

論 説 報 告

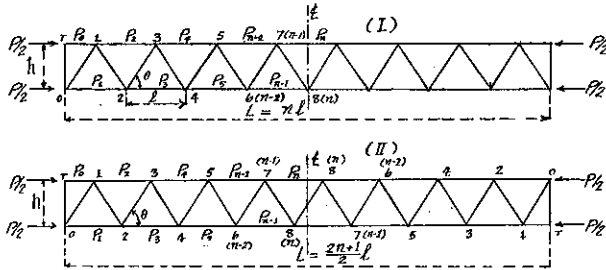
第 24 卷 第 4 號 昭和 13 年 4 月

ワ レ ン 型 骨 組 抗 圧 柱 の 弾 性 破 損 に 就 て

會 員 安 宅 勝*

要 旨 本 篇 に 於 て は 滑 節 を 有 す る 骨 組 抗 圧 柱 の 内、取 取 ず 次 図 の 如 き 形 式 の 2 組 を 取 り そ の 弾 性 破 損 を 論 じ た る も の に て 弦 材 応 力 を $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ と し 弦 材 断 面 積 を A_f , 斜 材 断 面 積 を A_a と し、 $K = A_a/A_f$ と し $\sigma_k = P_k/2A_f$ 即 ち 弾 性 破 損 を 呈 す る 際 の P_0 の 応 力 度 (stress intensity) と せ ば 弾 性 破 損 は 次 式 に て 示 さ る こ と を 論 じ た る も の だ る (式 中 n は 格 間 数 を 示 す)。

図-1.



即 ち (I) の 骨 組 に 於 て は

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^2 \theta}$$

(II) の 骨 組 に 於 て は

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{2\pi}{2n+1}\right)}{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1}\right) K \cos^2 \theta}$$

猶 (II) の 骨 組 の 方 が 捩 屈 の 抵 抗 力 大 な る こ と を 示 し、又 骨 組 の 幅 h と 長 さ L の 比 を 一 定 に 保 ち 格 間 数 $n = \infty$ 及 $K = \infty$ と せ る 極 限 に 於 て は Euler の 弾 性 破 損 の 式 と 一 致 す る こ と を も 示 し た (事 實 は $K = 1$ に て 殆 ど 一 致 す る)。

第 1 章 概 説

(1) 緒 言

本 問 題 の 研 究 に 對 す る、經 緯 に 關 し て は 自 分 は 餘 り 多 く を 知 ら ぬ。著 者 の 知 識 の 範 圍 に 於 て は 従 來 餘 り 信 頼 す る に 足 る 解 法 が 無 か つ た 様 だ る。田 中 先 生 の 御 教 示 に よ つ て 最 近 Mises 及 Ratzersdorfer** の 業 績 が あ る こ と を 知 つ た。茲 に お 断 り し て 置 か ね ば な ら ぬ こ と は、自 分 と し て 全 然 獨 自 の 立 場 を 以 て 本 問 題 の 計 算 を 進 め て 居 た の だ であ つ た が 求 め 得 た る 基 本 式 は 形 の 上 に 於 て Ratzersdorfer の も の と 同 じ に な つ た。

著 者 は 最 初、行 列 式 に よ つ て 本 問 題 を 解 決 せ ん と し た が 一 般 な る 場 合 の 解 法 に 於 て 困 難 に 遭 遇 し 辛 じ て そ の 第 1 項 の み を 一 般 な る 形 に 現 し 得 て、近 似 値 と し て 満 足 す る 積 り で 居 た。所 が 結 果 は 相 當 に 誤 差 多 く、そ の 精 度 に 關 し て 疑 義 あ り 困 却 し て 居 た の だ る。幸 に し て Ratzersdorfer の 著 書 を 知 り 得 て Differenzen の 計 算 に よ つ て 本 問 題 が 簡 單 に 解 き 得 る こ と を 知 つ た の は 望 外 の 幸 福 だ であ つ た。本 書 あ る こ と を 示 し て 戴 いた 田 中 先 生 に は 厚 く 御 禮 申 上 ぐ る 次 第 だ る。

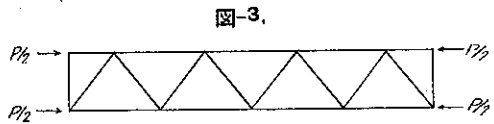
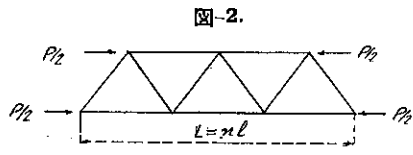
Ratzersdorfer は 其 の 著 書 に 於 て 図-2 に 示 す が 如 き 滑 節 骨 組 に 就 き 捩 屈 荷 重 を 求 め 一 般 に n 格 間 を 有 す る 場

* 東京市技師 工学士 東京市役所河川課勤務

** Ratzersdorfer: Knicksicherheit von Stäben und Stabwerken. (Wien Julius Springer)

合の解法を掲げて居る。*

唯、著者の不審とする所は何故に Ratzersdorfer は好んでかゝる非實際的なる骨組を選んで弾性破損を論じたかといふ點である。図-2 の如き骨組と図-3 の骨組とは弾性破損荷重に於て相當の差があり特に格間數の小なる場合に於て著しく、図-2 骨組の結果を以て図-3 骨組の弾性破損を率する譯には行かないのである。理由は次節に於て示す。



この問題は適用の範圍が頗る廣く高い鉄塔の安定を論ずる場合とか、又は組合せ抗圧材の lacing の強度を定めるとか色々の場合が考へられる。然るに從來は理論の不備よりしてかゝる問題は全然等閑に附されてゐるか或は五里霧中をさまよつて居たと云つても過言ではない。

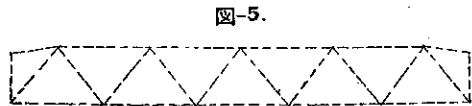
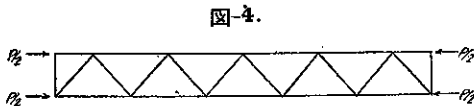
本論文は著者が lacing bar の作用の研究中、副産物的に派生したものであるがこれだけでも獨立して興味の對照になり得ると考へたので取敢ず一文をまとめた次第である。

(2) 弾性破損の種々なる形態に就て

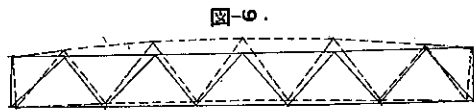
弾性破損を分けると所謂挫屈 (buckling) に屬する場合と側方孕み出し (bulging) による破損とある。今抗圧柱骨組の荷重の作用線と垂直なる方向に於る格點の変位を η_m とせば數學的には弾性破損を次の 2 つの場合に分つことが出来る。

$$\left. \begin{array}{l} \text{即ち} \quad \eta_m = \frac{A}{O} = \infty \\ \eta_m = \frac{O}{O} \text{ 不定} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{なる形を取る場合と} \\ \text{なる形を取る場合とに分れる} \end{array}$$

図-4 の如き左右對稱なる配置を有する骨組を考へて見る。普通の計算法に従へばこの場合斜材の応力は零となり従つて平行部材の応力は $P/2$ となる。この場合格點の変位を普通の算法に従つて図示すると図-5 の如くなる。



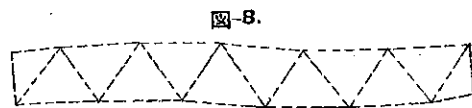
所が弦材に傾斜を生ずる結果斜材が引張られて實際の平衡位置は図-6 の如くなる。然し平衡状態に於てはこの量は僅で応力には殆ど影響しない。



茲に注意すべきは、かゝる構造の骨組は抗圧柱の中心線が(極めて微小であるが)平衡状態に於て常に彎曲するといふことである。従つてこの際に於ける弾性破損は $\eta_m = \infty$ なる條件の元に定められる。



次に図-7 の如く斜材の配置が荷重の作用方向に於て對稱軸を有しない場合には前と同様にして弦材応力を $P/2$ と



* 同書 p. 189 参照

せばその変位は點線の如くになり結局實際の平衡位置は(圖-8)の如くなる。

この場合も弾性破損は $\eta_m = \infty$ なる條件によつて定められる。この場合は彎曲の形が二山の曲線となるから挫屈荷重は圖-4 即ち一山の形の彎曲をなすものよりも高いらしいことが想像される。

Ratzersdorfer が扱つた骨組形即ち圖-2 に於ては

弦材は平衡状態に於て傾斜しないからその挫屈荷重の高いことは想像される。且その弾性破損は $\eta_m = 0/0$ なる形に於て定められる。

今この關係を極端なる場合に即ち 1 格間の骨組に就て説明してみる(圖-9, 10)。

圖-9 に於ては骨組としての弾性破損は起らない或は $P_k = \infty$ なりとも云ひ得る。(圖-10)に於ては弦材は平衡状態に於て傾斜するから P_k は或有限値を示す管である。事實 Ratzersdorfer の公式に於ても n 即ち格間數 1 なるときは $P_k = \infty$ なることを示して居る。

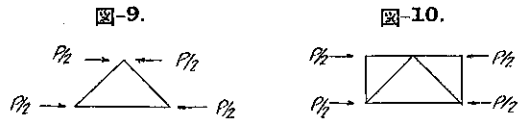


圖-11 の a), b) の場合を比較すると著者の計算によれば b) の挫屈荷重は a) の約 1/3 となる。尤もいづれにせよかかる格間數の非常に少なる場合は弾性の限度内に於ては挫屈は生じないから單に數學的意味に於て公式の結果を比較したに過ぎないのである。

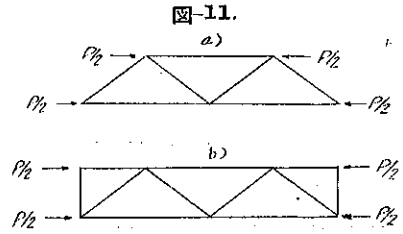
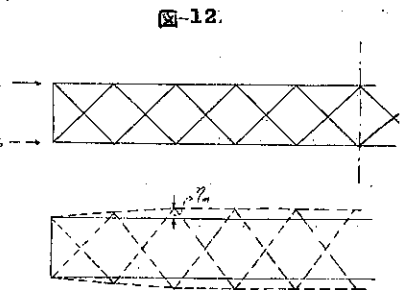


圖-12 の如き場合には平衡状態に於て孕み出しの現象を呈する。この場合に於ても P が或る値に達すると $\eta_m = \infty$ なり弾性破損を呈する。これが一方のみ彎曲せる場合は不平衡の状態となり η_m 不定となり所謂挫屈の現象を呈する。

