論　説　報　告

第25卷第4號　昭和14年4月

接觸応力の一問題(引張られた平板中の円形ボルトの問題)(第1報)

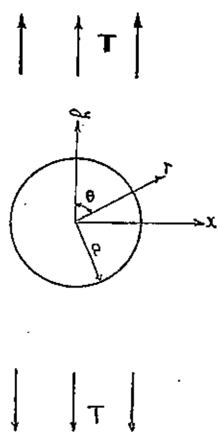
會員　最　上　武　雄*

1.　板に丸い穴があいてゐて，それに丁度はまる樣な塡充物がある時，その板を一樣に引張つた場合の応力分布を求める樣な問題は古くから多くの人々に依つて企てられてゐる。[1] 處がそれ等は引張つた時穴の周邊に於て板と塡充物とが，くつゝいてゐるとか，[2] くつゝいてはゐるが剪断応力は傳へないとか[3] 云ふ場合のみである。

即ち與へられた境界條件に對しての解を求めてゐるのであつて，かゝる場合に周邊がどの樣になるか，從つて實際の応力分布はどの樣になるかと言ふ樣な問題に對しての解答はまだ誰も手を付けてゐない樣である。著者は，本論文に於てこの種の問題を解くべき1つの近似的な方法を述べやうと思ふ。著者の場合に於ても1種の境界條件は與へるのではあるが，在來の解法に於ける境界條件よりは遙かに自由なものであり，從つて今まで取られた方法を其のまゝ踏襲したのでは問題を完全に解く事は出來ないのである。本文に取扱つた樣な方法は，矢張り1種の境界條件を與へなければならないと言ふ意味で近似的なものであるが，之を改良する事を目下考へてゐるのであるが，一先づ近似的な方法だけを發表する事にしたのである。

2.　図-1 の樣に無限に大きな板に半径 a の穴があいてゐて，穴の中心から充分遠い處で T なる一樣な引張り応力を加へるとし，塡充物及板のヤング率並にポアソン比を夫々 $E_1, E_2, \sigma_1, \sigma_2$ とする。

図-1.



応力函數 χ は

$$\Delta^4\chi=0, \qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdots\cdots (1)$$

を滿足し，之から

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\\ \widehat{\theta\theta}&=\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\\ \widehat{r\theta}&=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2)$$

---

* 東京帝國大学助教授

(1) 末廣恭二　機械学會誌　第17卷　第34號　p. 62
　　横田成年　東京數学物理学會記事　8, 1915.　p. 38
　　妹澤克惟，西村源六郎，航空研究所報告　第68號
　　谷本勉之助　土木学會第2回年次学術講演會講演（昭和13年7月）

(2) 妹澤，西村，前出，谷本，前出

(3) 末廣，前出，横田，前出

で応力を計算した場合に $\widehat{rr}$ 及 $\widehat{\theta\theta}$ は θ に就て偶函數で，$\widehat{r\theta}$ は θ に就て奇函數で，又之らが y 軸に對して對稱であり，其の上，応力及変位が θ の一價函數になる様な χ を，χ の一般式(4) から拾ひ出すと次の様になる。即ち

$$\chi=a_0\log r+b_0r^2+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nr^n+b_nr^{n+2}+a_n'r^{-n}+b_n'r^{-n+2}\}\cos n\theta \quad\cdots\cdots(3)$$

玆に a_0, b_0, a_n, b_n, a_n' b_n' は任意の常數である。

(3) 式の χ から (2) 式に依り応力成分を，且つ，それを Hooke の法則に代入して歪度成分を求め，それを積分する事に依つて，変位を求めれば次の如くなる。

$$\widehat{rr}=\frac{a_0}{r^2}+2b_0-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_n(n+1)(n-2)r^n$$
$$+a'_nn(n+1)r^{-n-2}+b'_n(n-1)(n+2)r^{-n}\}\cos n\theta\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\widehat{\theta\theta}=-\frac{a_0}{r^2}+2b_0+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_n(n+1)(n+2)r^n$$
$$+a'_nn(n+1)r^{-n-2}+b'_n(n-1)(n-2)r^{-n}\}\cos n\theta\quad\cdots\cdots(5)$$

$$\widehat{r\theta}=\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_nn(n+1)r^n-a'_nn(n+1)r^{-n-2}-b'_nn(n-1)r^{-n}\}\sin n\theta\quad\cdots\cdots(6)$$

$$u_r=\frac{1}{E}\Big[-\frac{1+\sigma}{r}a_0+2(1-\sigma)b_0r-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{a_nn(1+\sigma)r^{n-1}$$
$$+b_n\{n-2+(n+2)\sigma\}r^{n+1}-a'_nn(1+\sigma)r^{-n-1}-b'_n\{n+2+(n-2)\sigma\}r^{-n+1}\Big\}\cos n\theta\Big]\quad\cdots\cdots(7)$$

$$u_\theta=\frac{1}{E}\Big[\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{a_nn(1+\sigma)r^{n-1}+b_n\{(n+4)+n\sigma\}r^{n+1}$$
$$+a'_nn(1+\sigma)r^{-n-1}+b'_n\{n-4+n\sigma\}r^{-n+1}\Big\}\sin n\theta\Big]\quad\cdots\cdots(8)$$

