断面積で上下全く同一であるとする，I_0 は弦材横断面の主軸に對する2次率で一般に省略して差支無き程度であるから $I\doteqdot\frac{1}{2}A_0D_0^2$ となる，A_0 は拱の全長を通じて一定であるとは云へないが，然し之を大なる範圍に變化せしむる事も實際問題として困難であるから複雑化を避くる爲に A_0 は拱の徑間の全長を通じて一定であるとする，又 D_0 は上下弦材の横断面の重心間の距離であつて弦の横断面の形が與へられなければ之を定め難き關係にあるけれ共，若し $D_0=D$ とすれば即ち弦材の重心軸線が拱肋の內面曲線及外面曲線と一致するものとすれば $I=\frac{1}{2}A_0D^2=\frac{1}{2}A_0\alpha^2l^2$ となり鈑拱肋の場合と同様 H の式の各種積分から A_0 と l とを除外する事が出來，前同様の目的を達する事が可能である。

図-12. 鉄筋コンクリート拱肋横断図



3. 鉄筋コンクリート拱肋

高さ D, 幅 B なる矩形横断面を有する鉄筋コンクリート拱肋の取扱に就ては，第1回年次学術講演會に於て詳細に報告して居るから此處では省略して只其の結果のみを擧ぐれば

$$A=\mu_1BD=\mu_1B\alpha l \qquad \mu_1=1.12\sim1.13$$

$$I=\mu_2BD^3=\mu_2B\alpha^3l^3 \qquad \mu_2=0.103\sim0.104$$

であつて横断面の上下に配置せられる鉄筋横断面積は相等しく且つ對稱的である。上下の何れか1方の鉄筋横断面積の拱肋横断面積に對する割合は 0.006～0.007 の程度であり，又 $n=E_s/E_c$ の比は 10～11 の範圍である。

4. 剪断力に對する係數

剪断力を2鉸拱の計算に對し考慮に入れる場合には其の仕事量は T：剪断力，G：剛性係數，β：剪断歪の係數とすれば

$$W_s=\frac{1}{2}\int\frac{\beta T^2dx}{GA\cos\varphi}$$

なる形としてはいる事になるのであるが，此の中 G は單獨に取扱はれずして E/G として關係するから $E/G=2(1+1/m)$ に依りて之を定める事が出來る，但し $1/m$ は Poisson 比であるから

鋼材：$E/G=2.5$ コンクリート：$E/G=2.3$

の程度とする事が出來る。β なる係數は拱肋横断面の形に依りて左右せらるゝものであるから，拱肋高が拱端から拱頂に向つて變化する場合には β も亦變化するけれ共，β の變化は極めて僅かであるから拱肋高があまり大なる變化をなさゞる限り β は拱の全長を通じて一定であるとして差支無きものと思はれる。今鈑拱肋，構拱肋及鉄筋コンクリート拱肋に就て β の値を次の如く定める。

1. 鈑拱肋横断面の β

D＝拱肋高（腹鈑高），t_w＝腹鈑厚，A_0＝突緣横断面積，$A_w=t_wD$＝腹鈑横断面積，A＝拱肋横断面積＝$2A_0+A_w$，I＝横断面2次率$\doteqdot\frac{1}{2}D^2[A_0+\frac{1}{6}A_w]$，$Q$＝拱肋横断面の中立軸に對し腹鈑の y なる點より突緣に至るまでの断面率$\doteqdot\frac{1}{2}A_0D+\frac{1}{8}(D^2-4y^2)t_w$，$T$＝剪断力

とせば

$$\tau=\text{單位剪断力}=\frac{T\times Q}{t_w\times I}=\frac{T}{A_0+\frac{1}{6}A_w}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{A_0}{A_w}\right)-\frac{y^2}{D^2}\right]$$

$$\beta=\text{剪断歪の係數}=2\frac{A}{T^2}\int_0^{\frac{D}{2}}\tau^2\alpha A=\frac{2A}{\left(A_0+\frac{1}{6}A_w\right)^2}\int_0^{\frac{D}{2}}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{A_0}{A_w}\right)-\frac{y^2}{D^2}\right]^2 t_w dy$$

$$=\frac{1+2\frac{A_0}{A_w}}{\left(\frac{1}{6}+\frac{A_0}{A_w}\right)^2}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{A_0}{A_w}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{A_0}{A_w}\right)+\frac{1}{80}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{f})$$

此の β 値は A_0/A_w が増すに從つて大となる，即ち腹鈑に比し突縁横断面積が大となるに從ひ β は大となるのであるが大体に於て 2.5～3.0 の範圍である。

2. 構　拱　肋

上下の弦材が全く平行するか，若しくは平行に近き形を有する構拱肋に於ては剪断力 T は腹材が全部之を引受ける事になり，而して構肋の全仕事量を考へる時に腹材の影響を無視する方針を取るならば結局構拱肋に於ては剪断力を全く省略すると云ふ事になるから從つて β を考慮する必要が無い。

3. 鉄筋コンクリート拱肋の β

水平軸に對し對稱の形を有する矩形の鉄筋コンクリート拱肋横断面の β の値は第 1 回年次学術講演會に於て報告した通り鉄筋横断面積をコンクリートの當價面積に換算してコンクリートのみの I 字形横断面と考へて β の値を計算する事が出來，其の結果としては β は 1.34～1.40 の程度である。

以上の如く E/G 及 β の値を決定するものとせば剪断力 T に依る仕事量を定める事が出來，夫に依りて拱の水平反力 H の計算に於て剪断力の影響を取入れることが出來る。

5. 不靜定條件 H の計算

對稱の形を有する 2 鉸拱の不靜定條件としては拱端に於ける水平反力 H を取るのが普通の方法であるから著者も H を以て不靜定條件とする。拱橋の應力計算に於ては H の實際の値を直接に求むる事よりも H の影響線を作る事が肝要であるから以下取扱ふ所はすべて如何にして H の影響線を求むべきかに集中するものである。

図-13.

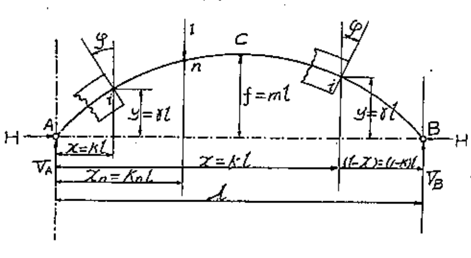


図-13 に於て拱軸曲線の左端 A を原點として縱軸及横軸を定め横軸 $A\sim B$ から拱頂 C に至る距離即ち拱矢を f とし，径間 l に對する f の比を m とする，又拱軸上の任意點 i の横距を $x=kl$ とし其の縱距を $y=\gamma l$ とする。拱肋の任意横断面に作用する應力は曲げモーメント，軸圧力及剪断力の 3 種であり，是等を夫々 M, N, T を以て表はす。拱軸曲線上の任意の 1 點 n に 1 なる荷重を作用せしめた時の拱端垂直反力を V_A 及 V_B とし水平反力を H とすれば與へられたる横断面に生ずる M, N, T は次の如く書く事が出來る。

但し　$V_A=1(1-k_n),\qquad V_B=1\times k_n$

$$M:\quad \left.\begin{array}{ll} A\sim n & M=V_Ax-Hy=[(1-k_n)k-\gamma H]\times l \\ n\sim B & M=V_B(l-x)-Hy=[(1-k)k_n-\gamma H]\times l \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{g}_1)$$

$$N:\quad \left.\begin{array}{ll} A\sim n & N=V_A\sin\varphi+H\cos\varphi=(1-k_n)\sin\varphi+H\cos\varphi \\ n\sim B & N=(V_A-1)\sin\varphi+H\cos\varphi=-k_n\sin\varphi+H\cos\varphi \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{g}_2)$$

$$\left.\begin{aligned} T:\ & A\sim n\quad T=V_A\cos\varphi-H\sin\varphi=(1-k_n)\cos\varphi-H\sin\varphi \\ & n\sim B\quad T=(V_A-1)\cos\varphi-H\sin\varphi=-k_n\cos\varphi-H\sin\varphi \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(g_3)$$