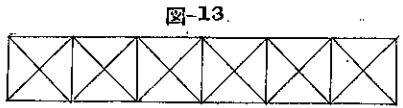


猶 圖-12 の骨組にさらに垂直材を附加すれば弾性破損に對して最も抵抗力の大なる system を得ることが想像される(圖-13)。

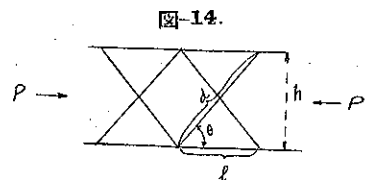
(3) 副応力に就て

格點を滑節と考へた場合には弦材と斜材との proportion が荷重に對して弾性破損を生ずる場合を除き、斜材に生ずる応力は微小で問題にならない。但し圖-13 の構造は別である。

然し格點の剛性を考へる場合には構成主部材の剛性如何によりては滑節の場合とは著しい差を生ずる。この例は lacing bar によりて結合された組合せ抗圧柱である。



Lacing bar の断面は抗圧主部材に對して著しく小であり且格點に於ける主部材の曲げ剛さ (flexural rigidity) 大なる爲 Lacing bar に作用する応力は滑節骨組として計算した値とは全然異り応力の符號すら反對となる。又その値は決して無視し得ぬ値となる。この觀念を簡單に得るには次の計算を便とする。今抗圧主部材は充分剛にして高さ h は変化なきものとする (tie plate の附近ではほぼこの状態を現出する)。



一般に $d = \sqrt{l^2 + h^2}$ より

$$\Delta d = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}} \Delta l + \frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}} \Delta h = \cos \theta \Delta l + \sin \theta \Delta h \dots\dots(1)$$

を得る。

今 $\Delta h=0$ とし。 A_f : 抗圧主部材の断面積, A : 斜材の断面積, P_f : 抗圧主部材に作用する圧力, D : 斜材に作用する圧力, P : 骨組全体に作用する圧力。

とせば (1) より $\frac{D\Delta d}{EA_d} = (\cos \theta) \frac{P_f \Delta l}{EA_f} \dots\dots(2)$

$d=l \sec \theta$ なる故

$$D = \frac{A_d}{A_f} \cos^2 \theta \cdot P_f \text{ となる}$$

然るに

$$P = 2P_f + 2D \cos \theta \text{ なる故}$$

$$P = \left(\frac{2A_f}{A_d \cos^2 \theta} + 2 \cos \theta \right) D$$

即ち

$$D = \frac{A_d \cos^2 \theta}{2A_f + 2A_d \cos^2 \theta} \cdot P \dots\dots(3)$$

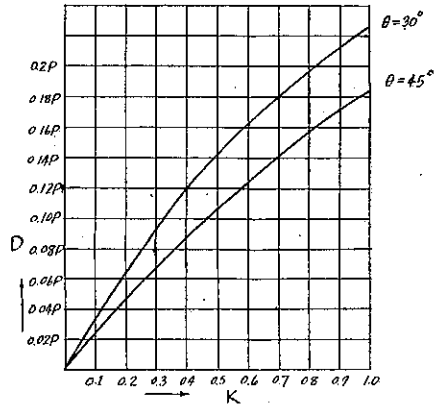
今 $A_d = KA_f$ とせば

$$D = \frac{K \cos^2 \theta}{2 + 2K \cos^2 \theta} \cdot P \dots\dots(4)$$

今 $\theta=30^\circ, 45^\circ$ として斜材に作用する応力 D を求めると図-

15 の如くなる。

図-15. 抗圧柱の幅 h が変化せぬ時斜材に作用する応力 D の表 (図-14 参照)



斜材の交点を銜結せる影響も副応力としては lacing bar に於けるが如き場合に於ては無視出来ない。

即ち孕み出しの影響を受け

図-16.

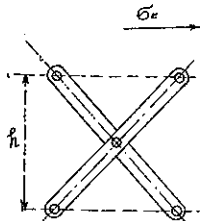


図-17.

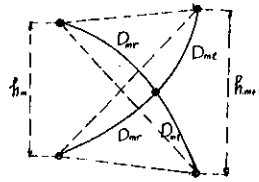
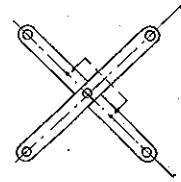


図-18.



て h の高さに変化を生ずるから斜材は bend されその上交点を境として斜材応力も異なってくる。Quebec 橋の破壊後なされた抗圧柱の試験報告を見るに lacing bar の応力

は區々まちまちで一定の rule を求め得ないと云つてゐるが挫屈に対する認識が不足してゐる結果と又上述の如き影響を無視して全然応力状態の異なる 2 區間に strain meter をかけて測定を行つたにも基因して居ると思ふ。(図-18 に於る \times の點に strain meter を固定した)。

以下本論に於てはかかる副応力の影響少き大形の骨組抗圧柱に就て述べんとするのである。勿論抗圧柱は全体としての弾性破損が起る前に構成部材が挫屈するやうなことの無い proportion にあるものと假定する。

ワレン型骨組抗圧柱を便宜上次の種類に分ける。

第 1 種として斜材が對稱的に配置されたもの、第 2 種としては斜材が非對稱的な配列を有するもの

図-19.

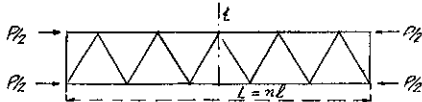
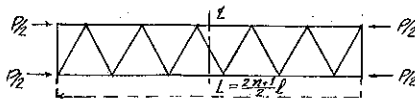


図-20.



第2章 第1種骨組の計算

$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$: 弦材の応力 (圧力を正とす)

D_1, D_2, \dots, D_n : 斜材の応力 (" ")

A_T : 弦材の断面積, A_a : 斜材の断面積

l : 格間長, h : 高さ

$L = nl \dots$ 抗圧柱の長さ

0-T 間は伸縮せぬものとす (骨組は實は上方

図-21.

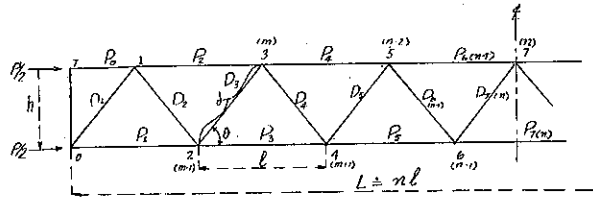
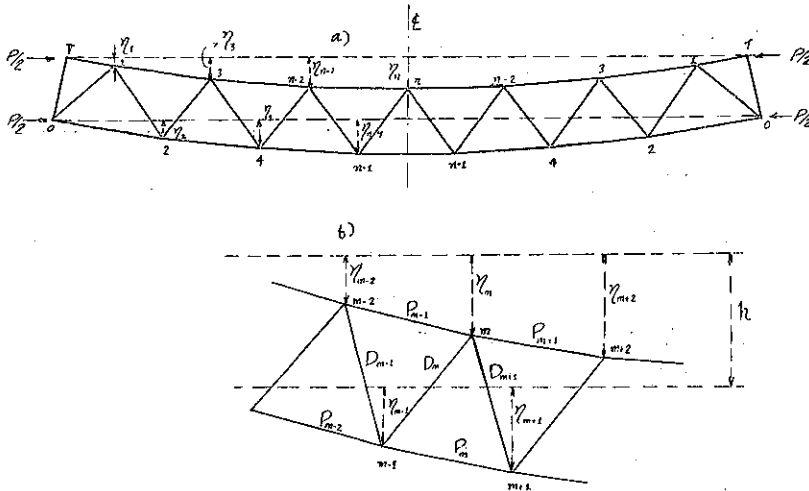


図-22.



に彎曲するのであるから得たる結果は $\eta < 0$ となる筈。

ξ_m : 格点の水平変位 (中心線を基準とす) 矢の方向を正とす。

* η_m : 格点の垂直変位

(1) 変位基本式の誘導

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} dx &= dr \cos \theta - r \sin \theta \cdot d\theta \\ dy &= dr \sin \theta + r \cos \theta \cdot d\theta \end{aligned} \right\}$$

より $dr = dx \cos \theta + dy \sin \theta \dots \dots \dots (5)$

然るに斜材 D_m に於て (図-22 b) 参照)。

$$dr = \frac{D_m d}{EA_a} \quad \text{又} \quad dy = \eta_m - \eta_{m-1}, \quad dx = \xi_{m-1} - \xi_m$$

結局 $\frac{D_m d}{EA_a} = (\xi_{m-1} - \xi_m) \cos \theta + (\eta_m - \eta_{m-1}) \sin \theta \dots \dots \dots (6)$

図-23.

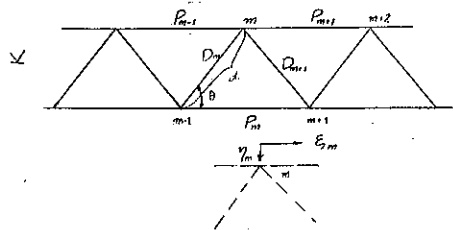
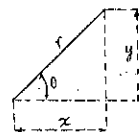


図-24.



* 変位の基本式としてはこの形の場合は Müller Breslau の弾性荷重の式を用ゐてもよいが計算方式を統一する意味に於て以下示す基本式によることとする。

同様にして
$$\frac{D_{m+1}d}{EAa} = (\xi_m - \xi_{m+1}) \cos \theta - (\eta_{m+1} - \eta_m) \sin \theta \dots\dots\dots (7)$$

(6) 式と (7) 式とを加へると

$$\frac{(D_m + D_{m+1})d}{EAa} = (\xi_{m-1} - \xi_{m+1}) \cos \theta - (\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}) \sin \theta \dots\dots\dots (8)$$

然るに $\xi_{m-1} - \xi_{m+1} = \frac{Pm l}{EA_f}$ 又 $d = \frac{l}{2 \cos \theta}$ となる故

(8) 式は
$$D_m + D_{m+1} = \frac{2Aa}{A_f} \cos^2 \theta \cdot P_m - (\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}) \times \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cdot EAa}{l} \dots\dots\dots (9)$$

別に釣合の条件より

$$\left. \begin{aligned} D_m \cos \theta + P_m + P_{m+1} &= P \\ D_{m+1} \cos \theta + P_m + P_{m+1} &= P \end{aligned} \right\} \text{を得る。}$$

これより
$$D_m + D_{m+1} = \frac{2P}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta} (P_{m-1} + 2P_m + P_{m+1}) \dots\dots\dots (10)$$

(9), (10) 式を等しと置き形を整へると

$$2P - P_{m-1} - 2 \left(1 + \frac{Aa}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_m - P_{m+1} = -(\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot EAa}{l} \dots\dots\dots (11)$$

