論　說　報　告

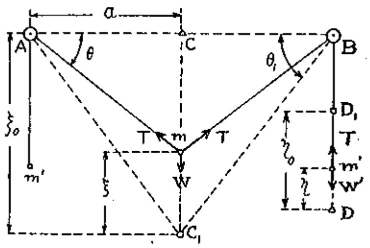
第24巻第10號　昭和13年10月

2 滑車間に吊られた錘の運動

會員　江　藤　禮*

要　旨　図-1 の如く 2 つの滑車 AB 間に水平にかけられた絲の兩端に錘（その質量を m' とす）を吊るし，中點 C に更に錘 $m=m'$ を結び之を落下させる。この場合に絲の重さ，空氣の抵抗，摩擦等を考慮に入れないで錘の運動，即ち絲の張力や週期等を吟味して見た。

図-1. 記號の說明



1. 運動式の誘導

m の速度：　$v=a\dfrac{d\theta}{dt}\sec^2\theta$

m' の速度：　$u=v\sin\theta$

故に

$$\frac{dv}{dt}=a\sec^2\theta\left\{\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tan\theta\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sec\theta(1+2\tan^2\theta)\cdots\cdots(2)$$

一方に於て

$$m\frac{dv}{dt}=W-2T\sin\theta\qquad 又は\quad \frac{dv}{dt}=g-2\tau\sin\theta\cdots\cdots(3)$$

$$m'\frac{du}{dt}=T-W'\qquad 又は\quad \frac{du}{dt}=\tau-g\cdots\cdots(4)$$

τ を消去すると次の式が出來る。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+Q\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+R=0\cdots\cdots(5)$$

但し　$Q=2\tan\theta(2+3\tan^2\theta)/(1+3\tan^2\theta)$

$R=-\lambda(1-2\sin\theta)/(1+3\tan^2\theta)$

$\lambda=g/a$

(5) 式を解くために變數置換を行ふ。即ち $d\theta/dt=p$, $d^2\theta/dt^2=p\cdot dp/d\theta$, その結果

$$p^2\left(\frac{1}{3}+\tan^2\theta\right)\sec^2\theta=\frac{-2\lambda}{3}(2-\sin\theta)\sec\theta+c\cdots\cdots(6)$$

(6) 式にある積分常數 c を定めるには $\theta=0$ に於て $p=0$ なる條件を用ひる。之から $c=4\lambda/3$ を得。從つて (6) 式は次の如くなる。

$$p^2=2\lambda(2-2\sec\theta+\tan\theta)\cos^2\theta/(1+3\tan^2\theta)\cdots\cdots(7)$$

(7) 式に於て p を零にする θ を求めると $\theta=0$ の他に次の値が存在する。$\tan\theta_1/2=1/2$ 即ち $\theta_1\doteqdot 53°8'$ なほ $\theta<\theta_1$ の範圍では $p^2>0$ となる。

---

* 神戸高等工業学校教授　工学士

2. 絲の張力 T

(1) 式から

$$\frac{dv}{dt}=g\sec^2\theta(\alpha+\beta)$$

但し $\alpha=\frac{F_1'}{F_2}-\frac{F_1F_2'}{F_2^2}$ $\beta=4\tan\theta\frac{F_1}{F_2}$

$$F_1=\cos^2\theta(2-2\sec\theta+\tan\theta)$$

$$F_2=1+3\tan^2\theta$$

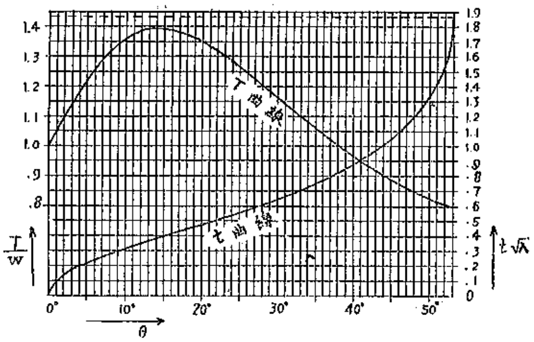
なほ F' は F の微分係數を意味す

(3) 式から

$$T=W\{1-\sec^2\theta(\alpha+\beta)\}/2\sin\theta\cdots\cdots(8)$$

図-2 に於て T 曲線は (8) 式の關係を示す。$\theta\fallingdotseq14°20'$ に於て T は最大値 $1.39\,W$ となる。

図-2. T 曲線及 t 曲線



3. 時 間 t

(7) 式から

$$t=\int_0^t dt=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\theta\sec\theta\sqrt{\frac{1+3\tan^2\theta}{4-4\sec\theta+2\tan\theta}}d\theta$$

次の變數置換を行ふ。$\tan\frac{\theta}{2}=z,\ 0\leqq z\leqq0.5$ 從つて

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^z\frac{\sqrt{1+10z^2+z^4}}{(1-z^2)\sqrt{(z-2z^2)(1-z^2)}}dz\equiv\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}I\cdots\cdots(9)$$

(9) 式に現れる積分値 I を楕円積分で求めんとしたが成功しなかつた。よつて Simpson 公式で數値計算を行つた。但し $z=0$ と $z=0.5$ の近くでは不可能となる。從つて $z=0$ の近くでは

$$I=\sqrt{z}\left(2+\frac{2}{3}z+\frac{13}{5}z^2+\text{etc.}\right)$$

次に $z=0.5$ の近くでは變數置換 $z=0.5-\xi$ を用ひ

$$I=2.906\sqrt{\xi}(2-1.650\xi+2.00\xi^2+\text{etc.})$$

表-1 には z に對する I の値を示し，**図-2** に於て t 曲線は θ と t との關係を表はす。

なほ 週期 $t_0=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}[\mathrm{I}]_0^{0.5}=\frac{3.71}{\sqrt{\lambda}}$

表-1.

z の値	0	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.47	.48	.49	.50
I 區 間	.200	.256	.208	.181	.178	.189	.213	.253	.321	.458	.267	.174	.232	.577	
I 累 加	.200	.456	.664	.845	1.023	1.213	1.426	1.679	2.000	2.459	2.726	2.900	3.132	3.708	

4. エネルギの吟味

図-1 に於て錘 m は C 點と C_1 點の間を，錘 m' は D 點と D_1 點の間を往復する。今，位置エネルギを P とし運動エネルギを K で表はせば任意時刻に於て

$$P=mg\xi+2m'g\eta=mg(\xi+2\eta)=mgaP'$$

但し $P'=\tan\theta_1-2-\tan\theta+2\sec\theta$

$$K=\frac{1}{2}(mv^2+2m'u^2)=\frac{m}{2}(v^2+2u^2)=mgaK'$$

但し　$K'=(1+2\sin^2\theta)\sec^4\theta F_1/F_2$

然るに計算の結果

$$P'+K'=\tan\theta_1$$

故に　$P+K=mga\tan\theta_1=Wa\tan\theta_1=\text{const.}$

この算式によらずとも保存系に於ける全エネルギが一定なるは明かである。

出發時（C 及 D 點）に於ては

$$K=0 \qquad P=mg\xi_0$$

半週期後（C_1 及 D_1 點）に於ては

$$K=0 \qquad P=2m'g\eta_0$$

從つて $\xi_0=2\eta_0$ である。なほ $\theta=30^\circ$ に於て P が最小となる，即ち之が釣合の位置を與へる。