是等の各式に於ける (+) 及 (−) の定め方は

M: 拱肋の上部纎維に應压力, 下部纎維に應張力を生ずるものを (+) とする。

N: 軸压力を (+), 軸張力を (−) とする。

T: 拱肋横断面を右から見た時に面に平行し下向に作用する剪断力を (+) とする。

尙注意すべき點は $\cos\varphi$ は拱の全長を通じて (+) であるが, $\sin\varphi$ は $A\sim C$ 間は (+), $C\sim B$ 間は (−) となるから N 及 T の實際の正負は $\sin\varphi$ に依りて變化する。

不靜定條件 H を定める方法は二, 三あるけれ共, 著者は "principle of least work" を用ふる事とした。"Work" は M に依るもの, N に依るもの, T に依るもの及溫度變化に依るものであつて全部の仕事量 W は次の如く表はされる。

$$W=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M^2dx}{EI\cos\varphi}+\frac{1}{2}\int_0\frac{N^2dx}{EA\cos\varphi}+\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\beta T^2dx}{GA\cos\varphi}\mp\int_0^l N\varepsilon t^\circ\frac{dx}{\cos\varphi}$$

是等の項はいづれも H の函數であるから W は H で微分する事が出來, 且つ "Princ ple of least work" に由りて微分した結果は零となる。

卽ち
$$\frac{\partial W}{\partial H}=\int_0^l\frac{\partial M}{\partial H}\times\frac{Mdx}{EI\cos\varphi}+\int_0^l\frac{\partial N}{\partial H}\times\frac{Ndx}{EA\cos\varphi}+\int_0^l\frac{\partial T}{\partial H}\times\frac{\beta Tdx}{GA\cos\varphi}\mp\varepsilon t^\circ\int_0^l\frac{\partial N}{\partial H}\times\frac{dx}{\cos\varphi}=0$$

前記 (g) の各式に依り

$$\frac{\partial M}{\partial H}=-y\qquad\frac{\partial N}{\partial H}=\cos\varphi\qquad\frac{\partial T}{\partial H}=-\sin\varphi$$

であり又 E, G 及 β は定數であるから是等を積分の外に出すと次の如き形となる。

$$-\int_0^l\frac{My\,dx}{I\cos\varphi}+\int_0^l\frac{Ndx}{A}-\beta\frac{E}{G}\int_0^l\frac{T\sin\varphi dx}{A\cos\varphi}\mp E\varepsilon t^\circ l=0$$

積分は徑間の全長に對して行ふのであるけれ共負荷點 n を境として M, N, T の式が變化するから積分限界は $0\sim x_n$, 及 $x_n\sim l$ の 2 つとなる, 又 $x=kl$ とした爲に x_n は k_nl, l は $1\times l$ となるから限界は $0\sim x_n$ の代りに $0\sim k_n$, $x_n\sim l$ の代りに $k_n\sim1$ を用ふる事とする。又 $x=kl$ であるから $dx=l\times dk$ となり是等のすべての値を上記の基本式に入れて見ると

$$\begin{aligned}&-\int_0^{k_n}\frac{[(1-k_n)k-\gamma H]\gamma\sec\varphi\, l^3dk}{I}-\int_{k_n}^1\frac{[(1-k)k_n-\gamma H]\gamma\sec\varphi\, l^3dk}{I}\\&+\int_0^{k_n}\frac{[(1-k_n)\sin\varphi+H\cos\varphi]l\,dk}{A}+\int_n^1\frac{[-k_n\sin\varphi+H\cos\varphi]l\,dk}{A}\\&-\beta\frac{E}{G}\int_0^{k_n}\frac{[(1-k_n)\cos\varphi-H\sin\varphi]\sin\varphi l\,dk}{A\cos\varphi}-\beta\frac{E}{G}\int_{k_n}^1\frac{[-k_n\cos\varphi-H\sin\varphi]\sin\varphi l\,dk}{A\cos\varphi}\\&\mp E\varepsilon t^\circ l=0\end{aligned}$$

となり, 是より H の値を求めると分數の形となり其の分母及分子は次の如くである。

分母: $$l^3\int_0^1\frac{\gamma^2\sec\varphi\,dk}{I}+l\int_0^1\frac{\cos\varphi dk}{A}+\beta\frac{E}{G}\int_0^l\frac{\sin^2\varphi dk}{A\cos\varphi}$$

$$=2\left[l^3\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma^2\sec\varphi\,dk}{I}-\left(\beta\frac{E}{G}-1\right)l\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\varphi\,dk}{A}+\beta\frac{E}{G}l\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sec\varphi\,dk}{A}\right]$$

$$\text{分子：}\quad l^3\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}-k_nl^3\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}+k_nl^3\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi\,dk}{I}-l\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\,dk}{A}$$

$$+k_nl\int_0^1\frac{\sin\varphi\,dk}{A}+\beta\frac{E}{G}l\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\,dk}{A}-\beta\frac{E}{G}k_nl\int_0^1\frac{\sin\varphi\,dk}{A}\pm E\varepsilon t^\circ l$$

分子に於て $\int_0^1\frac{\sin\varphi\,dk}{A}=0$ であるから

$$\text{分子：}\quad l^3\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi dk}{I}-k_nl^3\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}+k_nl^3\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi dk}{I}-l\int_0^{k_u}\frac{\sin\varphi\,dk}{A}$$

$$+\beta\frac{E}{G}l\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\,dk}{A}\pm E\varepsilon t^\circ l$$

分母及分子に於て $\beta\frac{E}{G}$ 及 $\left(\beta\frac{E}{G}-1\right)$ は共に定數であり是等を θ_1 及 θ_2 なる記號を以て表はし H の式を作れば

$$H=\frac{l^3\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}-k_nl^3\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}+k_nl^3\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi\,dk}{I}+\theta_2l\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\,dk}{A}\pm E\varepsilon t^\circ l}{2\left[l^3\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma^2\sec\varphi dk}{I}-\theta_2l\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\varphi\,dk}{A}+\theta_1l\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sec\varphi\,dk}{A}\right]}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(h)}$$

(h) の式は2鉸肋拱橋の水平反力を求むる爲の一般公式であるけれ共，此の儘では實用に供する事が出來ないから，以下種々なる場合の實用公式を考へる事にする。

(1) 拱肋の高さが拱頂から拱端に向ひ漸次減少する鈑拱肋

3 の 1 に於て述べた通り鈑拱肋の横斷面積及其の 2 次率は夫々 $A=t_w\alpha\mu_1l$, $I=t_w\alpha^3\mu_2l^3$ なる形で表はされ腹鈑厚 t_w は拱の全長を通じて一定であり，α は拱肋の高さを示す係數で拱頂から拱端に向つて漸減する，μ_1 及 μ_2 なる係數は拱肋の高さ及 A_0/A_w なる比に依りて變化するものであり，是等は **圖-7, 8** 又は **圖-9** に依りて相當正確なる値を求める事が出來る。此の A と I を基本式 (h) に代入すると溫度變化に依る項を除き他の項からは t_w, l 及 l^3 を消去する事が出來る。