玆に u_r, u_θ は夫々 r 及 θ 方面の変位であり E, σ は E_1, E_2, σ_1, σ_2 等を代表して書いたのである。(4), (5), (6), (7), (8) より塡充物及板に關する項を拾へば，

$r\leqq a$ に關する項は

$$\widehat{rr}=2b_0-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_n(n+1)(n-2)r^n\}\cos n\theta\quad\cdots\cdots(9)$$

$$\widehat{\theta\theta}=2b_0+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_n(n+1)(n+2)r^n\}\cos n\theta\quad\cdots\cdots(10)$$

$$\widehat{r\theta}=\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_nn(n+1)r^n\}\sin n\theta\quad\cdots\cdots(11)$$

$$u_r=\frac{1}{E_1}\Big[2(1-\sigma_1)b_0r-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{a_nn(1+\sigma_1)r^{n-1}+b_n\{n-2+(n+2)\sigma_1\}r^{n+1}\Big\}\cos n\theta\Big]\quad\cdots\cdots(12)$$

$$u_\theta=\frac{1}{E_1}\Big[\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_nn(1+\sigma_1)r^{n-1}+b_n(n+4+n\sigma_1)r^{n+1}\}\sin n\theta\Big]\quad\cdots\cdots(13)$$

$r\geqq a$ に關する項は

$$\widehat{rr}=\frac{A_0}{r^2}+2B_0-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{A'_nn(n+1)r^{-n-2}+B'_n(n-1)(n+2)r^{-n}\}\cos n\theta-2A_2\cos 2\theta\quad\cdots\cdots(14)$$

(4) Michell Proc. London Math. Soc. XXXI. p. 111.

$$\widehat{\theta\theta}=-\frac{A_0}{r^2}+2B_0+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{A'_n n(n+1)r^{-n-2}+B'_n(n-1)(n-2)r^{-n}\}\cos n\theta+2A_2\cos 2\theta \cdots\cdots(15)$$

$$\widehat{r\theta}=-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{A'_n n(n+1)r^{-n-2}+B'_n n(n-1)r^{-n}\}\sin n\theta+2A_2\sin 2\theta \cdots\cdots(16)$$

$$u_r=\frac{1}{E_2}\Big[-\frac{1+\sigma_2}{r}A_0+2(1-\sigma_2)B_0 r+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{A'_n n(1+\sigma_2)r^{-n-1}$$
$$+B'_n\{(n+2)+(n-2)\sigma_2\}r^{-n+1}\Big\}\cos n\theta-2A_2(1+\sigma_2)r\cos 2\theta\Big] \cdots\cdots(17)$$

$$u_\theta=\frac{1}{E_2}\Big[\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{A'_n n(1+\sigma_2)r^{-n-1}+B'_n\{(n-4)+n\sigma_2\}r^{-n+1}\Big\}\sin n\theta+2A_2(1+\sigma_2)r\sin 2\theta\Big]\cdots(18)$$

尚後の爲に歪度成分を書いて置くと，plane stress と考へて，$r\leq a$ に對しては,

$$e_r=\frac{1}{E_1}\Big[2b_0(1-\sigma_1)-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{a_n n(n-1)(1+\sigma_1)r^{n-2}+b_n(n+1)\{(n-2)+(n+2)\sigma_1\}r^n\Big\}\cos n\theta\Big] \quad (19)$$

$$e_\theta=\frac{1}{E_1}\Big[2b_0(1-\sigma_1)+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{a_n n(n-1)(1+\sigma_1)r^{n-2}$$
$$+b_n(n+1)\{(n+2)+(n-2)\sigma_1\}r^n\Big\}\cos n\theta\Big] \cdots\cdots(20)$$

$$e_z=\frac{-\sigma_1}{E_1}\Big[4b_0+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}4b_n(n+1)r^n\cos n\theta\Big]\cdots\cdots(21)$$

$$e_{r\theta}=\frac{2(1+\sigma_1)}{E_1}\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{a_n n(n-1)r^{n-2}+b_n n(n+1)r^n\}\sin n\theta \cdots\cdots(22)$$

$r\geq a$ に對しては

$$e_r=\frac{1}{E_2}\Big[\frac{A_0(1+\sigma_2)}{r^2}+2B_0(1-\sigma_2)-2A_2(1+\sigma_2)\cos 2\theta$$
$$-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{A'_n n(n+1)(1+\sigma_2)r^{-n-2}+B'_n(n-1)\{(n+2)+(n-2)\sigma_2\}r^{-n}\Big\}\cos n\theta\Big]\cdots(23)$$

$$e_\theta=\frac{1}{E_2}\Big[-\frac{A_0(1+\sigma_2)}{r^2}+2B_0(1-\sigma_2)+2A_2(1+\sigma_2)\cos 2\theta$$
$$+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\Big\{A'_n n(n+1)(1+\sigma_2)r^{-n-2}+B'_n(n-1)\{(n-2)+(n+2)\sigma_2\}r^{-n}\Big\}\cos n\theta\Big]\cdots(24)$$

