

論 説 報 告

第 24 卷 第 3 號 昭和 13 年 3 月

兩端固定せる鋼柱が偏心荷重を受ける場合の弾性破損

會員 結 城 朝 恭*

要旨 柱軸の當初に於ける曲り量が、柱の弾性限以内に於ける諸現象並に弾性破損に如何なる影響を及ぼすかを兩端固定されたる鋼柱に就て、特に 1 山の曲りを有する場合の論究は本會誌第 23 卷第 1 號で試みたのであるが、更に柱軸が當初に於て 2 山の曲りをなす場合に就て論究を試み、前者と共に一般の現象の一部に資せんとしたものである。

緒 言

柱軸が當初から或る 2 山の曲りを持つ際に、其の曲り量が弾性破損並に諸現象に如何なる影響を與ふるかを考察する。本論文では假りに柱軸が當初に $c \sin 2\pi\xi$ なる正弦曲線形並に其の x 軸を任意量 z ($z < c$) だけ移動したる際の曲線形 $\xi + z$ 即ち $2c \sin \pi\xi \cos(\pi\xi - \nu)$ の曲りを有する兩端固定の均一直断面の鋼柱が偏心荷重を受ける場合の弾性破損並に諸現象に就て論究を試みやうとする。但しことは図-1 で示してあるが、この場合、 $\xi \equiv c \sin(2\pi\xi - \nu)$ にして、尚 $\xi = x/l$, $\sin \nu = z/c$, c = 任意量、但し $\pi/2 \geq \nu \geq -\pi/2$ とする。

A. 柱の曲り並に曲げモーメント

柱軸が 1 山の曲りをなす場合に論究したると同様に、柱軸の曲り及荷重は直断面の重心に於ける慣性モーメントの 1 主軸及柱軸を含む平面内にある場合を論ずる。図-1 に於て曲線 ACB は加重前の柱軸にして、 $\xi + z$ 即ち $2c \sin \pi\xi \cos(\pi\xi - \nu)$ は前述の如く直線 AB に對して柱軸のなす曲り量を示す。AC'B' は加重後の柱軸、W' は荷重、θ は荷重力線の AB となす傾き、L は柱の兩端間隔、a, b は兩端に於ける荷重の偏心量にして、其の大なる方向を a と置き、兩端偏心が柱軸に對して、同じ側にある時は、a, b を共に正量にとり、反対側にある時は a を正量、b を負量にとるものと心得る。l は AB の長さ即ち柱長にして $L \sec \theta$ である。 x は任意直断面の A 端からの距離、y は図-1 に示せる如く該直断面の変位とする。今図の如く荷重 W' が作用する時には、A₀A₁ 端に於て、壁に D, E なる反力を受ける。即ち直線 A₀A₁ に直角に作用する 1 つの反力を曲げモーメントを受けるのであるが、取扱の便宜上、これを A₀ 端に移し、力線に直角の方向に作用する反力を R_{A0} と抵抗曲げモーメント M_{A0} とで示す。B 端に於ても同様の關係が述べられる。

設て當初並に加重後の柱軸即ち ACB 及 AC'B' が僅少なる曲りを有する場合は、換言せばそれらの曲率 κ, κ' が充分小なる場合には一般に次式が成立する。

$$\kappa' - \kappa = d^2y/dx^2 = -M/EI \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

柱軸上の任意點 C' に於ける曲げモーメント M_{C'} は、

$$M_{C'} = W \{(y + \xi + z) \cos \theta + a - x \sin \theta\} + R_{A0} \{(y + \xi + z) \sin \theta + x \cos \theta\} - M_{A0}$$

図-1. 柱の曲り

* 仙臺高等工業学校教授 工学士

$$\text{但し } P_1 \equiv W \cos \theta + R_{A_0} \sin \theta, \quad Q \equiv W \sin \theta - R_{A_0} \cos \theta, \quad M_{A_0'} = M_{A_0} - W_a$$