即ち

$$H=\frac{\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{\alpha^3\mu_2}-k_n\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{\alpha^3\mu_2}+k_n\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi\,dk}{\alpha^3\mu_2}+\theta_2\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\,dk}{\alpha\mu_1}\pm Et_w\varepsilon t^\circ l}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma^2\sec\varphi\,dk}{\alpha^3\mu_2}-\theta_2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\varphi\,dk}{\alpha\mu_1}+\theta_1\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sec\varphi\,dk}{\alpha\mu_1}\right]}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

α 及 μ_1, μ_2 を k の函數として表はす事は不可能では無いと思はれるけれ共，假りに出來たとしても極めて複雜な形となるは言を俟たざる處で，從つて (i) 式の各積分を行ふ事は困難であるから，今迄普通に行はれて居る通りに有限數の和を求むる形に變へて實用に適する如くにする。

今

$$\frac{\gamma\sec\varphi}{\alpha^3\mu_2}=w_a,\quad\frac{\gamma^2\sec\varphi}{\alpha^3\mu_2}=\gamma w_a=w_b,\quad\frac{k\gamma\sec\varphi}{\alpha^3\mu_2}=kw_a=w_c,\quad\frac{\sin\varphi}{\alpha\mu_1}=w_d,$$

$$\frac{\cos\varphi}{\alpha\mu_1}=w_e,\quad\frac{\sec\varphi}{\alpha\mu_1}=w_f$$

とすれば，(i) の式は

$$H=\frac{\int_0^{k_n}w_cdk-k_n\int_0^1w_cdk-k_n\int_{k_n}^1w_adk+\theta_2\int_0^{k_n}w_ddk\pm Et_w\varepsilon t^\circ l}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}w_bdk-\theta_2\int_0^{\frac{1}{2}}w_edk+\theta_1\int_0^{\frac{1}{2}}w_fdk\right]}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(j)}$$

となる。拱軸曲線上の多くの點に於て前記の如き各種の w を求め夫等を點の横距 k に對する縱距として図形を畫けば夫等は w の変化を示す図形となり假に之を w-図形と名づける。$w\,dk$ は dk なる長さに對する w-図形の面積であるから $\int w\,dk$ は積分の限界內に於ける図形の全面積となる，從つて積分を行ふ事の代りに w-図形の面積を正確に測定する事を考へればよい。積分の限界 $0\sim\frac{1}{2}$ は拱端 A から拱頂 C 迄の w-図形の面積を計る事であり，$0\sim1$ は A から B 迄，$0\sim k_n$ は A から負荷點 n 迄，$k_n\sim1$ は負荷點 n から拱端 B 迄の面積を求める意味になる。H を正確に計算する爲には此の面積測定を正確に行ふ事が必要であり，夫が爲には w を求める點の間の水平距離 Δk を dk に準じて極めて小さく取る事を要するけれ共，然し之を極端に小ならしむれば實地計算に困難を感ずるから著者の意見としては徑間 50 m 程度迄の拱であるならば徑間を 20 に等分した各點に相當する拱軸曲線上の諸點に就き w を計算する程度で差支が無いと思ふ。尙又拱軸曲線の長さを等分せずして徑間の方を等分する事は w-図形の面積計算に對しても亦 H の影響線を作る上にも大なる便宜を與へる。今有限長 Δk の左端の w を w_m，右端の w を w_{m+1} とすれば Δk に對する図形の面積 ΔW は $\Delta W=\frac{1}{2}(w_m+w_{m+1})\Delta k$ となるのであるが，若し徑間を或數に等分し，從つて Δk が一定であり且つ荷重の負荷點 n を徑間の等分點に相當する拱軸曲線上の點に置くならば一々前記の如く ΔW を計算する必要を認めない。今徑間を 20 に等分し之に相當する拱軸曲線上の諸點の名稱を拱端 A から 0, 1, 2 等とすれば拱頂 C は 10，拱端 B は 20 となる。之に從つて各點の w は w_{a0}, w_{a1}, w_{o2} 等と書き表はす事にする。負荷點 n を假に 12 なる點に置きたる場合に H の分母，分子の各積分卽ち w-図形の面積を求むる式を示せば次の如くである。但し $\Delta k=\frac{1}{20}=0.05$ ，$k_n=12\times0.05=0.6$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} w_b dk=\left[\frac{1}{2}w_{b_0}+w_{b_1}+w_{b_2}+\cdots\cdot+w_{b_9}+\frac{1}{2}w_{b_{10}}\right]\times0.05 \qquad w_{b_0}=0$$

$$\theta_2\int_0^{\frac{1}{2}} w_e dk=\theta_2\left[\frac{1}{2}w_{e_0}+w_{e_1}+w_{e_2}+\cdots\cdot+w_{e_9}+\frac{1}{2}w_{e_{10}}\right]\times0.05$$

$$\theta_1\int_0^{\frac{1}{2}} w_f dk=\theta_1\left[\frac{1}{2}w_{f_0}+w_{f_1}+w_{f_2}+\cdots\cdot+w_{f_9}+\frac{1}{2}w_{f_{10}}\right]\times0.05$$

$$\int_0^{k_n} w_c dk=\left[\frac{1}{2}w_{c_0}+w_{c_1}+w_{c_2}+\cdots\cdot+w_{c_{10}}+w_{c_{11}}+\frac{1}{2}w_{c_{12}}\right]\times0.05 \qquad w_{c_0}=0$$

$$k_n\int_0^1 w_c dk=0.6\left[\frac{1}{2}w_{c_0}+w_{c_1}+\cdots\cdot+w_{c_{10}}+w_{c_{11}}+\cdots\cdot+w_{c_{19}}+\frac{1}{2}w_{c_{20}}\right]\times0.05 \qquad w_{c_0}=0,\quad w_{c_{20}}=0$$

$$=0.6\left[w_{a_1}+w_{a_2}+w_{a_3}+\cdots\cdot+w_{a_8}+w_{a_9}+\frac{1}{2}w_{a_{10}}\right]\times0.05 \qquad w_c=kw_a$$

$$k_n\int_{k_n}^1 w_a dk=0.6\left[\frac{1}{2}w_{a_{12}}+w_{a_{13}}+w_{a_{14}}+\cdots\cdot+w_{a_{18}}+w_{a_{19}}+\frac{1}{2}w_{a_{20}}\right]\times0.05 \qquad w_{a_{20}}=0$$

$$=0.6\left[w_{a_1}+w_{a_2}+w_{a_3}+\cdots\cdot+w_{a_6}+w_{a_7}+\frac{1}{2}w_{a_8}\right]\times0.05$$

$$\theta_2\int_0^{k_n} w_a dk=\theta_2\left[\frac{1}{2}w_{a_0}+w_{a_1}+w_{a_2}+\cdots\cdot+w_{a_{10}}+w_{a_{11}}+\frac{1}{2}w_{a_{12}}\right]\times0.05 \qquad w_{a_{10}}=0$$

斯く Δk が一定の場合には夫が H の分母，分子を通じて一樣に含まれて居る關係上消去せられるから前記の各式に於て始めから 0.05 を省略する事が出來る。又 H の影響線は對稱拱に於てはやはり對稱の形となる。例へば負荷點 n を 12 に置いた時の H は n を 8 とした時の H と同一であるから結局負荷點は區分點 1 から 10 迄の間に置けばよい。鈑拱肋に於ては E/G の値は大体 2.5の程度で一定であるけれ共，剪斷歪の係數 β は拱肋

高の變化に伴つて多少變化するから θ_1 及 θ_2 は徑間の全長に亘りて一定では無いのであるが，然し普通に用ひられる拱肋横斷面に於ては β は 2.5～3.0 の範圍を出でないから θ_1 は 6.25～7.50, θ_2 は 5.25～6.50 の間に變化し最大最小の差は著しく無いから是等の平均値を取り，$\theta_1=6.9$, $\theta_2=5.9$ として H の式にあてはめて差支無きものと思はれる。