$m = 1, 3, 5, \dots$

これは奇数番號の格點 m 即ち上弦の格點に就て成立する。

同様の手順を踏み格點 $m-1$ に就き計算すると

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{D_m d}{EAa} &= (\xi_{m-1} - \xi_m) \cos \theta + (\eta_m - \eta_{m-1}) \sin \theta \\ \frac{D_{m-1} d}{EAa} &= (\xi_{m-2} - \xi_{m-1}) \cos \theta - (\eta_{m-1} - \eta_{m-2}) \sin \theta \end{aligned} \right.$$

結局
$$D_m + D_{m-1} = \frac{2Aa}{A_f} \cos^2 \theta \cdot P_{m-1} + (\eta_{m-2} - 2\eta_{m-1} + \eta_m) \times \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cdot EAa}{l} \dots\dots\dots (12)$$

となり
$$2P - P_{m-2} - 2 \left(1 + \frac{Aa}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_{m-1} - P_m = (\eta_{m-2} - 2\eta_{m-1} + \eta_m) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot EAa}{l} \dots\dots\dots (13)$$

(13) 式が (11) 式と異なるのは右邊の符號のみである。

これをまとめると

$$\left. \begin{aligned} \text{第 1 式*は} \quad & 1.5P - 2 \left(1 + \frac{Aa}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_1 - P_2 = -(-2\eta_1 + \eta_2) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot EAa}{l} \\ \text{第 } (m-1) \text{ 式は} \quad & 2P - P_{m-2} - 2 \left(1 + \frac{Aa}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_{m-1} - P_m = (\eta_{m-2} - 2\eta_{m-1} + \eta_m) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot EAa}{l} \\ \text{第 } m \text{ 式は} \quad & 2P - P_{m-1} - 2 \left(1 + \frac{Aa}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_m - P_{m+1} = -(\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot EAa}{l} \\ \text{第 } n \text{ 式は} \quad & P - P_{n-1} - \left(1 + \frac{Aa}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_n = -(\eta_{n-1} - \eta_n) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot EAa}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

上式は結局弾性荷重の式である。されば P_m, P_{m+1} 等がきまれば格點変位が求め得る。但し釣合の条件を完全に

* $P_0 = P/2, \eta_0 = 0, nm$ 奇數

満足して居ないからこの式のみで問題を解決するわけには行かぬ。

この式にさらに格點に於ける平衡條件を附加せねばならぬ。

(2) 格點に於る平衡條件

格點 m に於る平衡條件は $\Sigma V=5$ として

図-25.

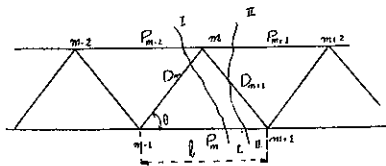
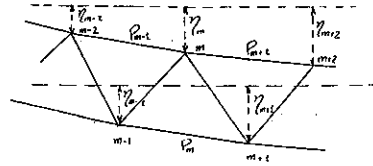


図-26.



$$(D_m + D_{m+1}) \sin \theta = \frac{P_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-2})}{l} - \frac{P_{m+1}(\eta_{m+2} - \eta_m)}{l} \dots (15)$$

此等の條件は結局 I~I, II~II 等に於る断面に於て垂直並に水平方向に於る平衡を考慮すればよい。圧力を正とせば

断面 I~I に於ては

$$\frac{P_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-2})}{l} + \frac{P_m(\eta_{m+1} - \eta_{m-1})}{l} = D_m \sin \theta^* \dots (16)$$

又 $D_m \cos \theta + P_{m-1} + P_m = P$ なる故

$$D_m \sin \theta = \tan \theta (P - P_{m-1} - P_m)$$

即ち
$$\frac{P_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-2})}{l} + \frac{P_m(\eta_{m+1} - \eta_{m-1})}{l} = \tan \theta (P - P_{m-1} - P_m) \dots (17)$$

左邊にまとめて

$$P_{m-1} \left(1 + \frac{\eta_m - \eta_{m-2}}{l \tan \theta} \right) + P_m \left(1 + \frac{\eta_{m+1} - \eta_{m-1}}{l \tan \theta} \right) = P \dots (18)$$

$l \tan \theta = 2h$ なる故上式は

$$P_{m-1} \left(1 + \frac{\eta_m - \eta_{m-2}}{2h} \right) + P_m \left(1 + \frac{\eta_{m+1} - \eta_{m-1}}{2h} \right) = P \dots (19)$$

$$m = 1, 3, 5 \dots$$

断面 II~II に於ては

$$-\frac{P_m(\eta_{m+1} - \eta_{m-1})}{l} - \frac{P_{m+1}(\eta_{m+2} - \eta_m)}{l} = D_{m+1} \sin \theta \dots (20)$$

結局
$$P_m \left(1 - \frac{\eta_{m+1} - \eta_{m-1}}{2h} \right) + P_{m+1} \left(1 - \frac{\eta_{m+2} - \eta_m}{2h} \right) = P \dots (21)$$

今 (19), (21) 式に於て $k_m = \frac{\eta_{m+1} - \eta_{m-1}}{2h}$, $k_{m+1} = \frac{\eta_{m+2} - \eta_m}{2h}$ 等と置けば n 個の關係式を得。但し $k_0^{**} = \frac{\eta_1}{h}$ $k_n = 0$ となる。又 $P_0 = P/2$ である。

* 斜材傾斜の影響は (16) 式によりて明かなる如く左邊の値に對して 2nd order なる故省略する。

** (19) 式に於て $l = l/2$, $\eta_0 = 0$ とおく。

$$\begin{array}{l}
 P/2(1+k_0)+P_1(1+k_1)=P \\
 P_1(1-k_2)+P_2(1-k_2)=P \\
 P_2(1+k_2)+P_3(1+k_3)=P \\
 \dots\dots\dots \\
 P_{n-1}(1+k_{m-1})+P_m(1+k_m)=P \\
 P_m(1-k_m)+P_{m+1}(1-k_{m+1})=P \\
 \dots\dots\dots \\
 P_{n-1}(1+k_{n-1})+P_n=P
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 m=1, 3, 5, \dots, n \\
 \dots\dots\dots(22)
 \end{array}
 \right\}$$

この連立方程式を解けば $P_1 \sim P_n$ を η の項にて表し得。

k_n は 1 に比して小なる故

$$\frac{1}{1 \pm k_m} \approx 1 \mp k_m \quad \text{又} \quad (1+k_p)(1+k_q)(1+k_r) \approx 1+k_p+k_q+k_r$$

となる。

第 1 式より $P_1 = (1-k_1)P - (1+k_0-k_1)P/2 = P/2(1-k_0-k_1) = P/2 - \frac{P}{4h}(2\eta_1 + \eta_0)$

第 2 式より $P_2 = (1+k_2)P - (1-k_1+k_2)P_1$

これに P_1 を代入して

$$= \frac{P}{2}(1+k_0+2k_1+k_2) = \frac{P}{2} + \frac{P}{4h}(\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_0)$$

第 3 式より $P_3 = (1-k_3)P - (1+k_2-k_3)P_2$

P_2 を代入して $= \frac{P}{2}(1-k_0-2k_1-2k_2-k_3) = \frac{P}{2} - \frac{P}{4h}(\eta_2 + 2\eta_3 + \eta_0)$

これより類推して

$$\begin{array}{l}
 P_0 = P/2 \\
 *m=1, 3, 5, \dots, n \quad \left. \begin{array}{l}
 P_m = \frac{P}{2} - \frac{P}{4h}(\eta_{m-1} + 2\eta_m + \eta_{m+1}) \\
 P_{m+1} = \frac{P}{2} + \frac{P}{4h}(\eta_m + 2\eta_{m+1} + \eta_{m+2}) \\
 P_n = \frac{P}{2} - \frac{P}{4h}(\eta_{n-1} + \eta_n)
 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(23)
 \end{array}$$

$\eta_{m-1} \approx \eta_m \approx \eta_{m+1}$ とせば $P_m = \frac{P}{2} - \frac{P}{h}\eta_m$ となる。骨組の彎曲を考ふる場合に多くの著者はこの値を用ひて居るがこれは大なる誤りである。何となれば $\eta_{m-1} \approx \eta_m \approx \eta_{m+1}$ に置けば (11), (13) 式の右邊は零となり該式と根本的に矛盾する。云ひかへれば骨組が彎曲せぬ (何となれば弾性荷重が零なる故) と云ふ條件を以て彎曲を論ずることになるから其の結果は當然信を置けない。

(3) 格點変位 η を求むること

(23) 式にて示されたる P_m の値を (14) 式に代入すれば η_m を含んだ關係式 n 個を得る。

(14) 式及 (23) 式とは

* n を奇數と決める必要はないが奇偶を區別するの煩を厭ひ以下 n は奇數とする。

$$\left. \begin{aligned} P_m &= \frac{P}{2} - \frac{P}{4h}(\eta_{m-1} + 2\eta_m + \eta_{m+1}) \\ P_{m-1} &= \frac{P}{2} + \frac{P}{4h}(\eta_{m-2} + 2\eta_{m-1} + \eta_m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} 2P - P_{m-1} - 2 \left(1 + \frac{A_a}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_m - P_{m+1} &= -(\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot E A_a}{l} \\ 2P - P_{m-2} - 2 \left(1 + \frac{A_a}{A_f} \cos^2 \theta \right) P_{m-1} - P_m &= (\eta_{m-2} - 2\eta_{m-1} + \eta_m) \times \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cdot E A_a}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

今 $\alpha = \frac{1}{E A_a \sin \theta \cos^2 \theta}$, $\beta = 1 + \frac{A_a \cos^2 \theta}{A_f}$ とおき (23) 式を (14) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} -\frac{P \alpha l}{4h} \eta_{m-2} + \left\{ \frac{P \alpha l}{4h} 2(\beta-1) + 2 \right\} \eta_{m-1} + \left\{ \frac{P \alpha l}{4h} 2(2\beta-1) - 4 \right\} \eta_m \\ + \left\{ \frac{P \alpha l}{4h} 2(\beta-1) + 2 \right\} \eta_{m+1} - \frac{P \alpha l}{4h} \eta_{m+2} = \alpha(\beta-1) P l \\ \frac{P \alpha l}{4h} \eta_{m-3} - \left\{ \frac{P \alpha l}{4h} 2(\beta-1) + 2 \right\} \eta_{m-2} - \left\{ \frac{P \alpha l}{4h} 2(2\beta-1) - 4 \right\} \eta_{m-1} \\ - \left\{ \frac{P \alpha l}{4h} 2(\beta-1) + 2 \right\} \eta_m + \frac{P \alpha l}{4h} \eta_{m+1} = \alpha(\beta-1) P l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