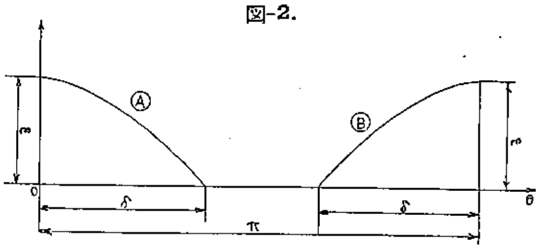
$$e_z=\frac{-\sigma_2}{E_2}\Big[4B_0-4\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}(n-1)B'_n r^{-n}\cos n\theta\Big] \cdots\cdots(25)$$

$$e_{r\theta}=\frac{2(1+\sigma_2)}{E_2}\Big[2A_2\sin 2\theta-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\{A'_n n(n+1)^{-n-2}+B'_n n(n-1)r^{-n}\}\sin n\theta\Big] \cdots\cdots(26)$$

3. 図-2 に示す如き曲線

$$\left.\begin{aligned}&(A)\ \text{の曲線}\quad y=\frac{-\varepsilon}{\delta^2}\theta^2+\varepsilon\\&(B)\ \text{の曲線}\quad y=-\frac{\varepsilon}{\delta^2}(\pi-\theta)^2+\varepsilon\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(27)$$

図-2.



を現はす Fourier 級數を求める。而も cosine 級數に展開したものを求めると

$n \neq 0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\delta\left(-\frac{\varepsilon}{\delta^2}\theta^2+\varepsilon\right)\cos n\theta\,d\theta+\int_{\pi-\delta}^{\pi}\left\{-\frac{\varepsilon}{\delta^2}(\pi-\theta)^2+\varepsilon\right\}\cos n\theta\,d\theta\right]$$

$$\left.\begin{aligned}&=0 \qquad (n:\ \text{奇数})\\ &=\frac{-8\varepsilon}{\pi\delta^2}\left(\frac{\delta\cos n\delta}{n^2}-\frac{2\sin n\delta}{n^3}\right);\quad (n:\ \text{偶数})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28)$$

$n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\delta\left(-\frac{\varepsilon}{\delta^2}\theta^2+\varepsilon\right)d\theta+\int_{\pi-\delta}^{\pi}\left\{-\frac{\varepsilon}{\delta^2}(\pi-\theta)^2+\varepsilon\right\}d\theta\right]$$

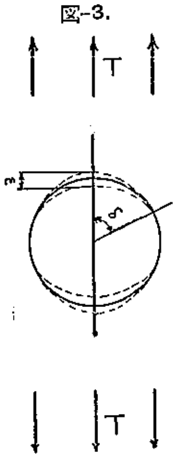
$$=\frac{8\varepsilon\delta}{3\pi}\cdots\cdots(29)$$

であるから 図-2 で現はされる様な函數は

$$y=\frac{4\varepsilon\delta}{3\pi}-\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{8\varepsilon}{\delta^2}\left(\frac{\delta\cos n\delta}{n^2}-\frac{2\sin n\delta}{n^3}\right)\cos n\theta\cdots\cdots(30)$$

の如くに展開される。さて，変形は大体 図-3 の如くに想像されるから $r=a$ に於ける θ 方向の変位は r 方向の変位に對して甚だ小さい筈であるから，r 方向の変位を (27) 又は (30) 式で現はされる如くであるとし（勿論 ε と δ はまだ決まつてゐない或る數である）θ 方向の変位は 0 であるとしても近似的に差支はあるまいと考へる。尚応力 $\widehat{rr}$ と $\widehat{r\theta}$ の方は塡充物がくつゝいてゐても離れてゐても，$r=a$ に於て連續的に変る筈であるし，又無限遠方に於て，一様な引張り T であるから，$r\to\infty$ とした場合には，

図-3.



$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\cos 2\theta\\ \widehat{\theta\theta}&=\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\cos 2\theta\\ \widehat{r\theta}&=-\frac{T}{2}\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

でなければならない。そこで (9)～(18) 及 (30)，(31) に依つて，

$$2B_0=\frac{T}{2}\quad,\quad -2A_2=\frac{T}{2}\cdots\cdots(32)$$

$$2b_0=\frac{A_0}{a^2}+\frac{T}{2}\quad,\quad -\frac{1+\sigma_2}{aE_2}A_0+\frac{T(1-\sigma_2)}{2E_2}a-\frac{2(1-\sigma_1)}{E_1}b_0a=\frac{4\varepsilon\delta}{3\pi}\cdots\cdots(33)$$