(1) 式に (2) 式を用ひて之を解けば、任意直断面が受ける変位 y は (3) 式で示される。

但し A, B : 積分常数, $\rho = l\sqrt{P_0/EI}$

I: 柱直断面の重心に於ける慣性モーメント中並びに直角なる主軸に就ての慣性モーメント

(3) 式に柱の両端条件、即ち $\xi=0$ 及 $\xi=1$ に於て y 及 $dy/d\xi$ が何れも零であることの條件を適用して、下記の式が得られる。

$$\xi = 1, \quad dy/d\xi = 0 : \quad A p \sin p - B p \cos p - Q l / P_1 = u \varepsilon p^2 / 2\pi \quad \dots \dots \dots \quad (4_{iv})$$

$$\text{但し } u \equiv 4\pi^2/(4\pi^2 - p^2), z_1 = e \cos \nu$$

従つてこれらの諸式より、

$$(4_v) \quad x \cdot y = \sin p \left(A \tan \frac{1}{2}p - B \right) - Ql/P_1 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (4'v)$$

而して $A \tan \frac{1}{2}p \neq B$ なる故に (4'v), (4'vi) 式より $A \tan \frac{1}{2}p - B$ を消去すると

$$p \left(\cot \frac{1}{2} p \right) Ql/P_1 - 2 Ql/P_1 = uz_1 p^2/\pi \quad \text{but } \sin p \neq 0$$

故に

但 $\lambda_1 = \mu \pm 0$

依つて下記 3 つの場合が論究される。

(a) $\sin p \neq 0$ にして且つ $\tan \frac{1}{2}p \neq \frac{1}{2}p$ なる場合: この際は (4 vii) より,

$$\text{但し } k = z_1/l = (c/l) \cos \nu.$$

(4ai) 式を (4iii) 式に用ひて、

(4_r) 式に (4_{alti}) 及 (4_{ni}) 式を用ひて、

$$A(1-\cos p) = -(uz_1 p/\pi) \left\{ 1/2 + 1/\left(\cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p}\right)p \right\} \sin p + uz_1 p/\left(\cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p}\right)\pi$$

この式を書き替へて、

(4i) 式に (4aiii) 式を用ひて、

$$M_{A_0'}/P_1 = u z - A \\ = u z - (u z, p/\pi) \left(\cot \frac{1}{2} p \right) \left\{ -1/2 + (1/\sin p - 1/p) / \left(\cot \frac{1}{2} p - 2 \frac{1}{p} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (4_a \text{ iv})$$

然るに $M_{A_0} - W\alpha = M_{A_0'}$ なる故に、

$$M_{A_0}/P_1 = W\alpha/P_1 + u\varepsilon - (u\varepsilon_1 p/\pi) \left(\cot \frac{1}{2}p \right) \left\{ -1/2 + (1/\sin p - 1/p) \right\} \left(\cot \frac{1}{2}p - 2 \frac{1}{p} \right) \quad \text{(4' a iv)}$$

i) R_{t_0} : $Q \equiv W \sin \theta - R_{t_0} \cos \theta$ より,

$$R_{A_0} = W \tan \theta - Q / \cos \theta = W \tan \theta - P_1 u k p / \pi \left(\cot \frac{1}{2} p - 2 \frac{1}{p} \right) \cos \theta$$

$$= W \tan \theta - (W \cos \theta + R_{A_0} \sin \theta) u k p / \pi \left(\cot \frac{1}{2} p - 2 \frac{1}{p} \right) \cos \theta$$

$$\text{故に } R_{A_0} \left\{ 1 + u k p \tan \theta \middle| \pi \left(\cot \frac{1}{2} p - 2 \frac{1}{p} \right) \right\} = W \left\{ \tan \theta - u k p \middle| \pi \left(\cot \frac{1}{2} p - 2 \frac{1}{p} \right) \right\}$$

$$\text{従つて } R_{A_0} = \frac{1}{2}(\tan \theta - \tan \varphi) / (1 + \tan \theta \tan \varphi)$$

$$R_{A_0} = W \tan(\theta - \varphi)$$

ii) $P_1 : P_1 \equiv W \cos \theta + R \sin \theta$ より,

$$P_1 = W \{ \cos \theta + \tan(\theta - \varphi) \sin \theta \} = W \left\{ \cos \theta + \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)} \sin \theta \right\}$$

$$= W \cos \varphi / \cos(\theta - \varphi)$$

iii) M_{A_0}/P_1 : 上記 P_1 を (4'a) 式に用ひて,

(b) $p = 2\pi$ 従つて $\sin p = 0$ なる場合:

(4') 式より $Q=0$ (4b1)

今 ν を実際的に 2π と見做す場合を考察せば、 $P=2\pi-4p$ 、但し $4p \equiv 0$ より、 $\nu \equiv \pi/4p$ にして、

これらの値を(3)式に用ひると

$$\frac{y}{p \equiv 2\pi} \cong (1/\mathcal{A}p) \{ (2\pi z_1/\mathcal{A}p)(\cos p\zeta - 1) - \pi z_1 \sin p\zeta + (\zeta + z)(\pi - \mathcal{A}p) \} - \pi z_1/3(\cos p\zeta - 1)$$

即ち $y_{p \rightarrow 2,} \equiv \infty$

同様にして

$M_{C_{\nu}, 2\pi} \cong \infty$ となる。

(c) $\tan \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$ なる場合: (4n+1) 式より,

$$QI/P_1 = \infty$$

但し $t \neq \infty, P_1 \neq 0$

従つて (4iii) 式より, $B = \infty$ (4iii)

故に(4v)式より、 $A = \infty$ (4vi)

従つて (4) 式より, $M_{A_0'}/I_1 = \infty$ (4civ)

依て、この場合は柱軸の曲り y 並にその曲げモーメント M は ∞ となる。この際の p (従つて荷重 W) の値は 2π 以上の或る特定値であることも明らかである。

總括：茲に上述の場合を纏めて論ずる。(a)の場合, p は $2\pi \geq p \geq 0$ に於ける任意値に適用される。その他の場合は、 p の特定値の場合である。その中で (b) [即ち $p \cong 2\pi$] の場合に於ける p は (a) の場合の p に含まれて居り、(c) [即ち $\tan \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$] なる場合の p は (a) の場合外に於ける特定値の場合である。而して (b) なる場合の p の特定値では柱軸の曲り γ 及曲げモーメント M が ∞ になる。この (b) の場合に關しては後記 c₂ (iii) で詳論する。倘 (c) なる場合は實際には起り得ない事が後記 c₂ (iii) で論究してある。即ち p の彈性限以内の値としては $p \neq 2\pi$ なることから明らかである。之を要するに p (従つて荷重 W) の任意値に對して考究する爲には (a) の場合だけを論すればよい事になる。従つて以下 (a) の場合に就て論究を試みる。

従て上記(3)式に(4a_i), (4a_{ii}), (4a_{iii}), (4a_{iv})式の Q/P_1 , A , B 並に M_{A_0}/P_1 の値を用ふれば、柱の曲り γ を示す式は下記(5)式の如くになる。

$$y = \alpha \frac{\cos p\xi - \sin p\xi \cot \frac{p}{2} - 1 + 2\xi}{\left(\cot \frac{p}{2} - \frac{2}{p} \right)} + p^2(z + \xi)/(4\pi^2 - p^2) \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$\text{但し } \alpha \equiv (2\pi cp \cos v) / (4\pi^2 - p^2)$$

この(5)式は柱軸が當初に有する曲り c が絶對零なる柱、即ち真直なる柱に於ては、荷重偏心量の如何に拘らず常に変位 y が零となりて、曲りが起らないことを告げてゐるが、實際的には柱軸は當初に微小なりとも曲り c を有するから変位 y が p 即ち W の作用に依つて必ず生ずることは 1 山の際に述べたことと同じである。

(5) 式より $p = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{35}{18}\pi$ の場合に就て y/c ～ θ 關係を計算せば図-2 の如くになる。