α, β の記號を元に戻すと

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{P \alpha l}{4h} &= \frac{P}{2 E A_a \sin^2 \theta \cos \theta} = \frac{1}{K \sin^2 \theta \cos \theta} \cdot \frac{\sigma_0}{E}, & \text{但} & \left\{ \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{P}{2 A_f} = \text{stress intensity of } P_0 \\ K &= \frac{A_a}{A_f} \end{aligned} \right. \\ 2(\beta-1) &= \frac{2 A_a \cos^2 \theta}{A_f} = 2 K \cos^2 \theta \\ 2\beta-1 &= 1 + 2 K \cos^2 \theta \\ \alpha(\beta-1) P l &= \frac{A_a \cos^2 \theta}{A_f} \cdot \frac{P l}{E A_a \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{P l}{2 A_f} = \frac{2 l}{\tan \theta} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \end{aligned} \right.$$

結局 m 番目の式として

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K \sin^2 \theta \cos \theta} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m-2} + \left\{ 2 \cot^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} + 2 \right\} \eta_{m-1} - \left\{ 4 - \frac{2(1+2K \cos^2 \theta)}{K \sin^2 \theta \cos \theta} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \right\} \eta_m \\ & + \left\{ 2 + 2 \cot^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \right\} \eta_{m+1} - \frac{1}{K \sin^2 \theta \cos \theta} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m+2} = \frac{2 l}{\tan \theta} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \end{aligned}$$

兩邊に $K \sin^2 \theta \cos \theta$ を乗じて

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_0}{E} \cdot \eta_{m-2} + \left(2 K \sin^2 \theta \cos \theta + 2 K \cos^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \right) \eta_{m-1} - \left\{ 4 K \sin^2 \theta \cos \theta - 2(1+2K \cos^2 \theta) \frac{\sigma_0}{E} \right\} \eta_m \\ & + \left(2 K \sin^2 \theta \cos \theta + 2 K \cos^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \right) \eta_{m+1} - \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m+2} = 2 K l \sin \theta \cos^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

同様に $(m-1)$ 番目の式として

$$\begin{aligned} & + \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m-3} - \left(2 K \sin^2 \theta \cos \theta + 2 K \cos^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \right) \eta_{m-2} + \left\{ 4 K \sin^2 \theta \cos \theta - 2(1+2K \cos^2 \theta) \frac{\sigma_0}{E} \right\} \eta_{m-1} \\ & - \left(2 K \sin^2 \theta \cos \theta + 2 K \cos^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \right) \eta_m + \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m+1} = 2 K l \sin \theta \cos^2 \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

1 番目の式は少し形が異り次の如くなる。

$$-\left\{4K\sin^2\theta\cos\theta-(3+4K\cos^2\theta)\cdot\frac{\sigma_0}{E}\right\}\eta_1+\left(2K\sin^2\theta\cos\theta+2K\cos^2\theta\cdot\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_2$$

$$-\frac{\sigma_0}{E}\eta_3=2K\sin\theta\cos^2\theta\cdot\frac{\sigma_0}{E}\dots\dots\dots(27)$$

2 番目乃至 n 番目の式に對しては (25) 及 (26) 式を適用する。但し 2 番目及 (n-1), n 番目の式に於てはそれぞれ $\eta_0=0, \eta_{n-1}=\eta_{n+1}$ なることに留意すれば n 個の方程式を得る。この聯立方程式を解いて η の値を求むることは勿論可能であるが σ_0 の一般の値に對しては部材応力に影響を及ぼす程度のものではない。唯この聯立方程式の η の係数によりて作らるゝ determinant (行列式) を 0 と置いて求めらるゝ σ_0 の特定値即ち弾性破損に對應する σ_k の値を求むることが重要な意味を有するのである。

然し念のために $n=5$ の場合につき格點変位を求めると次の 5 式が成立する。但 $K\sin^2\theta\cos\theta=a, K\cos^2\theta=b, K\sin\theta\cos^2\theta=c$ と置く。

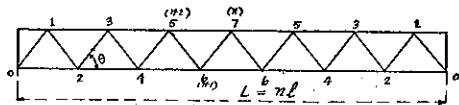
$$\left. \begin{aligned} &-\left\{4a-(3+4b)\frac{\sigma_0}{E}\right\}\eta_1+\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_2-\frac{\sigma_0}{E}\eta_3=2c\cdot\frac{\sigma_0}{E} \\ &-\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_1+\left\{4a-(2+4b)\frac{\sigma_0}{E}\right\}\eta_2-\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_3+\frac{\sigma_0}{E}\eta_4=2c\cdot\frac{\sigma_0}{E} \\ &-\frac{\sigma_0}{E}\eta_1+\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_2-\left\{4a-(2+4b)\frac{\sigma_0}{E}\right\}\eta_3+\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_4-\frac{\sigma_0}{E}\eta_5=2c\cdot\frac{\sigma_0}{E} \\ &+\frac{\sigma_0}{E}\eta_2-\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_3+\left\{4a-(1+4b)\frac{\sigma_0}{E}\right\}\eta_4-\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_5=2c\cdot\frac{\sigma_0}{E} \\ &-\frac{\sigma_0}{E}\eta_3+\left(2a+2b\frac{\sigma_0}{E}\right)\eta_4-\left\{2a-(1+2b)\frac{\sigma_0}{E}\right\}\eta_5=c\cdot\frac{\sigma_0}{E} \end{aligned} \right\}$$

これに個々の場合の数字を入れて解くと図-6 に示した様な変位を示す。 η_m の値は負となるがこれは本計算の

表-1. n 奇数の場合

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_{n-1}	η_n
1	$-4a+(3+4b)\frac{\sigma_k}{E}$	$2a+2b\frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$				
2	$-2a-2b\frac{\sigma_k}{E}$	$4a-(2+4b)\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a-2b\frac{\sigma_k}{E}$	$+\frac{\sigma_k}{E}$			
3	$-\frac{\sigma_k}{E}$	$2a+2b\frac{\sigma_k}{E}$	$-4a+(2+4b)\frac{\sigma_k}{E}$	$2a+2b\frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$		
4		$+\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a-2b\frac{\sigma_k}{E}$	$4a-(2+4b)\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a-2b\frac{\sigma_k}{E}$	$+\frac{\sigma_k}{E}$	
5			$-\frac{\sigma_k}{E}$	$2a+2b\frac{\sigma_k}{E}$	$-4a+(2+4b)\frac{\sigma_k}{E}$	$2a+2b\frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$
6 (n-1)				$+\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a-2b\frac{\sigma_k}{E}$	$4a-(1+4b)\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a-2b\frac{\sigma_k}{E}$
7 (n)					$-\frac{\sigma_k}{E}$	$2a+2b\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a+(1+2b)\frac{\sigma_k}{E}$

但 $a=K\sin^2\theta\cos\theta, b=K\cos^2\theta, K=\frac{A_a}{A_f}$



記號の約束上當然の結果である。但しこの計算は手数を要するのみにて實際上の興味は薄いから省略する。

(4) 弾性破損の際に於る部材 P_0 の応力度 σ_k を求めること σ_k を求めるには (25), (26) 式にて示さる n 元の聯立方程式の η 係數によりて作られる determinant

$D_n=0$ とおき σ_0 の特定値即ち σ_k を求めるのである。この determinant は次の如くなる(表-1)。この行列式は n 次であり各行に σ_k を含むからこの行列式を展開すると σ_k に就て n 次の方程式を得る。従つて $D_n=0$ の根たる σ_k の値は n 次方程式の實根の數に等しき種類がある。尤も一次以上の σ_k の値は實際的にはたいした意味を持たないから特に論じないことにする。

(5) 簡單なる場合の解法

$n=2$ なる場合

表-1 の行列式を参照せば所要の行列式は次の如くなる。

但 $\sigma_k = \frac{P_k}{2A_j}$ $a = K \sin^2 \theta \cos \theta$, $b = K \cos^3 \theta$, 但 $\eta_3 = \eta_1, \eta_4 = \eta_0 = 0$, $K = \frac{A_1}{A_j}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -4a + (2+4b)\frac{\sigma_k}{E} & 2a + 2b\frac{\sigma_k}{E} \\ -4a - 4b\frac{\sigma_k}{E} & 4a - (2+4b)\frac{\sigma_k}{E} \end{vmatrix} = 0$$

これを展開して 0 とおけば

$$-\left\{4a - (2+4b)\frac{\sigma_k}{E}\right\}^2 + 2\left\{2a + 2b\frac{\sigma_k}{E}\right\}^2 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

依て $\sigma_k = \frac{(4-2\sqrt{2})aE}{2+(4+2\sqrt{2})b} = \frac{(4-2\sqrt{2})KE \sin^2 \theta \cos \theta}{2+(4+2\sqrt{2})K \cos^3 \theta}$ } $\dots\dots\dots (29)$

或は $\sigma_k = \frac{(4+2\sqrt{2})KE \sin^2 \theta \cos \theta}{2+(4-2\sqrt{2})K \cos^3 \theta}$

この 2 つの値の内上の値の方が小である。

Ratzersdorfer の値と比較するために σ_k の最小値の形を変化させると次の如くなる。

$$\sigma_k = \frac{KE \sin^2 \theta \cos \theta}{1.707 + 5.828 K \cos^3 \theta} \dots\dots\dots (30)$$

(6) Ratzersdorfer の計算との比較

本文の冒頭に於て Ratzersdorfer のなしたこの種の計算(図-29 参照)は實際的の意義少くその挫屈荷重は本文に於て取扱つてゐる図-21 の形のものには適応せぬことを述べた。茲では實際値に就き比較をしてみる(彼の著書*の p. 181 或は p. 189 参照)。

Ratzersdorfer の計算した P_k^{**} は

$$P_k = \frac{36}{3+2\omega} \frac{EI}{L^2}$$

* 前出

** P_k の値は勿論図-29 の形に對しては正しい。

図-27.

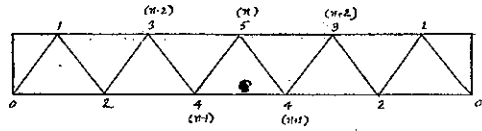


図-28.

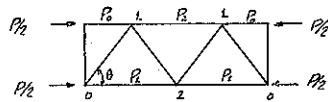
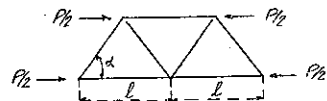


図-29.