$$\left.\begin{aligned}&2a_2=6A'_2a^{-4}+4B'_2a^{-2}-\frac{T}{2}\quad,\quad 2a_2+6b_2a^2=-6A'_2a^{-4}-2B'_2a^{-2}-\frac{T}{2}\\ &\frac{2(1+\sigma_1)}{E_1}a_2a+\frac{2(3+\sigma_1)}{E_1}b_2a^3=\frac{2(1+\sigma_2)}{E_2}A'_2a^{-3}-\frac{2(1-\sigma_2)}{E_2}B'_2a^{-1}-\frac{T(1+\sigma_2)}{2E_2}a\\ &\frac{2(1+\sigma_1)}{E_1}a_2a+\frac{4\sigma_1b_2a^3}{E_1}=-\frac{2(1+\sigma_2)}{E_2}A'_2a^{-3}-\frac{4B'_2a^{-1}}{E_2}-\frac{T(1+\sigma_2)}{2E_2}a\\ &-\frac{\varepsilon}{\pi\delta^2}(2\delta\cos 2\delta-2\sin 2\delta)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(34)$$

$n\geq 4$ に對して

$$\begin{aligned}&a_nn(n-1)a^{n-2}+b_n(n+1)(n-2)a^n=A'_n(n+1)a^{-n-2}+B'_n(n-1)(n+2)a^{-n}\\ &a_nn(n-1)a^{n-2}+b_nn(n+1)a^n=-A'_nn(n+1)a^{-n-2}-B'_nn(n-1)a^{-n}\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&a_n\frac{n(1+\sigma_1)}{E_1}a^{n-1}+b_n\frac{n+4+n\sigma_1}{E_1}a^{n+1}=A'_n\frac{n(1+\sigma_2)}{E_2}a^{-n-1}+B'_n\frac{n-4+n\sigma_2}{E_2}a^{-n+1}\\
&a_n\frac{n(1+\sigma_1)}{E_1}a^{n-1}+b_n\frac{n-2+(n+2)\sigma_1}{E_1}a^{n+1}=-A'_n\frac{n(1+\sigma_2)}{E_2}a^{-n+1}\\
&-B'_n\frac{n+2+(n-2)\sigma_2}{E_2}a^{-n+1}-\frac{8\varepsilon}{\pi\delta^2}\left(\frac{\delta\cos n\delta}{n^2}-\frac{2\sin n\delta}{n^3}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35)
$$

(32)〜(35) 式を解く事に依つて B_0, A_2, b_0, A_0, a_2, b_2, A'_2, B'_2, a_n, b_n, A'_n, B'_n ($n\geqq4$) が求められるのであり，それに必要且つ充分なだけの數の方程式があるのである。實際に解くと次の如くになる。

$$
\left.\begin{aligned}
&B_0=\frac{T}{4}\quad,\quad A_2=\frac{-T}{4}\\
&A_0=\frac{\dfrac{T(1-\sigma_2)}{2E_2}a-\dfrac{T(1-\sigma_1)}{2E_1}a-\dfrac{4\varepsilon\delta}{3\pi}}{\dfrac{1+\sigma_2}{aE_2}+\dfrac{1-\sigma_1}{aE_1}}\\
&b_0=\frac{\dfrac{T}{2aE_2}-\dfrac{2\varepsilon\delta}{3a^2\pi}}{\dfrac{1+\sigma_2}{aE_2}+\dfrac{1-\sigma_1}{aE_1}}\\
&B_2'=\frac{\dfrac{T(1+\sigma_1)}{E_1}a^2-\dfrac{T(1+\sigma_2)}{E_2}a^2-\dfrac{a\varepsilon}{\pi\delta^2}(2\delta\cos2\delta-2\sin2\delta)}{\dfrac{2(1+\sigma_1)}{E_1}+\dfrac{6-2\sigma_2}{E_2}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)
$$

A'_2 は

$$
A'_2\left\{\frac{6-2\sigma_1}{E_1}+\frac{2(1+\sigma_2)}{E_2}\right\}a^{-3}+4B'_2\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)a^{-1}
=\frac{T(1+\sigma_1)}{2E_1}a-\frac{T(1+\sigma_2)}{2E_2}a-\frac{\varepsilon}{\pi\delta^2}(2\delta\cos2\delta-2\sin2\delta)\cdots\cdots(37)
$$

より求まり

$$
a_2=3A'_2a^{-4}+2B'_2a^{-2}-\frac{T}{4}\cdots\cdots(38)
$$

$$
b_2=-2A'_2a^{-6}-B'_2a^{-4}\cdots\cdots(39)
$$

より a_2, b_2 が求められ，

最後に

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^{-n-1}A'_n}{n\left(\dfrac{\sigma_1-3}{E_1}-\dfrac{1+\sigma_2}{E_2}\right)+4\left(\dfrac{1}{E_1}+\dfrac{1}{E_2}\right)}\left[2n^2\left\{\frac{(\sigma_2+1)^2}{E_1^2}+\frac{(1+\sigma_2)(\sigma_1-3)}{E_1E_2}\right\}\right.\\
&\quad+2n\left\{\frac{(\sigma_1+1)(\sigma_1-3)}{E_1^2}-\frac{6(1+\sigma_2)}{E_1E_2}-\frac{(\sigma_2+1)(\sigma_2+3)}{E_2^2}\right\}\\
&\quad\left.-\frac{8(1-\sigma_2)}{E_2}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\right]=\frac{8\varepsilon}{\pi\delta^2}\left(\frac{\delta\cos n\delta}{n^2}-\frac{2\sin n\delta}{n^3}\right)\cdots\cdots(40)
\end{aligned}
$$