柱軸が最初に 2 山の曲りを有する際には、これを [a] 全く相等しき 2 つの曲線形、[b] 相異りたる 2 つの曲線形を有する 2 つの場合に分けて考へると、[a] では p (従つて荷重) に依て 2 つの山形が反対方向に相等しき変位を常に生じ、柱の中央では変位及曲げモーメントが常に零である。[b] では p の或る値以内にありては、 p の増すに従つて何れの山形も増大するが、 p がその値以上に達する際は p が増大するに従つて、大きな山形の部分は漸次大きくなるが、小なる山形の部分は反対に次第に小さくなつて、結局柱軸は全体として大きな山形に従つて漸次曲るに至ることが考察される。而して [a] は實在性零にして、現實的には [b] だけが實在可能である。

今柱の両端附近に於ける曲りを計算せば (5) 式に於て $\xi_1 = 4\xi$, $\xi_2 = 1 - 4\xi$ と置き、夫々下記の如く求まる。

$$y_{\xi=0} \cdot d\xi \cong \{ \pi p^2 c A \xi^2 / (4\pi^2 - p^2) \} \left\{ 2\pi \sin \nu - p \cos \nu / \left(\cot \frac{1}{2} p - \frac{1}{p} \cdot 2 \right) \right\}$$

$$y_{\xi=1-d\xi} \cong \{ \pi p^2 c A \xi^2 / (4\pi^2 - p^2) \} \left\{ 2\pi \sin \nu + p \cos \nu / \left(\cot \frac{1}{2} p - \frac{1}{p} \cdot 2 \right) \right\}$$

然るに今の場合 ($p > 2\pi$, 常に $4\pi^2 - p^2 > 0$, $\cot \frac{1}{2} p - \frac{1}{p} \cdot 2 < 0$)

なる故に,

(a) の場合 : $y_{\xi=0} \cdot d\xi > 0, y_{\xi=1-d\xi} < 0$

(b) の場合 : $y_{\xi=0} \cdot d\xi > 0, y_{\xi=1-d\xi} \geq 0$

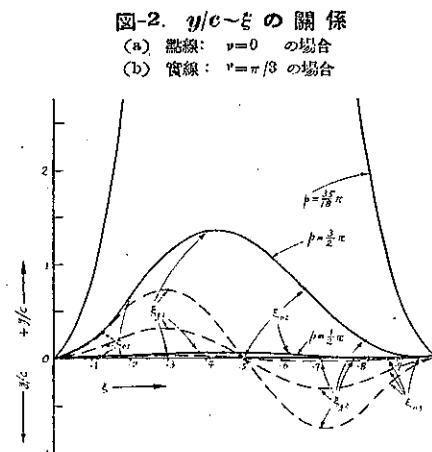
である。

尙図-2 に示せる場合 (b) の $y \sim \xi$ 曲線の両端に於ける曲率

は (5) 式より容易に下記の如くに求まる。

$$[d^2y/d\xi^2]_{\xi=0} = \{ (4\pi c p^2 \cos \nu) / (4\pi^2 - p^2) \} \left\{ \pi \tan \nu - \frac{1}{2} \cdot p / \left(\cot \frac{1}{2} p - \frac{1}{p} \cdot 2 \right) \right\} > 0$$

$$[d^2y/d\xi^2]_{\xi=1} = \{ (4\pi c p^2 \cos \nu) / (4\pi^2 - p^2) \} \left\{ \pi \tan \nu + \frac{1}{2} \cdot p / \left(\cot \frac{1}{2} p - \frac{1}{p} \cdot 2 \right) \right\} \geq 0$$