2. 高さが一定なる鈑拱肋

此の場合は高さ D が一定であると同時に腹鈑厚 t_w 及突縁山形鋼も一定であるから拱肋の横斷面積及共の2次率に變化を與ふるものは蓋鈑のみである。鈑拱肋の蓋鈑數は 1～3 であり，夫に從つて A も I も變化するのであるから拱肋の全長を通じて蓋鈑數が一定ならざる場合には $D=\alpha cl$ で一定であつても μ_1 及 μ_2 は一定とはならない。卽ち $A=t_w\alpha cl\mu_1$, $I=t_w\alpha c^3l^3\mu_2$ であるから是等を基本式 (h) にあてはめると

$$H=\frac{\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi dk}{\mu_2}-k_n\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi dk}{\mu_2}+k_n\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi dk}{\mu_2}+\theta_2\alpha c^2\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\,dk}{\mu_1}\pm Et_w\alpha c^3\varepsilon t^\circ l}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma^2\sec\varphi dk}{\mu_2}-\theta_2\alpha c^2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\varphi dk}{\mu_1}+\theta_1\alpha c^2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sec\varphi\,dk}{\mu_1}\right]}\quad\cdots\cdots(j')$$

なる式が得られる．是を (i) 式と同樣に取扱ひ (j) 式を作り w-圖形の面積を計る形として H を求める事が出來る。

拱橋を新に設計する場合に蓋鈑の配置を豫め定める事は不可能であり從つて (i') 式を用ひる事は出來難き所であるから，拱肋高が均一の條件に於ては A も I も夫々均一と假定する事が妥當であると思ふ，卽ち $A=t_w\alpha cl\mu_{1c}$, $I=t_w\alpha c^3l^3\mu_{2c}$ であつて μ_{1c} 及 μ_{2c} は拱頂に於ける拱肋横斷面に對する係數であるけれ共，是等を拱肋の全長に對して一樣に用ひる事とし基本式 (h) に依りて H の式を求めると

$$H=\frac{\int_0^{k_n}k\gamma\sec\varphi dk-k_n\int_0^1k\gamma\sec\varphi dk+k_n\int_{k_n}^1\gamma\sec\varphi dk+\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\sin\varphi dk\pm Et_w\mu_{2c}\alpha c^3\varepsilon t^\circ l}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2\sec\varphi dk-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\varphi dk+\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sec\varphi dk\right]}\quad\cdots\cdots(k)$$

なる形となり分母，分子の各積分は parabola 及 circle 共に可能である。以下 2 つの曲線に對する積分の結果を示す。

(a). Parabola

$$y=4mk(1-k)l\quad,\quad\gamma=4mk(1-k)\quad,\quad\tan\varphi=4m(1-2k)$$

$$\sec\varphi=\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}\ ,\ \sin\varphi=\frac{4m(1-2k)}{\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}}\ ,\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}}$$

分母各項の積分

(I)
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2\sec\varphi dk=\int_0^{\frac{1}{2}}16m^2k^2(1-k)^2\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}dk=16m^2\int_0^{\frac{1}{2}}k^2(1-k)^24m\sqrt{\frac{1}{16m^2}+(1-2k)^2}\,dk$$

$1/16m^2=a^2$, $(1-2k)=k'$ とすれば

$$k=\frac{1-k'}{2}\quad,\quad dk=-\frac{dk'}{2}\quad,\quad1-k=\frac{1+k'}{2}$$

となるから是等を前の式に入れると

$$\int\gamma^2\sec\varphi\,dk=-2m^2\int[1-2(k')^2+(k')^4]\sqrt{a^2+(k')^2}\,dk'$$

積分の限界 $k=0\sim1/2$ に對し $k'=1\sim0$ となるから夫に依り積分を行へば

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2\sec\varphi\,dk=-2m^2\int_1^0[1-2(k')^2+(k')^4]\sqrt{a^2+(k')^2}\,dk'$$

$$=\frac{2\,048\,m^4+64m^2+1}{8\,192\,m^2}\left[\sqrt{1+16m^2}-\frac{1}{4m}\log\frac{1}{4m}+\frac{1}{4m}\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{1+16m^2}+1\right)\right]-\frac{128m^2+3}{12\,288\,m^2}\sqrt{(1+16m^2)^3}$$

$$=\frac{2\,048\,m^4+64m^2+1}{8\,192\,m^2}\left[\sqrt{1+16\,m^2}+\frac{1}{4m}\log(\sqrt{1+16\,m^2}+4m)\right]-\frac{128m^2+3}{12\,288\,m^2}\sqrt{(1+16\,m^2)^3}$$

(II) $$-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\,dk=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dk}{\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}}=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\int_1^0\frac{dk'}{\sqrt{a^2+(k')^2}}$$

$$=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\left[\log\frac{1}{4m}-\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{1+16m^2}+1\right)\right]$$

$$=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\log\left(\sqrt{1+16m^2}+4m\right)$$

(III) $$\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sec\varphi\,dk=\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}\,dk=-\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times2m\int_1^0\sqrt{a^2+(k')^2}\,dk'$$

$$=\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\left[\frac{1}{4}\sqrt{1+16m^2}+\frac{1}{16m}\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{1+16m^2}+1\right)-\frac{1}{16m}\log\frac{1}{4m}\right]$$

$$=\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{4}\left[\sqrt{1+16m^2}+\frac{1}{4m}\log\left(\sqrt{1+16\,m^2}+4m\right)\right]$$

$\therefore$ 分母 $=2[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}]$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{2\,048\,m^4+64m^2+1}{4\,096\,m^2}\left[\sqrt{1+16\,m^2}+\frac{1}{4m}\log\left(\sqrt{1+16\,m^2}+4m\right)\right]-\frac{128m^2+3}{6\,144m^2}\sqrt{(1+16m^2)^3}\\&-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{4m}\log\left(\sqrt{1+16m^2}+4m\right)\\&+\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+16\,m^2}+\frac{1}{4m}\log\left(\sqrt{1+16\,m^2}+4m\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

分子各項の積分

(IV) $$\int_0^{k_n}k\gamma\sec\varphi\,dk=\int_0^{k_n}k4m\,k(1-k)\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}\,dk=16m^2\int_0^{k_n}k^2(1-k)\sqrt{a^2+(1-2k)^2}\,dk$$

積分限界 $k=0\sim k_n$ に對し $k'=1\sim(1-2k_n)$ なるを以て

$$\int_0^{k_n}k\gamma\sec\varphi\,dk=-m^2\int_1^{(1-2k_n)}[1-k'-(k')^2+(k')^3]\sqrt{a^2+(k')^2}\,dk'$$

$$=\frac{64m^2+1}{512\,m}\sqrt{16m^2+1}-\frac{46\,m^2+1}{7\,680\,m^3}\sqrt{[16m^2+1]^3}+\frac{64\,m^2+1}{2\,048m^2}\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16\,m^2+1}+1\right)$$

$$-\frac{64\,m^2+1}{512m}(1-2k_n)\sqrt{16m^2(1-2k_n)+1}\left[\frac{46m^2+1}{7\,680m^3}+\frac{3k_n}{640m}-\frac{8k_n^2}{640\,m}\right]\sqrt{[16\,m^2(1-2k_n)^2]^3}$$

$$-\frac{64m^2+1}{2\,048m^2}\log\left\{\frac{1}{4m}\sqrt{16\,m^2(1-2k_n)^2+1}+(1-2k_n)\right\}$$