より A'_n ($n\geqq4$) が求まり

$$
B'_n=\frac{\left\{\dfrac{3-\sigma_1}{E_1}+\dfrac{1+\sigma_2}{E_2}\right\}na^{-2}}{n\left(\dfrac{\sigma_1-3}{E_1}-\dfrac{1+\sigma_2}{E_2}\right)+4\left(\dfrac{1}{E_1}+\dfrac{1}{E_2}\right)}A'_n\cdots\cdots(41)
$$

$$a_n=\frac{n\left(\frac{\sigma_1+1}{E_1}-\frac{\sigma_2-3}{E_2}\right)+4\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}{n\left(\frac{\sigma_1-3}{E_1}-\frac{\sigma_2+1}{E_2}\right)+4\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}a^{-2n}A'_n \quad\cdots\cdots(42)$$

$$b_n=-\frac{n\left(\frac{1+\sigma_1}{E_1}+\frac{3-\sigma_2}{E_2}\right)}{n\left(\frac{\sigma_1-3}{E_1}-\frac{\sigma_2+1}{E_2}\right)+4\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}a^{-2n-2}A'_n \quad\cdots\cdots(43)$$

より B'_n, a_n, b_n が求められる。處が未だ ε と δ とが決つてゐないから之を決定しなければならないのである。

4.

$$I_1=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz} \quad\cdots\cdots(44)$$

$$I_2=e_{yy}e_{zz}+e_{zz}e_{xx}+e_{xx}e_{yy}-\frac{1}{4}(e^2_{yz}+e^2_{zx}+e^2_{xy}) \quad\cdots\cdots(45)$$

とすれば等方物質に於ては，單位体積内に蓄へられる歪エネルギー W は

$$\left.\begin{array}{l} 2W=(\lambda+2\mu)I_1^2-4\mu I_2 \\ \text{玆に}\quad \lambda=\dfrac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\ ,\quad \mu=\dfrac{E}{2(1+\sigma)} \end{array}\right\} \cdots\cdots(46)$$

で與へられる。[5]

處が直交坐標に關しては，I_1, I_2 は不變形である[6]から，我々の坐標 r, θ, z に關して I_1, I_2 を求むれば，(19)〜(26) 式を用ひて

$r\leq a$ に對しては（以後 Σ とあるは $\sum\limits_{n=2,4,\cdots}^{\infty}$ の略とする）

$$I_1=\frac{1-2\sigma_1}{E_1}[4b_0+4\sum b_n(n+1)r^n\cos n\theta] \quad\cdots\cdots(47)$$

$$\begin{aligned} I_2=&\frac{-\sigma_1}{E_1^2}[4b_0+4\sum b_n(n+1)r^n\cos n\theta][2b_0(1-\sigma_1)\\ &\qquad+\sum\{a_nn(n-1)(1+\sigma_1)r^{n-2}+b_n(n+1)\{(n+2)+(n-2)\sigma_1\}r^n\}\cos n\theta]\\ &-\frac{\sigma_1}{E_1^2}[4b_0+4\sum b_n(n+1)r^n\cos n\theta][2b_0(1-\sigma_1)\\ &\qquad-\sum\{a_nn(n-1)(1+\sigma_1)r^{n-2}+b_n(n+1)\{(n-2)+(n+2)\sigma_1\}r^n\}\cos n\theta]\\ &+\frac{1}{E_1^2}[2b_0(1-\sigma_1)+\sum\{a_nn(n-1)(1+\sigma_1)r^{n-2}+b_n(n+1)\{(n+2)+(n-2)\sigma_1\}r^n\}\cos n\theta]\\ &\times[2b_0(1-\sigma_1)-\sum\{a_nn(n-1)(1+\sigma_1)r^{n-2}+b_n(n+1)\{(n-2)+(n+2)\}\sigma_1\}r^n\cos n\theta]\\ &-\frac{(1+\sigma_1)^2}{E_1^2}[\sum\{a_nn(n-1)r^{n-2}+b_nn(n+1)r^n\}\sin n\theta]^2 \quad\cdots\cdots(48)\end{aligned}$$

$r\geq a$ に對しては

$$I_1=\frac{4}{E_2}[B_0(1-2\sigma_2)-\sum B'_n(n-1)(1-2\sigma_2)r^{-n}\cos n\theta] \quad\cdots\cdots(49)$$

$$I_2=\frac{-16\sigma_2(1-\sigma_2)}{E_2^2}[B_0-\sum(n-1)B'_nr^{-n}\cos n\theta]^2$$