B. 弾性限界内に於ける最大曲げモーメント

(2) 式に (3), (4a(i)) 並に (4a(ii)) 式の y, A 並に B' の値を用ひて、柱の任意直断面が受ける曲げモーメント M は下記 (6) 式で示される。

$$M = c P_1 \psi$$

$$\text{但し } \psi \equiv \{ 4\pi^2 / (4\pi^2 - p^2) \} \left[\sin(2\pi\xi - \nu) + \frac{p \cos \nu}{2\pi \left(\cos \frac{p}{2} - \frac{2}{p} \sin \frac{p}{2} \right)} \left\{ \frac{\cos p\xi}{\sin \frac{p}{2}} - \left(\cos \frac{p}{2} \right) \left(\cos p\xi \cot \frac{p}{2} + \sin p\xi \right) \right\} \right] \quad \dots \dots \dots (6)$$

図-3. (a) $M/P_1 c \sim \xi$ の関係
($\nu=0$ なる場合)

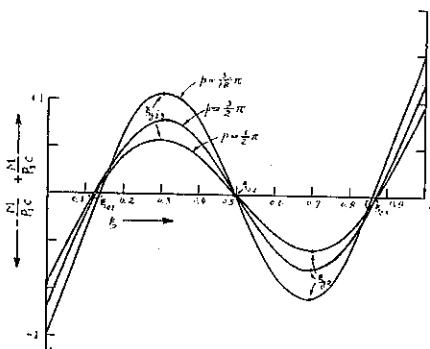
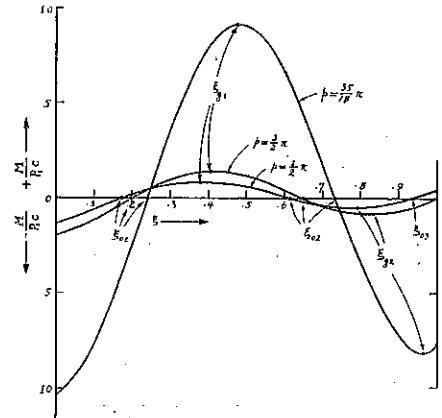


図-3. (b) $M/P_1 c \sim \xi$ の関係
($\nu=\pi/3$ なる場合)



(6) 式より $M \sim \xi$ の関係を $p = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{18}\pi$ の場合に就て計算すると図-3 (a), (b) の如くになる。

柱の両端断面に於ける曲げモーメント M を $p \equiv Ap$ の場合に就て計算する。

(1) $\xi=0$ の断面:

$$\psi_{\xi=0} = \{4\pi^2/(4\pi^2-p^2)\} \left\{ p \cos \nu / 2\pi \left(\cot \frac{1}{2}p - \frac{2}{p} \right) - \sin \nu \right\}$$

而して $\left(\cot \frac{1}{2}p - \frac{2}{p} \right)_{p \approx Ap} \approx -\frac{4p}{6 - \frac{1}{4}Ap^2}$

従つて $\psi_{(\xi=0, p=Ap)} \approx -\left(\frac{4\pi^2}{4\pi^2-4p^2} \right) \left(\sin \nu + \frac{6-(Ap/2)^2}{2\pi} \cos \nu \right)$

従つて $\psi_{(\xi=0, \nu=0)} \approx -\frac{2\pi}{4\pi^2-4p^2} \left(6 - \frac{Ap^2}{4} \right)$

依て一般に $M_{(\xi=0, p=Ap)} \approx -cP_1 \left(\frac{4\pi^2}{4\pi^2-4p^2} \right) \left(\sin \nu + \frac{6-(Ap/2)^2}{2\pi} \cos \nu \right)$

但し $P_1(p=Ap) \approx W \cos \varphi / \cos(\theta-\varphi) \approx W / \left\{ \cos \theta - \sin \theta \cos \nu \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{4\pi(6-Ap^2/4)}{4\pi^2-4p^2} \right\}$

$$P_1(p=Ap) \approx W / \left\{ \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{4\pi(6-Ap^2/4)}{4\pi^2-4p^2} \right\}$$

にして、A 端断面では $p \approx 0$ の場合には常に負の曲げモーメントを示してゐる。

(2) $\xi=1$ の断面:

$$\psi_{\xi=1} = \{4\pi^2/(4\pi^2-p^2)\} \left\{ -\sin \nu - p \cos \nu / 2\pi \left(\cot \frac{1}{2}p - \frac{2}{p} \right) \right\}$$