但し $L = \frac{3}{2}l, I = 2I' \left(\frac{l}{4} \tan \alpha\right)^2, w = \frac{EF}{EF'} \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}$

F : 弦材断面積, F' : 斜材断面積

これを本文の記號に直すと

$$\frac{I}{L^2} = \frac{A_f \tan^2 \theta^*}{18} \quad \omega = \frac{1}{2K \cos^2 \theta} \quad \text{となり。結局}$$

$$P_k = \frac{2KEA_f \sin^2 \theta \cos \theta}{1 + 3K \cos^2 \theta}$$

即ち $\sigma_k = \frac{P_k}{2A_f} = \frac{KE \sin^2 \theta \cos \theta}{1 + 3K \cos^2 \theta}$ となる。

即ち (30) 式にて與へらる λ 値の約倍となる。

即ち Ratzersdorfer の挫屈荷重は高すぎて図-28 の形式には適しない。* これは前にも述べた如く Ratzersdorfer の骨組は平衡状態に於て弦材が傾斜せぬから stability が良好なのである。

Ratzersdorfer の著書 p. 189 には P_k の一般式が與へてある。

これによると $P_k = \frac{l^2}{1 + \lambda \omega} \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{I_s^2}$

但 $I_s = \left(n - \frac{1}{2}\right)l, n$: 格間數, $I = I' \cdot \frac{l^2}{2}, l^2 = \left(\frac{4n-2}{\pi} \tan \frac{\pi}{4n-2}\right)^2$

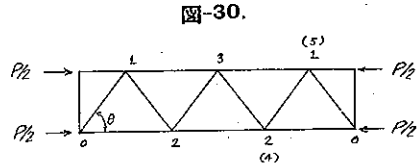
$$\lambda = \left(2 \tan \frac{\pi}{4n-2} \cdot \cos \frac{\pi}{2n}\right)^2 \quad \omega = \frac{EF'}{EF} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}$$

$n=1$ 即ち 1 格間のときは $l = \infty, \lambda = 1$ となるから $P_k = \infty$ である。

事實図-9 の骨組は弾性破損はしない所が図-10 に於ては $\sigma_k = KE \sin^2 \theta \cos \theta^{***}$ となり、ともかくも有限値である。

$n=3$ なる場合

この場合には表-1 を参照して次の行列を得る。但 $\eta_0 = \eta_3 = 0, \eta_1 = \eta_2, \eta_4 = \eta_1$ なることに留意



$D_n =$	$-\frac{4a + (3+4b)\sigma_k}{E}$	$2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$
	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$4a - (1+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$
	$-\frac{\sigma_k}{E}$	$2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-2a + (1+2b) \frac{\sigma_k}{E}$

.....(31)

これを展開して $\frac{\sigma_k}{E}$ の項をまとめると ($a = K \sin^2 \theta \cos \theta, b = K \cos^2 \theta$).

$\frac{\sigma_k}{E}$ を含まぬ項は $(2K \sin^2 \theta \cos \theta)^3$

* frame の弾性破損に於ては I の term は實は存在しないのである。
 ** 但格間數が大となるに伴ひこの差はなくなる。
 *** 當初かゝる極端なる場合を考へる意志なかりしため基本式に於て OT の伸びは無視した。従つてこの結果は單なる參考値であるから計算の導程は省く。

$$\frac{\sigma_k}{E} \text{の項は} \quad -(2K \sin^2 \theta \cos \theta)^2 (6 + 30K \cos^2 \theta)$$

$$\left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^2 \text{の項は} \quad 2K \sin^2 \theta \cos \theta (9 + 72K \cos^2 \theta + 60K^2 \cos^4 \theta)$$

$$\left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^3 \text{の項は} \quad -(2 + 18K \cos^2 \theta + 24K^2 \cos^4 \theta + 8K^3 \cos^6 \theta)$$

となり結局問題は

$$(2K \sin^2 \theta \cos \theta)^3 - (2K \sin^2 \theta \cos \theta)^2 (6 + 30K \cos^2 \theta) \frac{\sigma_k}{E} + (2K \sin^2 \theta \cos \theta (9 + 72K \cos^2 \theta + 60K^2 \cos^4 \theta)) \left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^2 - (2 + 18K \cos^2 \theta + 24K^2 \cos^4 \theta + 8K^3 \cos^6 \theta) \left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^3 = 0 \dots\dots\dots (32)$$

を解くことに歸する。

今* $K=1, \theta=45^\circ, E=2100000 \text{ kg/cm}^2$ とせば

式 (32) は

$$0.35355 - 8.30325 \left(\frac{\sigma_k}{E}\right) + 29.6668 \left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^2 - 11.71745 \left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^3 = 0$$

これを解いて $\frac{\sigma_k}{E}$ の最小値を求めると

$$\frac{\sigma_k}{E} = 0.0521 \text{ となる。}$$

この値も弾性限を超えた場合に當るから 實際的には無意味である。弾性限界を超えたる場合は後に述べる。以下一々このことを断らず、暫くの内は單に公式の數學的な意味を論ずることとする。

(7) 一般なる場合の解法

行列式を展開して σ_k の値を求むることは n が大となると非常に複雑となる。 $\left(\frac{\sigma_k}{E}\right)$ の一次の項のみをとれば概略値は得られるがその精度に關しては疑問が残る。以後は Ratzersdorfer の著書** p. 187 に記載してある例にならつて Differenzen Rechnung によつてこの問題を解いてみる。

基本式 (25), (26) を再録すれば (但し式中 $K \sin^2 \theta \cos \theta = a, K \cos^2 \theta = b$ とする)。 $Kl \sin \theta \cos^2 \theta = c$

奇數番目 m の式として

$$-\frac{\sigma_0}{E} \eta_{m-2} + \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) \eta_{m-1} - \left\{4a - 2(1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \eta_m + \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) \eta_{m+1} - \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m+2} = 2c \frac{\sigma_0}{E} \dots\dots\dots (33)$$

偶數番目 $(m-1)$ の式として

$$+\frac{\sigma_0}{E} \eta_{m-3} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) \eta_{m-2} + \left\{4a - 2(1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \eta_{m-1} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) \eta_m + \frac{\sigma_0}{E} \eta_{m+1} = 2c \frac{\sigma_0}{E} \dots\dots\dots (34)$$

(33), (34) 式に於て $\eta_m = \eta_{m+1} + (-1)^m k$ と置き k を適當に選べば (33), (34) 式は m の奇偶に係らず 1 つの一般式を得る。

* この結果は後に一般公式の値と照合するため特に掲げておく。

** 前出

即ち
$$\frac{\sigma_0}{E} y_{m-2} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_{m-1} + \left\{4a - 2(1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} y_m - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_{m+1} + \frac{\sigma_0}{E} y_{m+2} = 0 \dots (35)$$

但
$$y_m = \eta_m - (-1)^m k = \eta_m - (-1)^m \cdot \frac{l}{4} \cot \theta \frac{\sigma_0}{E} \dots (36)$$

n 個の關係式の内第 1 番目の式のみは上の一般式に適合しない。これは上記の Differenzen Gleichung を解いた上で boundary condition として處理する。

式 (27) を参照し第 1 番目の式は

$$-\left\{4a - (3 + 4b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \eta_1 + \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) \eta_2 - \frac{\sigma_0}{E} \eta_3 = 2c \frac{\sigma_0}{E}$$

なることを知る。これに $\eta_m = y_m + (-1)^m k$ なる關係を入れると

$$\left\{4a - (3 + 4b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} y_1 - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_2 + \frac{\sigma_0}{E} y_3 = -\frac{c}{2a} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \left\{a + (1 + b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \dots (35a)$$

(35) 式の解を

$$y_m = A \cos m\alpha_1 + B \sin m\alpha_1 + C \cosh m\alpha_2 + D \sinh m\alpha_2 \dots (37)$$

とする。 $m=1, 2, 3, \dots, n$

A, B, C, D は boundary condition によりて定まる常數, α_1, α_2 は (37) 式が (35) 式を満足するやうに定める一定數である。

又 $\cos m\alpha_1 = \frac{1}{2}(e^{mi\alpha_1} + e^{-mi\alpha_1})$, $\cosh m\alpha_2 = \frac{1}{2}(e^{m\alpha_2} + e^{-m\alpha_2})$ である。

i は虚數

今 (37) 式に $y = e^{m\alpha}$ を代入してみると

$$\frac{\sigma_0}{E} \cdot e^{m-2\alpha} a - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) e^{(m-1)\alpha} + \left\{4a - 2(1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} e^{m\alpha} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) e^{(m+1)\alpha} + \frac{\sigma_0}{E} e^{(m+2)\alpha} = 0$$

$e^{m\alpha}$ で全体を割ると

$$\frac{\sigma_0}{E} e^{-2\alpha} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) e^{-\alpha} + \left\{4a - 2(1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) e^{\alpha} + \frac{\sigma_0}{E} e^{2\alpha} = 0$$

これをまとめると

$$\frac{\sigma_0}{E} (e^{-2\alpha} + 2 + e^{2\alpha}) - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) (e^{-\alpha} + e^{\alpha}) + \left\{4a - (4 + 4b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} = 0$$

即ち
$$\frac{\sigma_0}{E} (e^{-\alpha} + e^{\alpha})^2 - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) (e^{-\alpha} + e^{\alpha}) + \left\{4a - (4 + 4b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} = 0 \dots (38)$$

若し
$$\left. \begin{aligned} \frac{a + b \frac{\sigma_0}{E}}{\frac{\sigma_0}{E}} &= \cos \alpha_1 + \cosh \alpha_2 \\ \frac{a - (1 + b) \frac{\sigma_0}{E}}{\frac{\sigma_0}{E}} &= \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

及

なるやうに α_1 と α_2 を選べば (38) 式は満足される。

(39) 式より $\cosh \alpha_2$ を追ひ出すと

$$\frac{\sigma_0}{E} = \frac{a(1 - \cos \alpha_1)}{1 - \cos^2 \alpha_1 + (1 + \cos \alpha_1)b} = \frac{K \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \cos \alpha_1)}{1 - \cos^2 \alpha_1 + (1 + \cos \alpha_1)K \cos^2 \theta} \dots (40)$$

この関係は本式の解法に於て最も重要である。即ち弾性破損の條件に適合する $\cos \alpha_1$ の値を知れば簡單なる形に於て σ_0 の特定値即ち σ_k を求むることが出来る。

先づ常數 A, B, C, D を定めやう。

周邊條件としては (圖-23 其他参照)

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } y_0 = 0 \text{ 即ち } y_0 = -\frac{l}{4} \cot \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \\ \text{ii) } y_{n-2} = y_{n+2} \\ \text{iii) } y_{n-1} = y_{n+1} \\ \text{iv) } y_1, y_2, y_3 \text{ が (35a) 式を満足すること} \end{array} \right\} \text{ 對照の條件}$$

條件 i) より $A + C = -\frac{l}{4} \cot \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \dots (41)$