(V) $$-k_n\int_0^1k\gamma\sec\varphi\,dk=m^2k_n\int_1^{-1}[1-k'-(k')^2+(k')^3]\sqrt{a^2+(k')^2}\,dk'$$

$$=-\frac{64\,m^2+1}{256\,m}k_n\sqrt{16m^2+1}+\frac{1}{128m}k_n\sqrt{[16\,m^2+1]^3}+\frac{64\,m^2+1}{2\,048m^2}k_n\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16\,m^2+1}-1\right)$$

$$-\frac{64m^2+1}{2\,048m^2}k_n\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2+1}+1\right)$$

(VI)
$$k_n\int_{k_n}^{1}\gamma\sec\varphi\,dk=k_n\int_{k_n}^{1}4mk(1-k)\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}\,dk=-2m^2k_n\int_{(1-2k_n)}^{-1}[1-(k')^2]\sqrt{a^2+(k')^2}\,dk'$$
$$=\frac{64m^2+1}{256m}k_n\sqrt{16m^2+1}-\frac{1}{128m}k_n\sqrt{[16m^2+1]^3}-2\times\frac{64m^2+1}{2\,048m^2}k_n\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2+1}-1\right)$$
$$+\frac{64m^2+1}{256m}k_n(1-2k_n)\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}-\frac{1}{128m}k_n(1-2k_n)\sqrt{[16m^2(1-2k_n)^2+1]^3}+$$
$$2\times\frac{64m^2+1}{2\,048m^2}k_n\log\left\{(1-2k_n)+\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}\right\}$$

(VII)
$$\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\sin\varphi\,dk=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\frac{4m(1-2k)}{\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}}dk=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{2}\int_1^{(1-2k_n)}\frac{k'\,dk'}{\sqrt{a^2+(k')^2}}$$
$$=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\left[\sqrt{16m^2+1}-\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}\right]$$

∴ 分子＝[IV＋V＋VI＋VII]
$$\left.\begin{aligned}&=\frac{64m^2+1}{2\,048m^2}\Big[4m\sqrt{16m^2+1}-k_n\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2+1}-1\right)\\&\quad+(1-k_n)\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2+1}+1\right)-4m(1-2k_n)^2\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}\\&\quad-(1-2k_n)\log\left\{\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}+(1-2k_n)\right\}\Big]\\&\quad-\frac{46m^2+1}{7\,680m^3}\left[\sqrt{(16m^2+1)^3}-\sqrt{[16m^2(1-2k_n)^2+1]^3}\right]-\frac{k_n(1-k_n)}{320m}\sqrt{[16m^2(1-2k_n)^2+1]^3}\\&\quad+\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\left[\sqrt{16m^2+1}-\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}\right]\end{aligned}\right\}\text{(m)}$$

斯くして得たる分母(l)及分子(m)は一見甚だ複雜なる觀あるも實質に於ては $\sqrt{16m^2+1}$ 及 $\sqrt{16m^2(1-2k)^2+1}$ を主体とする計算にして極めて容易に之を行ふ事を得べく，又 $\sqrt{16m^2+1}=\sec\varphi_A$, $\sqrt{16m^2(1-2k)^2+1}=\sec\varphi$ なるを以て拱軸曲線上の各區分點の $\tan\varphi$ の値に依り φ を見出し三角函數表を用ひて $\sec\varphi$ を計算する事が出來る。

(b) Circle

$$y=\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]\times l,\quad \gamma=\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right],\quad n=\frac{1+4m^2}{8m},\quad m=\frac{f}{l},\quad nl=R=\text{円の半径},\quad m'=m-n$$
$$k'=\frac{1}{2}-k=\frac{1-2k}{2},\quad k=\frac{1}{2}-k',\quad dk=-dk',\quad \sec\varphi=\frac{n}{\sqrt{n^2-(k')^2}},\quad \sin\varphi=\frac{k'}{n},\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{n^2-(k')^2}}{n}$$

分母各項の積分

(I)
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2\sec\varphi\,dk=-\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]^2\times\frac{n}{\sqrt{n^2-(k')^2}}dk'$$
$$=-\left[(m')^2+n^2\right]n\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{dk'}{\sqrt{n^2-(k')^2}}-2m'n\int_{\frac{1}{2}}^{0}dk'+n\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{(k')^2dk'}{\sqrt{n^2+(\kappa')^2}}$$
$$=n(m')^2\sin^{-1}\frac{1}{2n}+\frac{n^3}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2n}+n\,m'+\frac{n}{4}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}$$

(Ⅱ) $$-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\,dk=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{n^2-(k')^2}\,dk'=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{n}\left[\frac{1}{4}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+\frac{n^2}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2n}\right]$$

(Ⅲ) $$\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sec\varphi\,dk=-\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times n\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{dk'}{\sqrt{n^2-(k')^2}}=\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times n\sin^{-1}\frac{1}{2n}$$

$$\therefore\ \text{分母}=2[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}]=[2n(m')^2+n^3]\sin^{-1}\frac{1}{2n}+2m'n+\frac{n}{2}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}$$
$$+\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\left[(2\theta_1-\theta_2)n\sin^{-1}\frac{1}{2n}-\frac{\theta_2}{2n}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{n})$$

分子各項の積分

(Ⅳ) $$\int_0^{k_n}k\gamma\sec\varphi\,dk=-\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}\left(\frac{1}{2}-k'\right)\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]\frac{n}{\sqrt{n^2-(k')^2}}dk'$$
$$=-\frac{m'n}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-k_n}\frac{dk'}{\sqrt{n^2-(k')^2}}-\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}dk'+m'n\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}\frac{k'dk'}{\sqrt{n^2-(k')^2}}+n\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k')}k'dk'$$
$$=\frac{m'n}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2n}+m'n\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}-\frac{m'n}{2}\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}-m'n\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}+\frac{nk_n}{2}$$

(Ⅴ) $$-k_n\int_0^1k\gamma\sec\varphi\,dk=k_n\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-k'\right)\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]\frac{n}{\sqrt{n^2-(k')^2}}dk'$$
$$=-k_n\times m'n\times\sin^{-1}\frac{1}{2n}-\frac{nk_n}{2}$$

(Ⅵ) $$k_n\int_{k_n}^1\gamma\sec\varphi\,dk=-k_n\int_{(\frac{1}{2}-k_n)}^{-\frac{1}{2}}\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]\frac{n}{\sqrt{n^2-(k')^2}}dk'$$
$$=-k_n\times m'n\int_{(\frac{1}{2}-k_n)}^{-\frac{1}{2}}\frac{dk'}{\sqrt{n^2-(k')^2}}-k_n\times n\int_{(\frac{1}{2}-k_n)}^{-\frac{1}{2}}dk'$$
$$=k_n\times m'n\times\sin^{-1}\frac{1}{2n}+k_n\times m'n\times\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}+nk_n(1-k_n)$$

(Ⅶ) $$\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\sin\varphi\,dk=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}\frac{k'dk'}{n}=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{k_n(1-k_n)}{2n}$$

$$\therefore\ \text{分子}=[\mathrm{IV}+\mathrm{V}+\mathrm{VI}+\mathrm{VII}]$$
$$=m'n\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+\frac{m'n}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2n}-m'n\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}-m'n\left(\frac{1}{2}-k_n\right)\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}$$
$$+\frac{nk_n}{2}(1-k_n)+\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{k_n(1-k_n)}{2n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{o})$$

円の場合は (n) 及 (o) の式が示す如く $\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}$, $\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}$, $\sin^{-1}\frac{1}{2n}$ 及 $\sin^{-1}\frac{(1/2-k_n)}{n}$ が計算の主体となる。

3. $I\cos\varphi$ 及 $A\cos\varphi$ が一定なる鈑拱肋

$\cos\varphi$ は拱頂に於ては $\cos\varphi_c$ で 1 に等しい。故に $I\cos\varphi$ 及 $A\cos\varphi$ が一定であると云ふ事は $I\cos\varphi=I_c$