(5) Love "Elasticity" p. 102

(6) Love "Elasticity" p. 43

$$+\frac{1}{E_2^2}\Big[\frac{A_0(1+\sigma_2)}{r^2}+2B_0(1-\sigma_2)-2A_2(1+\sigma_2)\cos 2\theta$$

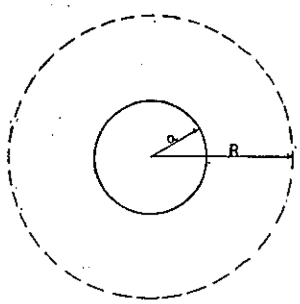
$$-\sum\{A'_n n(n+1)(1+\sigma_2)r^{-n-2}+B'_n(n-1)\{(n+2)+(n-2)\sigma_2\}r^{-n}\}\cos n\theta\Big]$$

$$\times\Big[-\frac{A_0(1+\sigma_2)}{r^2}+2B_0(1-\sigma_2)+2A_2(1+\sigma_2)\cos 2\theta$$

$$+\sum\{A'_n n(n+1)(1+\sigma_2)r^{-n-2}+B'_n(n-1)\{(n-2)+(n+2)\sigma_2\}r^{-n}\}\cos n\theta\Big]$$

$$-\frac{(1+\sigma_2)^2}{E_2^2}[2A_2\sin 2\theta-\sum\{A'_n n(n+1)r^{-n-2}+B'_n n(n-1)r^{-n}\}\sin n\theta]^2 \quad \cdots\cdots(50)$$

図-4.



となる。處で板及塡充物の厚さを 1 であるとして，板及塡充物中に蓄へられる歪エネルギーを計算する。此の場合に $r>a$ の場合の r に關する積分は $r=a$ から $r=R$ までとして行ふのである（図-4）。$r=a$ から $r=\infty$ まで積分すれば，無限大となるからである。

$r\leq a$ に對しては

$$\int_0^a dr\int_0^{2\pi} I_1^2 r\,d\theta=\frac{16(1-2\sigma_1)^2}{E_1^2}\Big[\pi b_0^2a^2+\sum\pi b_n^2\frac{n+1}{2}a^{2n+2}\Big] \cdots\cdots(51)$$

$$\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi} I_2\,d\theta=\frac{\pi a^2b_0^2}{E_1^2}(4-24\sigma_1+20\sigma_1^2)-\sum\frac{a_n^2\pi(1+\sigma_1)^2}{E_1^2}n^2(n-1)a^{2n-2}$$

$$-\sum\frac{b_n^2\pi(n+1)}{E_1^2}a^{2n+2}(-2+n^2+2n^2\sigma_1+12\sigma_1+n^2\sigma_1^2-10\sigma_1^2)$$

$$-\sum\frac{2a_nb_n}{E_1^2}n(n^2-1)(1+\sigma_1)^2\pi a^{2n} \cdots\cdots(52)$$

であるから

$$2W_0{}^1=\int_0^a\int_0^{2\pi}2Wr\,d\theta=\frac{1}{E_1(1+\sigma_1)}[8\pi a^2b_0^2(1-\sigma_1^2)+\sum 2a^2_n\pi(1+\sigma_1)^2n^2(n-1)a^{2n-2}$$

$$+\sum\pi b_n^2(n+1)a^{2n+2}\{4(1-\sigma_1^2)+2n^2(1+\sigma_1)^2\}+\sum 4a_nb_nn(n^2-1)(1+\sigma_1)^2\pi a^{2n}] \cdots\cdots(53)$$

$r\geq a$ に對しては

$$\int_a^R r\,dr\int_0^{2\pi} I_1^2\,d\theta=\frac{16\pi(1-2\sigma_2)^2}{E_2^2}\Big[B_0^2(R^2-a^2)+\sum B'^2_n\frac{n-1}{2}\Big(\frac{1}{a^{2n-2}}-\frac{1}{R^{2n-2}}\Big)\Big] \cdots\cdots(54)$$

$$\int_a^R r\,dr\int_0^{2\pi} I_2\,d\theta=\frac{-16\sigma_2(1-\sigma_2)\pi}{E_2^2}\Big[B_0^2(R^2-a^2)+\sum B'^2_n\frac{n-1}{2}\Big(\frac{1}{a^{2n-2}}-\frac{1}{R^{2n-2}}\Big)\Big]$$

$$+\frac{\pi}{E_2^2}\Big[A_0^2(1+\sigma_2)^2\Big(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\Big)+4B_0^2(1-\sigma_2)^2(R^2-a^2)-2A_2^2(1+\sigma_2)^2(R^2-a^2)$$

$$+12A_2A'_2(1+\sigma_2)\Big(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\Big)-8A_2B'_2(1+\sigma_2)^2\log\frac{R}{a}+\sum\Big\{A'^2_n\frac{n^2(n+1)}{2}(1+\sigma_2)^2$$

$$\times\Big(\frac{1}{R^{2n+2}}-\frac{1}{a^{-n+2}}\Big)+B'^2_n\frac{n-1}{2}\Big\{(n-2)+(n+2)\sigma_2\Big\}\Big\{(n+2)+(n-2)\sigma_2\Big\}$$