而して $p \equiv Ap$ の場合には、前と同様に

$$\psi_{(\xi=1, p=Ap)} \approx \{4\pi^2/(4\pi^2-p^2)\} \left(-\sin \nu + \frac{6-(Ap/2)^2}{2\pi} \cos \nu \right)$$

従つて $\psi_{(\xi=1, \nu=\pi/3, p=Ap)} \approx \left(\frac{4\pi^2}{4\pi^2-4p^2} \right) \left\{ -1/2 + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left(6 - \frac{1}{4}Ap^2 \right) \right\}$
 $\approx \left(\frac{2\pi}{4\pi^2-4p^2} \right) \left(3^{3/2} - \frac{\sqrt{3}}{8} Ap^2 - \pi \right)$

依て $M_{(\xi=1, p=Ap)} \approx cP_1 \left(\frac{4\pi^2}{4\pi^2-4p^2} \right) \left(-\sin \nu + \frac{6-4p^2}{2\pi} \cos \nu \right)$

にして、 $M_{(\xi=1, p=Ap)} \approx cP_1 \left(\frac{2\pi}{4\pi^2-4p^2} \right) \left(6 - \frac{1}{4}Ap^2 \right)$ にして、 $\nu=0$ の場合 $0 \leq p \leq 2\pi$ に於て、B 端断面に於ける曲げモーメントは常に正号であることを告げてゐる。而して前述せし如くに、 $\nu=0$ の場合 (図-3 (a)) は、實在性零である。

尙 $M_{(\xi=1, p=Ap)} \approx cP_1 \left(\frac{2\pi}{4\pi^2-4p^2} \right) \left(6 - \frac{1}{4}Ap^2 \right)$ にして、 $\nu=0$ の場合 $0 \leq p \leq 2\pi$ に於て、B 端断面に於ける曲げモーメントは常に正号であることを告げてゐる。而して前述せし如くに、 $\nu=0$ の場合 (図-3 (a)) は、實在性零である。

扱て柱軸の 2 つの山の大きさが相異なる場合には、図-3 (b) ($\nu=\pi/3$ の場合) に示せるが如く、柱の A 端断面 ($\xi=0$) では、常に $-M$ を生じ、断面が柱中に中央に進むに従つて、この $-M$ は次第に減少し、 $\xi=0.2$ 附近の断

面位置 (p の値の大小に従つて異なるものであるが) に於て M が零となり, それより中央に進むに従つて $+M$ は次第に増大して $\xi=0.4 \sim 0.5$ 附近で $+M_{\max}$ を生じ, 更に上方に進むに従ひ, この $+M$ は次第に減少して, $\xi=0.6 \sim 0.7$ 附近で, 再び M が零となり, それより上方断面には再び $-M$ を生ずる。上方 B 端断面 ($\xi=1$) では, p の値が或る値以下にありては, $+M$ を生じ, p がそれ以上にある場合は, こゝに $-M$ を生ずる。

之を要するに、 p の値が次第に増すに従つて、曲げモーメント M が零となる断面位置 ξ_0 は次第に上方断面に移り、B 端断面に於ける M は正より負に移る。又 p の値が増すに従ひ、 M_{\max} 値も次第に増大し、それらの生ずる断面位置 ξ_{01} は柱の中央に、 ξ_{02} は柱の上端 B 断面に近づく。従つて大きな山形の部分は漸次大きくなるが、小なる山形の部分は反対に次第に小さくなりて、結局柱軸は全体として、大きな山形に従つて漸次曲るに至ることが図-3 (b) からも考察される。

柱軸の曲りが全く相等しき 2 つの山形（絶対値相等しく符号相反する図-3 (a)）をなす場合には、A 端断面では $-M$ を生じ、 $\xi \equiv 0.125$ 断面に於ては、 M が零にして、それより上方断面では $+M$ を生じ、 $\xi \equiv 0.3$ 断面に至れば $+M_{\max}$ を生ずる。