條件 ii) より $A \cos(n-2)\alpha_1 + B \sin(n-2)\alpha_1 + C \cosh(n-2)\alpha_2 + D \sinh(n-2)\alpha_2$
 $= A \cos(n+2)\alpha_1 + B \sin(n+2)\alpha_1 + C \cosh(n+2)\alpha_2 + D \sinh(n+2)\alpha_2 \dots (42)$

條件 iii) より $A \cos(n-1)\alpha_1 + B \sin(n-1)\alpha_1 + C \cosh(n-1)\alpha_2 + D \sinh(n-1)\alpha_2$
 $= A \cos(n+1)\alpha_1 + B \sin(n+1)\alpha_1 + C \cosh(n+1)\alpha_2 + D \sinh(n+1)\alpha_2 \dots (43)$

iv) の條件

35a) 式 の左邊は一般の關係式即ち

$$\frac{\sigma_0}{E} y_{-1} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_0 + \left\{4a - 2(1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} y_1 - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_2 + \frac{\sigma_0}{E} y_3^*$$

より $\left[\frac{\sigma_0}{E} y_{-1} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_0 + \frac{\sigma_0}{E} y_1\right]$ を引いたものに等しい。

又 $y_0 = \frac{c}{4a} \cdot \frac{\sigma_0}{E}$ なる故 (35a) 式を参照し (その右邊の符號が變る)。

iv) の條件として

$$\frac{\sigma_0}{E} y_{-1} + \frac{\sigma_0}{E} y_1 = \frac{c}{2a} \cdot \frac{\sigma_0}{E} \left\{2a + (1 + 2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \dots (44)$$

即ち $2 \frac{\sigma_0}{E} \cos \alpha_1 \cdot A + 2 \frac{\sigma_0}{E} \cosh \alpha_2 \cdot C = \frac{l}{2} \cot \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \left\{2K \sin^2 \theta \cos \theta + (1 + 2K \cos^2 \theta) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \dots (44a)$

(41), (42), (43), (44a) 式を整理して一括すると

$$\left. \begin{array}{l} A + C = -\frac{l}{4} \cot \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \\ 2 \frac{\sigma_0}{E} \cos \alpha_1 \cdot A + 2 \frac{\sigma_0}{E} \cosh \alpha_2 \cdot C = \frac{l}{2} \cot \theta \cdot \frac{\sigma_0}{E} \left\{2K \sin^2 \theta \cos \theta + (1 + 2K \cos^2 \theta) \frac{\sigma_0}{E}\right\} \\ \sin 2\alpha_1 \sin n\alpha_1 \cdot A - \sin 2\alpha_1 \cos n\alpha_1 \cdot B - \sinh 2\alpha_2 \sinh n\alpha_2 \cdot C - \sinh 2\alpha_2 \cosh n\alpha_2 \cdot D = 0 \\ \sin \alpha_1 \sin n\alpha_1 \cdot A - \sin \alpha_1 \cos n\alpha_1 \cdot B - \sinh \alpha_2 \sinh n\alpha_2 \cdot C - \sinh \alpha_2 \cosh n\alpha_2 \cdot D = 0 \end{array} \right\} (45)$$

* この式は 0 である。

(45) 式の関係式より A, B, C, D を求め得るからこれを (37) 式に入れて平衡状態に於る彎曲* を求め得る。骨組が平衡を失ふのは A, B, C, D の係数が示す行列式が 0 となる場合である。この場合には $\eta_n = \infty$ となる。

行列式を作ると (45) 式の 2 番目の式中 $2 \frac{\sigma_0}{E}$ なる値は計算に關係しない。次の如くなる係数 D と混同するのを防ぐため \mathfrak{D} を用ふ。

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 & \\ \cos \alpha_1 & & \cosh \alpha_2 & \\ \sin 2\alpha_1 \sin n\alpha_1 & -\sin 2\alpha_1 \cos n\alpha_1 & -\sinh 2\alpha_2 \sinh n\alpha_2 & -\sinh 2\alpha_2 \cosh n\alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin n\alpha_1 & -\sin \alpha_1 \cos n\alpha_1 & -\sinh \alpha_2 \sinh n\alpha_2 & -\sinh \alpha_2 \cosh n\alpha_2 \end{vmatrix}$$

これを展開して零とおくと

$$\mathfrak{D} = (\cosh \alpha_2 - \cos \alpha_1)(\sinh 2\alpha_1 \sinh \alpha_2 - \sinh 2\alpha_2 \sin \alpha_1) \cos n\alpha_1 \cosh n\alpha_2 = 0 \dots\dots\dots (46)$$

これより $\cos n\alpha_1 = 0$, 即ち $n\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\dots\dots$

依て (40) 式を参照し σ_k の最小値として

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^2 \theta} \dots\dots\dots (47)$$

今この結果を (29) 式及 (31) 式にて求めらるゝ個々の場合と比較してみる。

$n=2$ なる場合には $\cos \frac{\pi}{2n} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

これを (47) 式に代入すると

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) K \cos^2 \theta} = \frac{(4 - 2\sqrt{2}) K \sin^2 \theta \cos \theta}{2 + (4 + 2\sqrt{2}) K \cos^2 \theta}$$

となり完全に (29) 式と一致する。

σ_k の他の値は $\cos n\alpha_1 = 0$ なる關係中 $n\alpha_1 = \frac{3\pi}{2}$ 即 $\alpha_1 = \frac{3\pi}{2n}$ として求めた値, 即ち $\cos \frac{3\pi}{2n} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

より

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) K \cos^2 \theta} = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta (4 + 2\sqrt{2})}{2 + (4 - 2\sqrt{2}) K \cos^2 \theta}$$

を得る。 $n\alpha_1 = \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ 等とおくも單に同一の値を繰り返すに過ぎないから $n=2$ に對しては σ_k の値は 2 個以外にはない。

$n=3$ なる場合には

$$\cos \frac{\pi}{2n} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 故}$$

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \frac{3}{4} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) K \cos^2 \theta} = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta (4 - 2\sqrt{3})}{1 + (4 + 2\sqrt{3}) K \cos^2 \theta} \dots\dots\dots (48)$$

* 極めて小ではあるが

これを (13) 頁にて求めた値と比較するため $\theta=45^\circ$, $K=1$ とおくと

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \cos^3 \theta = 0.70711^3 = 0.35355 \quad \text{故}$$

$$\frac{\sigma_k}{E} = \frac{0.35355(4-2\sqrt{3})}{1+(4+2\sqrt{3})0.35355} = 0.05206$$

となり前に求めた値と一致する。

$n=3$ なる場合には $\cos \frac{3\pi}{2n}$ 及 $\cos \frac{5\pi}{2n}$ に対応して σ_k が求められる。

$$\cos \frac{3\pi}{2n} = \cos \frac{3\pi}{6} = 0 \quad \text{故第 2 の } \sigma_k \text{ の値として}$$

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta}{1 + K \cos^2 \theta} \quad \text{又} \quad \cos \frac{5\pi}{2n} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

第 3 の $\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta (4+2\sqrt{3})}{1+(4-2\sqrt{3})K \cos \theta}$ を得。

第 3 章 第 1 種骨組の種々なる性質に就て

第 1 種骨組即ち図-19 に示す抗圧柱の弾性破損を種々なる見地より考察して見よう。大体に於て次の 3 つの場合が考へられる。

- イ) 斜材の角度 θ を一定にし n を変化せしむる場合。
- ロ) 抗圧柱の幅と長さの比 h/L を一定に保ち n 従つて θ を変化せしむる場合。
- ハ) n を一定にして θ を変化せしむる場合。

今順次この 3 つの場合を研究してみる。

(1) 斜材の角度を一定に保ち格間数 n を変化さず場合

これは要するに同一条件の元にある抗圧柱の長さを変化さすことに外ならない。

弾性破損に対応する、部材 P_0 の応力度 σ_k は (47) 式に示すが如く

$$\sigma_k = \frac{P_k}{2A_f} = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (47)$$

特殊な場合として斜材が非常に剛なるとき即ち $K=\infty$ の場合には

$$\sigma_k = \frac{E \tan^2 \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 + \cos \frac{\pi}{2n}} \quad \dots\dots\dots (49)$$

今 (47) 式にて示さるゝ値を Euler の公式の結果と較べてみる。

Euler の公式は

$$\sigma_k = \pi^2 E \left(\frac{r}{L}\right)^2, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{然るに} \quad I = 2A_f \times (h/2)^2, \quad A = 2A_f$$

$$\therefore r = h/2, \quad \text{又} \quad L = nl \quad \text{故}$$

$$\therefore \frac{r}{L} = \frac{h/2}{nl} = \frac{\tan \theta}{4n} \quad (l: \text{格間長}, \quad n: \text{格間数})$$

Euler の式は $\sigma_k = \frac{\pi^2 E \tan^2 \theta}{16 n^2}$ (50)

となる。

今 $\theta = 45^\circ$ とし $K = 0.1, 1, \infty$ なる 3 つの場合を比較すると次の如くなる。

表-2.

	σ_k						
	n	5	10	15	20	25	30
L/r	20	40	60	80	100	120	
Euler's Buckl'g Stress	51 815 kg/cm ²	12 955 kg/cm ²	5 760 kg/cm ²	3 240 kg/cm ²	2 070 kg/cm ²	1 440 kg/cm ²	
σ_k for $K=1$	43 270	12 570	5 680	3 215	2 060	1 435	
σ_k for $K=0.1$	22 070	9 640	5 000	3 000	1 960	1 385	
σ_k for $K=\infty$	52 680	13 000	5 765	3 240	2 070	1 440	

n が小なる間は斜材の弱きもの即ち K の小なる骨組は著しく弱められるが n が大となるに連れてその影響が減じて来る。弾性の限度内*に於る挫屈は一様に $n=25$ 以上の場合に生ずる。又斜材は或る限度以上強くしても挫屈には殆ど影響が無く $K=1$ の場合と $K=\infty$ の場合と殆ど差が無いことが判る。 K が 1 に近い場合、又は n が 25 以上の場合は Euler の公式と殆ど合致する。

(2) h/L を一定に保ち n を変化さす場合

今 h/L を $1/30$ に保ち格間数 n を変化させると図-31を得る。これを見るに斜材弱きもの例へば $K=0.1$ なるものは斜材角度 45° 以下では非常に弱くなる。斜材の強きものは斜材角度には余り影響なく、その角度が急になるにつれて急速に一定値に近づく。

之を要するに h/L を一定に保つた場合は斜材角度は急なほどよい。然し或る限度以上急にしても効果は薄い。 K の大なるほど又斜材角度が急なほど Euler の値に近づく。但し K は 1 以上に取つても効果は少い。

この場合の計算では $\tan \theta = \frac{2nh}{L}$ とし h/L を一定に保つて n 従つて θ を変化せしめる。又この場合の Euler の挫屈応力は $\sigma_k = \pi^2 E \cdot \frac{h^2}{4L^2}$ となる。