$A\cos\varphi=A_c$ であると云ふ事であつて，A_c 及 I_c は拱頂に於ける拱肋横断面の面積及其の 2 次率である，故に $I=I_c\sec\varphi$ 及 $A=A_c\sec\varphi$ であつて任意點の拱肋横断面積及其の 2 次率は $\sec\varphi$ に比例する。然るに $\sec\varphi$ は拱頂に於て最小で拱端に至るに從つて次第に增加する。故に $I\cos\varphi$ 及 $A\cos\varphi$ が一定であると云ふ事は拱肋の横断面積及其の 2 次率は拱頂から拱端に向つて増大すると云ふ結果となり，是は 2 鉸拱の場合にあつては實際と相反する事となる，又 $I\cos\varphi$ と $A\cos\varphi$ とが同時に一定であると云ふ事は容易に成立し難き條件であるから斯かる假定の下に 2 鉸拱の應力を計算する事は不適當と考へられるけれ共，此の假定を行ふ事に依りて H の式の各積分は極めて簡單に行ふ事が出來るから屢〻實用に供せられて居る。殊に $m=f/l$ の値が小なる場合には差支少きものと考へられる。今拱頂に於て $A_c=t_w\alpha_c d\mu_{1c}$, $I_c=t_w\alpha_c^3 l^3\mu_{2c}$ とすれば任意の横断面に對しては $A=t_w\alpha_c d\mu_{1c}\times\sec\varphi$, $I=t_w\alpha_c^3 l^3\mu_{2c}\times\sec\varphi$ となり是等を H の基本式 (h) にあてはめると

$$H=\frac{\int_0^{k_n}k\gamma\,dk-k_n\int_0^1 k\gamma\,dk+k_n\int_{k_n}^1\gamma\,dk+\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\sin\varphi\cos\varphi dk\pm Et_w\mu_{2c}\alpha_c^3\varepsilon t^0 l}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2dk-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos^2\varphi\,dk+\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}dk\right]}\quad\cdots(p)$$

となり是に依りて拱軸曲線が parabola 及 circle である場合の H 値を求めて見る。

(a) Parabola

$$y=4mk(1-k)l,\quad \gamma=4mk(1-k),\quad \tan\varphi=4m(1-2k),\quad \sin\varphi=\frac{4m(1-2k)}{\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+16m^2(1-2k)^2}}$$

分母各項の積分

(I)
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2dk=\int_0^{\frac{1}{2}}16m^2k^2(1-k)^2dk=16m^2\int_0^{\frac{1}{2}}(k^2-2k^3+k^4)dk=\frac{8}{30}m^2$$

(II)
$$-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos^2\varphi dk=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dk}{1+16m^2(1-2k)^2}$$

$4m(1-2k)=k'$ とすれば $dk=-\frac{1}{8m}dk'$ となり又積分限界 $0\sim\frac{1}{2}$ は $4m\sim0$ であるから

$$-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dk}{1+16m^2(1-2k)^2}=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\int_{4m}^0\frac{dk'}{1+(k')^2}=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\tan^{-1}4m$$

(III)
$$\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}dk=\frac{1}{2}\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}$$

$$\therefore\quad 分母=2[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}]=\frac{8}{15}m^2+\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\left[\theta_1-\theta_2\times\frac{1}{4m}\tan^{-1}4m\right]\quad\cdots\cdots(q)$$

分子各項の積分

(IV)
$$\int_0^{k_n}k\gamma dk=\int_0^{k_n}k\,4m\,k(1-k)dk=4m\int_0^{k_n}(k^2-k^3)dk=4m\left(\frac{1}{3}k_n^3-\frac{1}{4}k_n^4\right)$$

(V)
$$-k_n\int_0^1 k\gamma dk=-4mk_n\int_0^1(k^2-k^3)dk=-\frac{1}{3}mk_n$$

(VI)
$$k_n\int_{k_n}^1\gamma\,dk=k_n\int_{k_n}^1 4m\,k(1-k)dk=4mk_n\int_{k_n}^1(k-k^2)dk=4m\left(\frac{1}{6}k_n-\frac{1}{2}k_n^3+\frac{1}{3}k_n^4\right)$$

(VII)
$$\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\sin\varphi\cos\varphi\,dk=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\frac{4m(1-2k)}{1+16m^2(1-2k)^2}dk=-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{8m}\int_{4m}^{4m(1-2k_n)}\frac{k'dk'}{1+(k')^2}$$

$$=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{16m}\left[\log(16m^2+1)-\log\{16m^2(1-2k_n)^2+1\}\right]$$

∴ 分子$=[\text{IV}+\text{V}+\text{VI}+\text{VII}]$

$$=\frac{1}{3}m\left[k_n-2k_n^3+k_n^4\right]+\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{16m}\left[\log(16m^2+1)-\log\{16m^2(1-2k_n)^2+1\}\right]$$

$$H=\frac{\frac{1}{3}m\left[k_n-2k_n^3+k_n^4\right]+\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{16m}\left[\log(16m^2+1)-\log\{16m^2(1-2k_n)^2+1\}\right]}{\frac{8}{15}m^2+\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\left[\theta_1-\theta_2\times\frac{1}{4m}\tan^{-1}4m\right]}\cdots\cdots(\text{r})$$

(b) Circle

$$y=\left[m-n+\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k\right)^2}\right]l,\qquad m-n=m',\qquad \frac{1}{2}-k=k',\qquad dk=-dk',\qquad \gamma=\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right],$$

$$\tan\varphi=\frac{k'}{\sqrt{n^2-(k')^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{k'}{n},\qquad \cos\varphi=\frac{\sqrt{n^2-(k')^2}}{n}$$

分母各項の積分

(I)
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\gamma^2dk=-\int_{\frac{1}{2}}^0\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]^2dk'=-\int_{\frac{1}{2}}^0\left[(m')^2+n^2+2m'\sqrt{n^2-(k')^2}-(k')^2\right]dk'$$
$$=\frac{1}{2}\left[(m')^2+n^2\right]+\frac{m'}{2}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+m'n^2\times\sin^{-1}\frac{1}{2n}-\frac{1}{24}$$

(II)
$$-\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos^2\varphi\,dk=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{n^2-(k')^2}{n^2}dk'=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_{\frac{1}{2}}^0\left[1-\frac{(k')^2}{n^2}\right]dk'$$
$$=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\left(\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{2}\right)$$

(III)
$$\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{\frac{1}{2}}dk=\frac{1}{2}\theta_1\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}$$

∴ 分母$=2[\text{I}+\text{II}+\text{III}]$

$$=\left[(m')^2+n^2+m'\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+2m'n^2\times\sin^{-1}\frac{1}{2n}-\frac{1}{12}\right]+\frac{\mu_{2c}\alpha c^2}{\mu_{1c}}\left[\theta_1-\theta_2+\frac{\theta_2}{12n^2}\right]\cdots\cdots\cdots(\text{s})$$

分子各項の積分

(IV)
$$\int_0^{k_n}k\gamma\,dk=-\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}\left(\frac{1}{2}-k'\right)\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}k'\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'$$
$$=\frac{1}{2}m'k_n-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}-k_n\right)\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}+n^2\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}-\frac{1}{2}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}-n^2\sin^{-1}\frac{1}{2n}\right]$$
$$+\frac{m'}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2-\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{3}\sqrt{\left[n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2\right]^3}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(n^2-\frac{1}{4}\right)^3}$$

(V)
$$-k_n\int_0^1k\gamma\,dk=k_n\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-k'\right)\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'=\frac{1}{2}k_n\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'$$
$$-k_n\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}k'\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'$$

$$=-\frac{1}{2}m'k_n-\frac{1}{4}k_n\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}k_n\times n^2\sin^{-1}\frac{1}{2n}$$