$$\times\Big(\frac{1}{R^{2n-2}}-\frac{1}{a^{2n-2}}\Big)+A'_nB'_nn(n^2-1)(1+\sigma_2)^2\Big(\frac{1}{R^{2n}}-\frac{1}{a^{2n}}\Big)\Big\}\Big]$$

$$-\frac{\pi(1+\sigma_2)^2}{E_2^2}\Big[2A_2^2(R^2-a^2)+12A_2A_2'\Big(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\Big)-8A_2B'_2\log\frac{R}{a}$$

$$-\sum\Big\{A'^2_nn^2\frac{n+1}{2}\Big(\frac{1}{R^{2n+2}}-\frac{1}{a^{2n+2}}\Big)+B'^2_nn^2\frac{n-1}{2}\Big(\frac{1}{R^{2n-2}}-\frac{1}{a^{2n-2}}\Big)$$

$$+A'_nB'_n n(n^2-1)\left(\frac{1}{R^{2n}}-\frac{1}{a^{2n}}\right)\Big\}\Big] \cdots\cdots(55)$$

であるから

$$2W_0{}^2=\int_a^R\int_0^{2\pi}2Wrd\theta$$

$$=\frac{-16\pi}{E_2}B_0{}^2(R^2-a^2)-\frac{2\pi(1+\sigma_2)}{E_2}A_0{}^2\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{2\pi(1+\sigma_2)}{E_2}$$

$$\times\sum n^2(n+1)A'_{n}{}^2\left(\frac{1}{R^{2n+2}}-\frac{1}{a^{2n+2}}\right)+\frac{2\pi}{E_2}\sum(n-1)\{(n^2+2)+(n^2-2)\sigma_2\}B'_n{}^2$$

$$\times\left(\frac{1}{a^{2n-2}}-\frac{1}{R^{2n-2}}\right)-\frac{4\pi(1+\sigma_2)}{E_2}\sum n(n^2-1)A'_nB'_n\left(\frac{1}{R^{2n}}-\frac{1}{a^{2n}}\right) \cdots\cdots(56)$$

である。茲で $R\to\infty$ にした場合に ∞ になる項即ち第 1 項は，(36) 式からも分かる通り ε にも δ にも無關係である。

故に $2W_0{}^2$ として ε と δ に關係する項のみ取つて，$R\to\infty$ にすれば

$$2W_0{}^2=\frac{2\pi(1+\sigma_2)}{a^2E_2}A_0{}^2+\frac{2\pi(1+\sigma_2)}{a^2E_2}\sum n^2(n+1)\frac{A'_n{}^2}{a^{2n}}$$

$$+\frac{2\pi a^2}{E_2}\sum(n-1)\{(n^2+2)+(n^2-2)\sigma_2\}\frac{B'_n{}^2}{a^{2n}}+\frac{4\pi(1+\sigma_2)}{E_2}\sum n(n^2-1)\frac{A'_nB'_n}{a^{2n}} \cdots\cdots(57)$$

となるから，全体の歪エネルギーの中 ε と δ に關係のある部分 W_0 は

$$W_0=W_0{}^1+W_0{}^2$$

$$=\frac{4\pi(1-\sigma_1)a^2}{E_1}b_0{}^2+\frac{\pi(1+\sigma_1)}{E_1}\sum n^2(n-1)a^{2n-2}a^2{}_n+\frac{\pi a^2}{E_1}\sum(n+1)\{(n^2+2)+(n^2-2)\sigma_1\}a^{2n}b^2{}_n$$

$$+\frac{2\pi(1+\sigma_1)}{E_1}\sum a_nb_nn(n^2-1)a^{2n}+\frac{\pi(1+\sigma_2)}{a^2E_2}A_0{}^2+\frac{\pi(1+\sigma_2)}{aE_2}\sum n^2(n+1)\frac{A'_n{}^2}{a^{2n}}$$

$$+\frac{\pi a^2}{E_2}\sum(n-1)\{(n^2+2)+(n^2-2)\sigma_2\}\frac{B'_n{}^2}{a^{2n}}+\frac{2\pi(1+\sigma_2)}{E_2}\sum n(n^2-1)\frac{A'_nB'_n}{a^{2n}} \cdots\cdots(58)$$

となり比較的簡単な形になる。此の式の中の級數が收斂する事は，a_n, b_n, A'_n, B'_n は (40)〜(43) 式に依つて分かる如く n^{-3} の order である事から直ちに分かる。さて我々は，ε 及 δ を W_0 が最小になる如く選ばうとするのである。即ち

$$\frac{\partial W_0}{\partial\varepsilon}=0\ ,\quad \frac{\partial W_0}{\partial\delta}=0 \cdots\cdots(59)$$