(3) n を一定にして θ を変化せしむる場合

抗圧柱の長さ L を一定に保ちその幅 h を増せば solid web の柱ならば挫屈の抵抗力を幾何でも増大せしめ得る譯であるが骨組抗圧柱の場合には異なる。実際問題として斜材の角度を無闇に急にしたり又は斜材の断面積を大にした

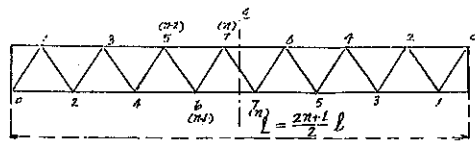
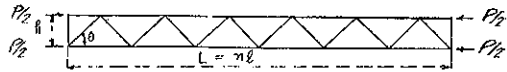
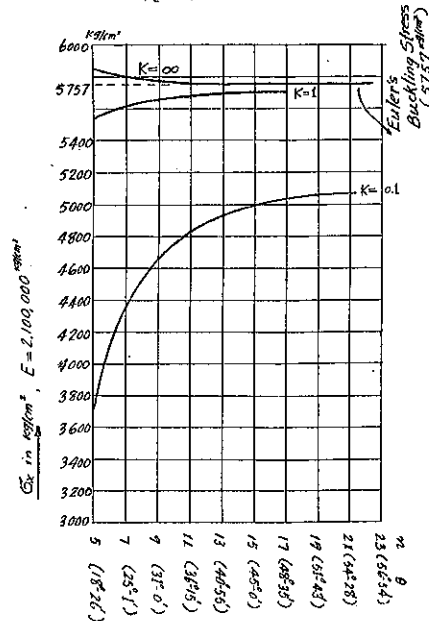


図-31.



h/L を一定に保ち n を変化せしむる場合
 $h/L = 1/30$ の場合



* 弾性限を 2 000 kg/cm² と假定す。

り出来ないから此處に述べるやうな傾向に就て考慮する必要がある。但し何回も繰返して述べる通り弾性限を超過した場合の考慮を入れぬと單なる計算の遊戯に終る恐れがある。

弾性破損式
$$\sigma_k = \frac{KE \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^2 \theta}$$

に於て n を一定數とし $\frac{d\sigma_k}{d\theta}$ を求めこれを零とおくと

$$2K \cos^2 \theta + \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right) \cos^2 \theta - \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right) = 0 \dots\dots\dots(51)$$

これを満足する $\cos \theta$ の値を求めると一定の格間數 n に對し最も強度大なる骨組の斜材角度を求め得る。

今 $n=5$ とし $K=0.1$ 及 0.5 とせば

次の2式を得る。

$$K=0.1 \quad 0.2 \cos^2 \theta + 0.0489435 \cos^2 \theta - 0.0489435 = 0$$

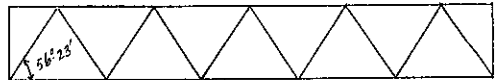
$$K=0.5 \quad \cos^2 \theta + 0.0489435 \cos^2 \theta - 0.0489435 = 0$$

これより $\begin{cases} K=0.1 \text{ のとき } \cos \theta = 0.5537 \quad \theta = 56^\circ - 23' \\ K=0.5 \text{ のとき } \cos \theta = 0.3503 \quad \theta = 69^\circ - 20' \end{cases}$

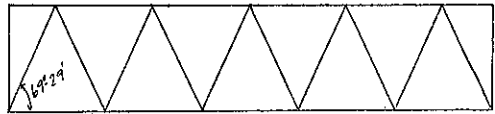
これを図示すると図-32 になる。

図-32.

格間數 $n=5 \quad K=0.1$



$n=5 \quad K=0.5$



第 4 章 弾性限を超えた場合の計算

(1) 總 説

(47) 式即ち第 1 種骨組に對し

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^2 \theta} \dots\dots\dots(47)$$

に於て σ_k の値が例へば 2000 kg/cm^2 を超えた場合には本公式は適用されない。

荷重がだんだん増加して來ると抗圧主部材は先づ弾性限を超え E に相當する係數は激減して E_p なる値を取る。而して抗圧柱の平衡が破れんとする際に於ても斜材には大した壓力は作用して居ないからこれは未だ弾性の範圍内にあると考へられる。

結局弾性限を超えた場合の計算としては抗圧柱全体の弾性係數が E より E_p に變つたと考へ、その代りに部材の斷面積の比 K を $K_p = K \times J/E_p$ として計算すればよいことになる。而して $E_p K_p = EK$ となるから

弾性限を超えた場合には

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{E}{E_p} K \cos^2 \theta} \dots\dots\dots(47a)$$

E_p : 弾性限を超えた場合の E に相當する値。

の如く分子はそのまゝにして分母の K に $\frac{E}{E_p}$ を乗ずればよい。

E/E_p の変化が知り得るならば σ_k を求め得る譯である。

これは實際に材料の応力歪圖を求めて決定せねばならない。然しこの変化を明確に 數量的に表した資料が餘りないのは遺憾である。

Madai 等の説によれば plastic な状態に於る計算は一種の理想的状態即ち stress-strain diagram 図-33 の如き直線に表して計算せよと云つてゐる。

然し stability を論ずる限りに於てはこれは非常に危険性がある。何となれば軟鋼に於ては 3000 kg/cm² 附近に於て E に相當する値が殆ど 0 に近い場合が存在し、抗圧柱としての生命はこの際に失はれるものと考へざるを得ないからである。

例へば Morley "Theory of structures" p. 37 にある図及 Ratzersdorfer の著書 p. 41 の図を下に掲げる。

図-33.

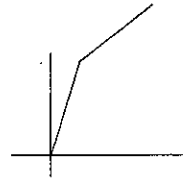
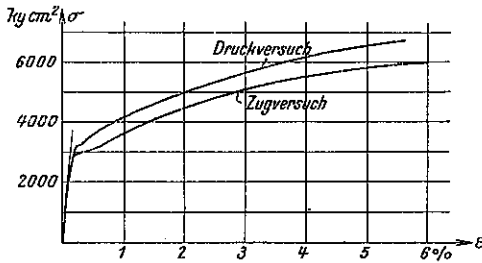


図-34.



此等はいづれも約 3100 kg/cm² 附近にて $E_p=0$ に近いことを示してゐる。

(2) 弾性限を超えた場合の挫屈応力の算定例

E/E_p の変化を表す關係が知れて居たとする。今 Bleich 著 "Theorie u. Berechnung der Eisernen Brücken" p. 130 にある Abb. 96 を見るに E_p/E を示す曲線がある (図-35 参照)。これを正しいものとすれば、これを方眼紙に plot して挫屈応力を求め得る譯である。図は Abb. 96 の縮尺を測定してこれを耗目の方眼紙に寫し代へたものである。

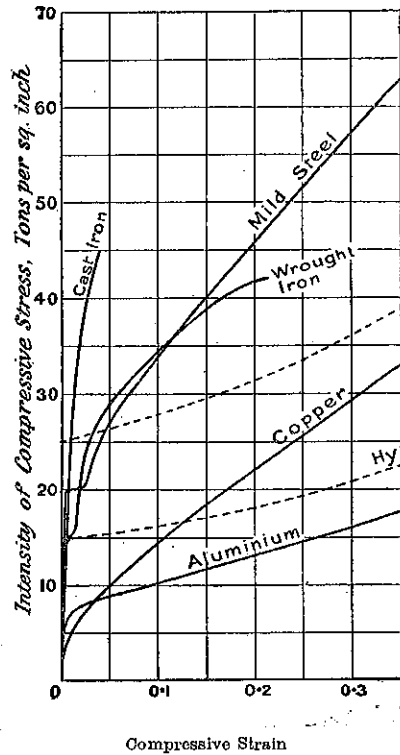
(47a) 式即ち

$$\sigma_k = \frac{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^3 \theta \cdot E/E_p} \quad \text{より}$$

$$E_p/E = \frac{\sigma_k \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) K \cos^3 \theta}{EK \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) - \sigma_k \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n}\right)} \quad \dots\dots\dots(47b)$$

σ_k の種々なる値に對して E_p/E の曲線を描きこれと 図-36. の E_p/E 曲線との交點を求むれば σ_k を求め得る。

図-35.



今 $K=1, \theta=45^\circ, n=10$ とせば

(47b) 式より $\sin^2 \theta \cos \theta = \cos^3 \theta = 0.35355,$

$\cos \frac{\pi}{2n} = 0.98769, E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$

$\frac{E_p}{E} = \frac{0.70275 K \sigma_k}{9\,141 K - \sigma_k \times 0.02447}$ を得る。

$K=1$ とせば

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_k = 2\,500 \text{ kg/cm}^2 \text{ のとき } E_p/E = 0.193 \\ \sigma_k = 2\,600 \text{ kg/cm}^2 \text{ のとき } E_p/E = 0.201 \end{array} \right.$

この2点を図上で結ぶと $\sigma_k \doteq 2\,570 \text{ kg/cm}^2$ を得る。

$n=10, \theta=45^\circ$ とは $h/J_1 = \frac{1}{20}$ 細長比 $\frac{h/2}{J_1} = \frac{1}{40}$

に相當する。

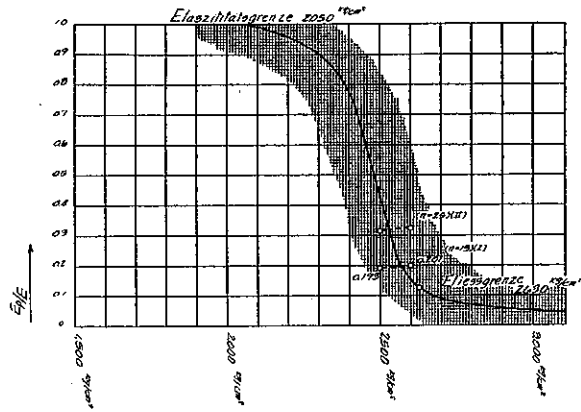
今上の結果を Tetmajer の公式即ち

$\sigma_k = 3.1 - 0.0114 \times \frac{l}{i} \quad \text{t/cm}^2$

に較べてみると $\sigma_k = 3.1 - 0.0114 \times 40 = 2.64 \text{ t/cm}^2 = 2\,640 \text{ kg/cm}^2$