(Ⅵ)
$$k_n\int_{k_n}^{1}\gamma\,dk=-k_n\int_{(\frac{1}{2}-k_n)}^{-\frac{1}{2}}\left[m'+\sqrt{n^2-(k')^2}\right]dk'=-k_n\times m'\int_{(\frac{1}{2}-k_n)}^{-\frac{1}{2}}dk'-k_n\int_{(\frac{1}{2}-k_n)}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n^2-(k')^2}\,dk$$

$$=m'k_n(1-k_n)+\frac{1}{2}k_n\left(\frac{1}{2}-k_n\right)\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}+\frac{1}{2}k_n\times n^2\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}$$

$$+\frac{1}{4}k_n\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}k_n\times n^2\sin^{-1}\frac{1}{2n}$$

(Ⅶ)
$$\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\int_0^{k_n}\sin\varphi\cos\varphi\,dk=\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}-k_n)}k'\sqrt{n^2-(k')^2}\,dk'$$

$$=\frac{1}{3}\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{n^2}\left[\sqrt{\left[n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2\right]^3}-\sqrt{\left[n^2-\frac{1}{4}\right]^3}\right]$$

∴　分子＝[Ⅳ×Ⅴ＋Ⅵ＋Ⅶ]

$$=\frac{1}{8}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}\sqrt{\left[n^2-\frac{1}{4}\right]^3}+\frac{1}{4}n^2\sin^{-1}\frac{1}{2n}+\frac{m'}{2}k_n(1-k_n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{\left[n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2\right]^3}-\frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{2}-k_n\right)\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}$$

$$+\frac{1}{3}\theta_2\frac{\mu_{2c}\alpha_c^2}{\mu_{1c}}\times\frac{1}{n^2}\left[\sqrt{\left[n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2\right]^3}-\sqrt{\left[n^2-\frac{1}{4}\right]^3}\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(t)}$$

4. 構　拱　肋

玆に取扱ふ構拱肋は上下の弦材が全く平行して居るか又は極めて平行に近きものであるとする。前者に於ては拱肋高は全く均一であり，後者に於ては拱頂から拱端に向つて極めて僅かに漸減する。拱肋に作用する剪斷力 T は腹材が之を引受けるから弦材は T に無關係であり，且つ腹材の仕事量は省略せられるから結局構拱肋に於ては M と N だけが考へられ拱肋横斷面は上下の弦材横斷面のみに依り成立つものとする。從つて H の基本式を求むる場合に $\beta\frac{E}{G}$ を含む項を全部取除く事とする。即ち

$$H=\frac{l^3\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}-k_n l^3\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{I}+k_n l^3\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi\,dk}{I}-l\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi dk}{A}\pm E\varepsilon t^\circ l}{2\left[l^3\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma^2\sec\varphi\,dk}{I}+l\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\varphi\,dk}{A}\right]}\quad\cdots\text{(h')}$$

之に A 及 I の適當なる値を代入して H の實用公式を作るのである。

(1)　構拱肋の高さが僅かに變化する場合

構拱肋の上下弦材の横斷面積は拱肋の全長を通じて均一で各 A_0 であるとすれば $A=2A_0$ であり，又上下弦材の重心軸間の距離を以て拱肋高 D とすれば $I\fallingdotseq\frac{1}{2}A_0D^2=\frac{1}{2}A_0\alpha^2l^2$ となり是等を (h') の式に入れると

$$H=\frac{\int_0^{k_n}\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{\alpha^2}-k_n\int_0^1\frac{k\gamma\sec\varphi\,dk}{\alpha^2}+k_n\int_{k_n}^1\frac{\gamma\sec\varphi\,dk}{\alpha^2}-\frac{1}{4}\int_0^{k_n}\sin\varphi\,dk\pm\frac{A_0}{2}E\varepsilon t^\circ}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma^2\sec\varphi\,dk}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\,dk\right]}\quad\text{(i')}$$

$$\frac{\gamma\sec\varphi}{\alpha^2}=w_a\ ,\quad\frac{\gamma^2\sec\varphi}{\alpha^2}=\gamma w_a=w_b\ ,\quad\frac{k\gamma\sec\varphi}{\alpha^2}=kw_a=w_c$$

とすれば

$$H=\frac{\int_0^{k_n} w_c dk - k_n\int_0^1 w_c dk + k_n\int_{k_n}^1 w_a dk - \frac{1}{4}\int_0^{k_n}\sin\varphi\, dk \pm \frac{A_0}{2}E\varepsilon t^\circ}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} w_v dk + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\, dk\right]} \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{j}')$$

となり (j) の場合と同様 w-図形の面積を求むる事に依りて H の値を定める事が出來る。但し $\int\sin\varphi\, dk$ 及 $\int\cos\varphi\, dk$ は拱軸曲線の種類に從ひ積分法に依りて其の値を求める事が出來る。

(2)　高さが均一なる構拱肋

高さが均一であるから $D=D_c=\alpha c l$,　$A=2A_0$,　$I=\frac{1}{2}A_0\alpha c^2 l^2$ で共に拱肋の全長を通じて一定である。之を (h') の式にあてはめると

$$H=\frac{\int_0^{k_n} k\gamma\sec\varphi dk - k_n\int_0^1 k\gamma\sec\varphi dk + k_n\int_{k_n}^1 \gamma\sec\varphi dk - \frac{\alpha c^2}{4}\int_0^{k_n}\sin\varphi\, dk \pm \frac{1}{2}A_0 E\alpha^2\varepsilon t^\circ}{2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \gamma^2\sec\varphi dk + \frac{\alpha c^2}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\, dk\right]}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{k}')$$

(k') 式の各項は拱肋高が一定である鈑拱肋の場合と同一であるから積分法に依りて其の値を求める事が出來る。

(a)　Parabola

$$分母=\frac{2\,048m^4+64m^2+1}{4\,096m^2}\left[\sqrt{16m^2+1}+\frac{1}{4m}\log\left(\sqrt{16m^2+1}+4m\right)\right]-\frac{128m^2+3}{6\,144m^2}\sqrt{(16m^2+1)^3}$$

$$+\frac{\alpha c^2}{4}\times\frac{1}{4m}\log\left(\sqrt{16m^2+1}+4m\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (l')$$

$$分子=\frac{64m^2+1}{2\,048m^2}\Big[4m\sqrt{16m^2+1}-k_n\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2+1}-1\right)+(1-k_n)\log\left(\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2+1}+1\right)$$

$$-4m(1-2k_n)^2\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}-(1-2k_n)\log\left\{\frac{1}{4m}\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}+(1-2k_n)\right\}\Big]$$

$$-\frac{46m^2+1}{7\,680m^3}\left[\sqrt{(16m^2+1)^3}-\sqrt{[16m^2(1-2k_n)^2+1]^3}\right]-\frac{k_n(1-k_n)}{320m}\sqrt{[16m^2(1-2k_n)^2+1]^3}$$

$$-\frac{\alpha c^2}{4}\times\frac{1}{8m}\left[\sqrt{16m^2+1}-\sqrt{16m^2(1-2k_n)^2+1}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{m}')$$

(b)　Circle

$$分母=\left[2n(m')^2+n^3\right]\sin^{-1}\frac{1}{2n}+2m'n+\frac{n}{2}\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+\frac{\alpha c^2}{4}\times\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\frac{1}{4}}+n^2\times\sin^{-1}\frac{1}{2n}\right] \quad (\mathrm{n}')$$

$$分子=m'n\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}+\frac{m'n}{2}\times\sin^{-1}\frac{1}{2n}-m'n\sqrt{n^2-\left(\frac{1}{2}-k_n\right)^2}-m'n\left(\frac{1}{2}-k_n\right)\sin^{-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-k_n\right)}{n}$$

$$+\frac{n}{2}k_n(1-k_n)-\frac{\alpha c^2}{4}\times\frac{1}{2n}k_n(1-k_n) \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{o}')$$