なる方程式を解いて ε と δ を求めやうとするのである。之を實際に行ふのは中々面倒であるが，之の具体的の例は次の機會に讓り今回は，此の關係式から簡單に導ける 1 つの面白い結論を述べて置こう。(36)〜(43) 式から分かる樣に W_0 の中に出て來る係數は次の樣に置く事が出來る。

$$A_0=\alpha_0+\beta_0\varepsilon\delta\ ,\quad b_0=\alpha'_0+\beta'_0\varepsilon\delta$$

$$A'_2=\alpha_2+\beta_2\varepsilon f(\delta)\ ,\quad B'_2=\alpha'_2+\beta_2\varepsilon f(\delta)\ ,\quad a_2=\alpha''_2+\beta''_2\varepsilon f(\delta)\ ,\quad b_2=\alpha'''_2+\beta'''_2\varepsilon f(\delta)$$

$$A'_n=\alpha'_n\varepsilon g_n(\delta)\ ,\quad B'_n=\beta'_n\varepsilon g_n(\delta)\ ,\quad a_n=\alpha_n\varepsilon g_n(\delta)\ ,\quad b_n=\beta_n\varepsilon g_n(\delta)\quad(n\geqq4)$$

すると

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\delta W}{\delta\varepsilon}\right)=\frac{8\pi(1-\sigma_1)}{E_1}a^2\alpha_0'\beta_0'\delta+\frac{8\pi(1+\sigma_1)}{E_1}a^2\alpha_2''\beta_2''f(\delta)+\frac{12\pi(3+\sigma_1)}{E_1}a^6\alpha_2'''\beta_2'''f(\delta)$$

$$+\frac{12\pi(1+\sigma_1)}{E_1}a^4\alpha''_2\beta_2'''f(\delta)+\frac{12\pi(1+\sigma_1)}{E_1}a^4\alpha_2'''\beta_2''f(\delta)$$

$$+\frac{2\pi(1+\sigma_2)}{a^2E_2}\alpha_0\beta_0\delta+\frac{24\pi(1+\sigma_2)}{a^6E_2}\alpha_2\beta_2f(\delta)+\frac{4\pi(3+\sigma_2)}{a^2E_2}\alpha'_2\beta'_2f(\delta)$$

$$+\frac{12\pi(1+\sigma_2)}{a^4E_2}\alpha_2\beta_2'f(\delta)+\frac{12\pi(1+\sigma_2)}{a^4E_2}\alpha'_2\beta_2f(\delta)\cdots\cdots(60)$$

今特に $E_1=E_2=E$ ， $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ なる場合には

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0=0\ ,\ \beta_0=-\dfrac{2aE}{3\pi}\ ,\ \alpha_0'=\dfrac{T}{4},\ \beta_0'=-\dfrac{E}{3a\pi}\ ,\ \alpha_2'=0\\ \beta'_2f(\delta)=-\dfrac{aE}{4\pi\delta^2}(\delta\cos2\delta-\sin2\delta)\ ,\ \alpha_2=\beta_2=0\ ,\ \alpha_2'''=0\\ \beta_2'''f(\delta)=\dfrac{E}{4\pi a^3\delta^2}(\delta\cos2\delta-\sin2\delta)\ ,\ \alpha_2''=-\dfrac{T}{2}\\ \beta_2''f(\delta)=-\dfrac{E}{\pi a\delta^2}(\delta\cos2\delta-\sin2\delta)\end{array}\right\}\cdots\cdots(61)$$

故に此の場合には

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\partial W_0}{\partial\varepsilon}\right)=-\frac{2(1-\sigma)T}{3}a\delta-\frac{5(1+\sigma)aT\pi}{2\delta^2}(\delta\cos2\delta-\sin2\delta)\cdots\cdots(62)$$

又

$$\frac{\delta W_0}{\partial\delta}=\varepsilon\Big[-\frac{2T(1-\sigma)a}{3}+L\varepsilon\delta+\sum M_n\frac{\varepsilon}{\delta^2}\left(\frac{\delta\cos n\delta}{n^2}-\frac{2\sin\delta}{n^2}\right)$$

$$\times\left(\frac{\sin n\delta}{n\delta}-\frac{3\cos n\delta}{n^2\delta^2}+\frac{4\sin n\delta}{n^3\delta^3}\right)\Big]\cdots\cdots(63)$$

の形であり，$M_n>0$ である。δ を有限のある値とし，$\varepsilon=0$ とすると $(\partial W_0/\partial\delta)=0$ となるが，$(\partial W_0/\partial\varepsilon)\neq0$ である。若し，引張つた場合に，周邊が固着してゐるものとすれば，$\varepsilon\to0$ の場合に δ の如何に關らず $(\partial W_0/\partial\delta)=0$ 及 $(\partial W_0/\partial\varepsilon)=0$ である筈である。即ち此の場合には，周邊は固着してゐない。

$T=0$ なら勿論 δ の如何に關らず $\varepsilon=0$ が W_0, $(\partial W_0/\partial\delta)$ 及 $(\partial W_0/\partial\varepsilon)$ を共に 0 ならしめる。つまり，全く塡充物と板と同じ材料であつても，板を引張れば塡充物は板から離れて來る。