となる。

図-36. 弾性係数の変化 E_p/E の示す表



第5章 第2種骨組の計算

(1) 總 説

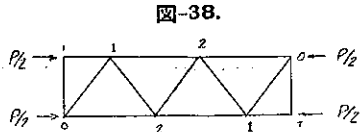
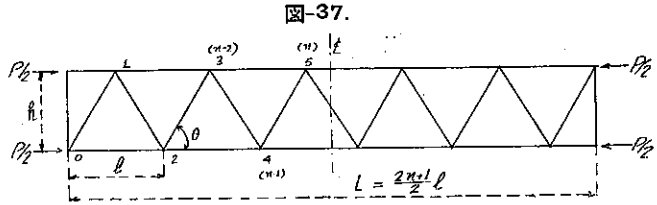
第2種骨組の計算にも前述の基本式が適用される。但図-37 にて $\eta_1 = -\eta_{10}, \eta_2 = -\eta_0$ 等のことを考へた上で中

表-3. n 奇数

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_{n-1}	η_n
1	$-4a + (3+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$				
2	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$4a - (2+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$			
3	$-\frac{\sigma_k}{E}$	$2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-4a + (2+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$		
4		$+\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$4a - (2+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$+\frac{\sigma_k}{E}$	
5			$-\frac{\sigma_k}{E}$	$+2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-4a + (2+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$+2a + 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$-\frac{\sigma_k}{E}$
6 ($n-1$)				$+\frac{\sigma_k}{E}$	$-2a - 2b \frac{\sigma_k}{E}$	$4a - (2+4b) \frac{\sigma_k}{E}$	$-2a - (1+2b) \frac{\sigma_k}{E}$
7 (n)					$-\frac{\sigma_k}{E}$	$2a + (1+2b) \frac{\sigma_k}{E}$	$-6a + (2+2b) \frac{\sigma_k}{E}$

但 $a = K \sin^2 \theta \cos \theta, b = K \cos^3 \theta$

心線から左半分の n 個の格点に就て式を作ればよい、基本式 (25), (26), (27) は適用されるが n 番目の式に於ては $\eta_n = -\eta_{n-1}$, $\eta_{n-1} = -\eta_{n+2}$ なることに留意する。かくして行列式を作れば表-3 を得る。



(2) 簡單なる場合の解法

例によつて行列式として簡單なる場合の解を求めこれを一般式にて

check してみる。

$n=2$ の場合

表-3 を参照し $\eta_2 = -\eta_0$, $\eta_1 = -\eta_3$ なることに留意し

$$D = \begin{vmatrix} -4a + (3+4b)\frac{\sigma_k}{E} & 2a + (1+2b)\frac{\sigma_k}{E} \\ -2a - (1+2b)\frac{\sigma_k}{E} & 6a - (2+2b)\frac{\sigma_k}{E} \end{vmatrix} = 0$$

これを展開して

$$(5+10b+8b^2)\left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^2 - (30a+40ab)\left(\frac{\sigma_k}{E}\right) + 20a^2 = 0 \quad \dots (52)$$

$$\text{但 } a = K \sin^2 \theta \cos \theta, \quad b = K \cos^3 \theta$$

後に一般式と較べるため取取ず $K=1$, $\theta=45^\circ$ とすると

$$\text{上式は } 9.5355 \left(\frac{\sigma_k}{E}\right)^2 - 15.6065 \left(\frac{\sigma_k}{E}\right) + 2.5 = 0$$

$$\frac{\sigma_k}{E} = 0.179$$

(3) 一般なる場合の解法

この場合も (35) 式即ち

$$\frac{\sigma_0}{E} y_{m-2} - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_{m-1} + \left\{4a - 2(1+2b) \frac{\sigma_0}{E}\right\} y_m - \left(2a + 2b \frac{\sigma_0}{E}\right) y_{m+1} + \frac{\sigma_0}{E} y_{m+2} = 0 \quad \dots (35)$$

が適用される。但 boundary condition としては y_n に関する部分が異なるのみである。即ち

$y_n = -y_{n+1}$, $y_{n-1} = -y_{n+2}$ なる 2 つの條件が異なるのみである。前と同様の手順を踏み、(35) 式の solution として與へらるゝ式の常數 A, B, C, D が ∞ となる條件として次の行列式を得る。

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ & \cos \alpha_1 & & & & & & \cosh \alpha_2 \\ & \cos \frac{2n+1}{2} \alpha_1 \cos \frac{\alpha_1}{2} & \sin \frac{2n+1}{2} \alpha_1 \cos \frac{\alpha_1}{2} & & \cosh \frac{2n+1}{2} \alpha_2 \cosh \frac{\alpha_2}{2} & \sinh \frac{2n+1}{2} \alpha_2 \cosh \frac{\alpha_2}{2} \\ & \cos \frac{2n+1}{2} \alpha_1 \cos \frac{3\alpha_1}{2} & \sin \frac{2n+1}{2} \alpha_1 \cos \frac{3\alpha_1}{2} & & \cosh \frac{2n+1}{2} \alpha_2 \cosh \frac{3\alpha_2}{2} & \sinh \frac{2n+1}{2} \alpha_2 \cosh \frac{3\alpha_2}{2} \end{vmatrix}$$

この行列式は明らかに

$$\sin \frac{2n+1}{2} \alpha_1 = 0 \quad \text{なるとき } \mathfrak{D} = 0 \quad \text{となる。}$$

$$\therefore \frac{2n+1}{2} \alpha_1 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$$

$\alpha_1 = 0$ のときは (39) 式より $\frac{\sigma_k}{E} = 0$ となりこれは根とは認め難い。*

依て α_1 の最小値として $\alpha_1 = \frac{2\pi}{2n+1}$

\therefore (39) 式より

$$\frac{\sigma_k}{E} = \frac{K \sin^2 \theta \cos \theta \left(1 - \cos \frac{2\pi}{2n+1}\right)}{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1}\right) K \cos \theta} \dots (53)$$

例によつて前に求めた結果と比較してみる。

今 $n=2, K=1, \theta=45^\circ$ とせば $\sin^2 \theta \cos \theta = \cos^3 \theta = 0.35355$

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} = \cos \frac{2\pi}{5} = 0.30902$$

$$\therefore \frac{\sigma_k}{E} = \frac{0.35355(1-0.30902)}{1-0.30902^2+1.30902 \times 0.35355} = 0.179$$

となり (52) 式の結果と一致する。

(4) 第 2 種骨組の性質に就て

第 2 種骨組は Euler の公式と比較すると $\sigma_k = 4\pi^2 E \left(\frac{r}{J}\right)^2$ 即ち 2 山の場合に當る。

Euler の公式を第 2 種骨組にあてはめると

$$\sigma_k = 4\pi^2 E \left(\frac{h/2}{J}\right)^2 = \pi^2 E \left(\frac{h}{J}\right)^2 = \pi^2 E \left[\frac{2h}{(2n+1)l}\right]^2 = \frac{\pi^2 E \tan^2 \theta}{(2n+1)^2} \dots (54)$$

今 $\theta=45^\circ, K=1$ として n の種々なる値に對し $\frac{\sigma_k}{E}$ を求めこれを Euler の値と比較してみる

この結果は第 2 種骨組は Euler の挫屈応力の第 2 次の形即ち $\sigma_k = 4\pi^2 E \left(\frac{r}{J}\right)^2$ に該當する譯であるから第 2 種骨組は第 1 種骨組に比して 4 倍も強いかといふに必ずしもそうではない。この計算は $E=2100000$

kg/cm² としての話してあつて実際にはそんな大きな差は無いのである。然し弾性の範囲内に於てはあくまでも約 4 倍の差があると認めざるを得ない。たとへば $n=50$ の場合には $\sigma_k = 0.000941 \times 2100000 = 1976 \text{ kg/cm}^2$ となり明らかに弾性の範囲内にある。 $n=50$ といふと $\theta=45^\circ$ の場合は $h/J = 0.5/50.5 = 1/101$ 細長比にして $1/2(2$ といふ極端な場合である。かかる状態に於ては第 2 種骨組は第 1 種骨組の 4 倍の強度を有する筈である。

實際問題として弾性限を超えた場合の計算をしてみても第 1 種荷重と挫屈応力に於てどの位の差があるかを比較してみよう。

第 5 章に説いた方法によつて E_n/E 曲線 (圖-36) を利用して挫屈応力を求めてみる。

* $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$ の場合は別なり

圖-39.

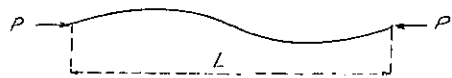


表-4. $\frac{\sigma_k}{E}$ の値

n	15	20	25	50
Euler	0.0107	0.00587	0.00379	0.000967
本公式	0.00978	0.00571	0.00373	0.000941

第 2 種骨組に於て $n=25, K=1, \theta=45^\circ$ とせば $E=2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$ として計算すると表-4 によりて

$$\sigma_k = 0.00373 \times 2\,100\,000 = 7\,833 \text{ kg/cm}^2$$

といふ馬鹿げた値を得。

今第 5 章と同様にして

$$\frac{E_p}{E} = \frac{\sigma_k \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1}\right) K \cos^3 \theta}{EK \sin^2 \theta \left(1 - \cos \frac{2\pi}{2n+1}\right) - \sigma_k \left(1 - \cos^2 \frac{2\pi}{2n+1}\right)} \dots\dots\dots (53a)$$

$n=25, \theta=45^\circ, K=1$ とせば

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{2n+1} &= \cos \frac{2\pi}{51} = 0.99240 \\ \sin^2 \theta \cos \theta &= \cos^3 \theta = 0.35355 \end{aligned} \right\} \text{ 故}$$

$$\frac{E_p}{E} = \frac{0.70441 \sigma_k}{5\,640 - 0.01514 \sigma_k}$$

$$\sigma_k = 2\,500 \text{ kg/cm}^2 \text{ とせば } E_p/E = 0.314$$

$$\sigma_l = 2\,600 \text{ kg/cm}^2 \text{ とせば } E_p/E = 0.326$$

図-39 の曲線との交りを求めると $\sigma_k \doteq 2\,530 \text{ kg/cm}^2$ を得る。

第 1 種骨組に於ては $n=25$ のとき $\sigma_k = 2\,060 \text{ kg/cm}^2$ である。即ち $n=25$ の場合第 2 種骨組は 1/2 格間長だけ長いがなほ 20% 約強度が大である。即ち第 2 種の方が強いには相違ないが 4 倍などといふ猛烈な差でないことが判る。

第 6 章 結 尾

本論は非常に ideal な case を取り扱つたものであり、この結果より直に實際問題に就て断定的な意見を下す譯には行かない。特に lacing bar の如き極端なる特例には餘程注意しないと過誤に陥る恐れがある。又實際の抗圧柱として多くは弾性の限界以上の挫屈を考へねばならぬ。この場合の計算の精度は係つて E_p/E の変化を明確にすることにある。然しこれは仲々に測定困難な問題であり充分なる研究並に計測を要すると思ふ。

* 表-2 参照