5.　鐵筋コンクリート拱肋

鐵筋コンクリート拱肋に於ては $A=B\alpha l\times\mu_1$, $I=B\alpha^3 l^3\times\mu_2$ であるから鈑拱肋の場合の腹鈑厚 t_w の代りに鐵筋コンクリート拱肋の幅 B が用ひられて居る點が異なる所である。故に此の場合の H 式の形は全く鈑拱肋に對するものと同一であり，只溫度應力に於て $Et_w\varepsilon t^\circ l$ の代りに $EB\varepsilon t^\circ l$ と書き改むればよいのである。尤も μ_1, μ_2, θ_1

及 θ_2 の値は次の如くに取るのを適當と認める。

$$\mu_1=1.12\sim1.13,\quad \mu_2=0.103\sim0.104,\quad \theta_1=\beta\frac{E}{G}=3.1\sim3.2,\quad \theta_2=\beta\frac{E}{G}-1=2.1\sim2.2$$

6. H の影響線

5に於て求めた各種肋拱の水平反力 H の値は 1 なる荷重が拱の任意點 n に作用せる時の値を示すものであるから，夫が其の儘 H の影響線の縦距を表はす。拱肋の任意横斷面に生ずる應力 M, N 及 T を求むる爲には先づ H の値を求むる事が必要であるが，其の計算が相當面倒であるから若し出來るならば恰も連續桁に對し曲げモーメントや剪斷力の影響線を豫じめ作つて置くのと同樣に H の影響線を豫め用意して置きたいと云ふ事は何人も希望する所であると思ふ。此の目的に對しては徑間 l, 拱矢 f, 拱肋高 D, 横距 x, 縦距 y 等の實際の値を用ひる事は不可であつて，全部 l を單位とした夫等の値即ち $f/l=m$, $D/l=\alpha$, $x/l=k$, $y/l=\gamma$ を用ひる事とし是に依りて m 及 α を同じくする拱に對しては H の値が共通する事となり從つて豫め作られた H の影響線が廣く利用せらるゝ事になる。

7. 任意横斷面の應力影響線

拱肋の任意横斷面の應力 M, N, 及 T の値は 5 の (g_1), (g_2) 及 (g_3) の各式に依りて求められ，是等はすべて k, γ で表はされて居るから種々なる拱に對し豫め用意する事が出來る。

8. H に對する軸圧力及剪斷力の影響

5に示した通り H の式の分母に於ては N 及 T の影響は共に(+)であるから是等を省略すれば分母は小となり H は大となるべきである。又分子にありては N は(−), T は(+)であるから N は H を小ならしむる樣に，T は H を大ならしむる樣に影響する。是等兩者を合したものは

$$\left(\beta\frac{E}{G}-1\right)\int_0^{k_n}\frac{\sin\varphi\, dk}{A}$$

であり $\beta\frac{E}{G}$ の値は鈑拱肋では大体 6.5~7.5 の程度であるから全体としては(+)の影響となる。從つて H 全体から見れば N と T を考慮する事に依り分母も分子も共に增加する。夫故に N と T を省略せる場合に比し H に如何なる程度の增減を來たすかに就ては拱の形狀其の他の諸條件に依りて支配せられるから實地に數値をあてはめて見なければ不明瞭である。然しいづれにしても N と T の影響を省いては H は不正確となる。

9. 結　　言

此の報告の概要に掲げた目的を達成するには種々なる m 及 α の値を持つ肋拱に對し水平反力 H, 任意横斷面に生ずる M, N 及 T の影響線を豫め作成する必要がある。夫には 3 に示した拱肋横斷面積及其の2次率，4 に述べた剪斷力に對する係數の定め方が基礎となつて居り，是等は理論よりも寧ろ實地に重きを置くべきであるから此の研究だけで正當であり充分であるとは考へられない。

今 $f/l=m$ の値を 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30 等とし拱頂に於ける肋の高さ $D_c=\alpha_c l$ の α_c の値を 0.024, 0.025, 0.026, 0.027, 0.028 等として拱肋高が均一なる肋拱に對する各種の影響線を定めたとしたならば是等の中間の m

及 α_c の値を持つ拱肋に對しては補挿法に依りて相當正確に各種影響線の値を求める事が出來る。又拱肋の高さが僅かに変化する場合に就ては拱頂に於ける肋高 $D_c=\alpha_c l$ 及拱端の肋高 $D_s=\alpha_s l$ を與へて此の研究に示した如く拱の內面曲線及外面曲線が拱軸曲線と同一種類の曲線であると假定する事に依り拱の任意點に於ける肋高 $D=\alpha l$ を計算に依りて求める事が出來，夫から基本式 (j) を用ひて H の値を定める事が出來る。此の場合に α_s は大体 $0.5\alpha_c \sim 0.8\alpha_s$ の程度が普通であると考へられるから α_c に對する α_s の比を此の範圍に取り種々なる m の値に就きて H の影響線を求めたとしたならば是又相當廣く實用に供し得るものと思ふ。

著者は前述の方法に從つて既に數多の拱の各種の影響線の實際の値を計算して居るから來るべき機會に夫を發表する用意を有する。

一土圧公式と其の図式解法

（昭和 13 年 7 月 16 日　土木学會第 2 回年次学術講演會に於て）

會員　工学博士　安藏善之輔*

要旨　次に掲げる土圧公式とは Rankine や Boussinesq の公式に手を加へ，以て夫等の持つ理論的缺點を少くさせると共に公式の適用範圍を擴めたやうなもので，又其の図式解法は公式の計算の勞を省く爲に考へられたものである。

1. 緒　言

土圧公式としては所謂 Coulomb 及 Rankine の兩公式が代表的なものである事は今更言を俟たない。夫々図式解法も立派に出來て居る。是等兩式は長所と共に短所を持つて居る。兩方の長所を取入れやうと試みたものには Boussinesq を初めとし Reissner, Kármán 等の人々がある。然し其の理論は主に主働土圧のみを對象とし，微分方程式の解をやかましく論議する爲，理論が複雜化する割には結果は餘り在來の公式のものと大差がなかつた。加之 Boussinesq 以外は公式の形に纒める事が出來なかつた爲，簡單を喜ぶ實際方面には現在でも Coulomb や Rankine の公式が専ら用ひられて居る次第である。又受働圧に關する理論は誠に拙く Rankine や Coulomb の兩公式でも其の結果は區々なるのみならず，平面辷面の假定に立脚して居る爲，曲りの著しい辷面が生じ易い受働圧の場合には其の適用範圍は自ら限定される。そこで

(1)　Rankine 理論に壁面の粗度の影響を加味させ，Rankine, Coulomb 兩理論の長所を取り入れる事

(2)　主働圧のみならず受働圧をも合理的に求め得る事

(3)　簡單な公式に纒める事，若し公式の計算が面倒ならば図式解法を用ひ得られる事

以上 3 目的に副ふやうな理論が出來ればよいのだが，之は仲々容易な事ではない。Boussinesq 理論は大体 (1) 及 (3) を滿足して居る（図式解法に就ては後述せん）。

筆者は曩に (1) 及 (2) の目的を先づ達せんと努め一土圧理論を發表した。** 其の理論は $4n$ 個の聯立條件方程式を解く事になり，n が大なれば大なる程精度の高い結果が得られるのである。$n=1$ とすれば全く Boussinesq 公

---

*　九州帝國大学教授

**　拙著 "粉体及粒体の圧力" 九大工学部紀要第 7 冊第 2 號