柱の中央断面では p の値の如何に拘らず M は常に零である。更に $\xi \approx 0.7$ 断面に至れば $-M_{max}$ を生じ、この絶対値は $+M_{max}$ のそれに等しい。 $\xi \approx 0.875$ 断面近くに於ては、三度 M が零となり、B 端断面 ($\xi=1$) に於ては $+M$ を生じ、その絶対値は A 端断面に於けるものと等しい。上記を換言せば柱中詔断面に生ずる M の値は、柱の中央に對して對稱的にして、たゞ符號が相反するのみである。然れども柱軸の曲りがその絶対値等しく符號が相反する 2 つの山形をなす場合は實在性零なる故に、實際には 2 山の中で大なる山形の方に於て生ずる $+M_{max}$ は、小さい山形の方に於て生ずる $-M_{max}$ より常に大である。

次に最大曲げモーメントの生ずる断面の位置 ξ_g 並にその値 M_g は (6) 式より下記の如くに求まる。即ち $d(M/P_1)/d\xi = 0$ より、

$$\frac{4\pi^2 \cos(2\pi\xi_g - \nu)}{\sin \frac{p}{2} \sin p\xi_g + \cos \frac{p}{2} \cos p\xi_g} = \frac{p^2 \cos \nu}{\cos \frac{p}{2} - \frac{2}{p} \sin \frac{1}{2}p} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

(7) 式の左邊は p, ξ_0 の、右邊は p のみの函数であるから p をパラメーターとして図式解法を行ふことによりて、同式を満足する $p=\xi_0 p_1, p=\xi_0 p_2$ の關係が求まり、図-4 に示すが如くである。

図-4 より下記が考察される。

大なる山形に於て $+M_{\max}$ の生ずる断面位置 ξ_{01} は $p \equiv 0$ にありては、 $\xi_{01} \lesssim 0.3$ にして ($\nu = \pi/3$ の場合 $\xi_{01} \approx 0.376$)、 p が増すに従つて次第に ξ_{01} の値は増大して、 $p = 2\pi$ の時、 $+M_{\max}$ は柱の中央断面 ($\xi_{01} = 0.5$) で生ずる。

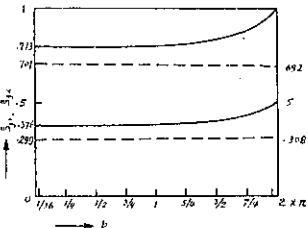
小なる山形に於て $-M_{\max}$ の生ずる断面位置 ξ_{02} は $p \equiv 0$ にありては、 $\xi_{02} \gtrsim 0.7$ にして ($\nu = \pi/3$ の場合 $\xi_{02} \approx 0.793$)、 p が増すに従つて次第に増大して、 $p = 2\pi$ の時、 $-M_{\max}$ は柱の上端断面 ($\xi_{02} = 1$) で生ずる。2 山が絶對に相等しき場合 ($\nu = 0$) は、 $0 < p < 2\pi$ に於て常に $\xi_{01} = 0.3$ 、 $\xi_{02} = 0.7$ である。

$p \cong 2\pi$ の場合に於て M_g の生ずる柱中の断面位置に就て論究すると、 $[d(M/P_1)/d\xi] = 0$ 或は $2\pi \cos(2\pi\xi - \nu) - (p^2/4\pi^2) \cos\nu \cos p\xi = 0$ なる式に於て $p = 2\pi - t$ 但し $t \cong 0$ と置けば、 $\sin 2\pi\xi \sin \nu = 0$ を得。然るに $\sin \nu \neq 0$ であるから $\sin 2\pi\xi = 0$ である。依て $\xi = 0, 1/2, 1$ となり、 $p \cong 2\pi$ の時は M_g は柱の両端と中央断面とで生ずることが判る。

図-4. $p \sim \xi_{01}$, $p \sim \xi_{02}$ の関係

(a) 點線 $v=0$ の場合

(b) 實線 $\nu = \pi/3$ の場合



曲げモーメントが零なる柱中の断面位置 x_0 を求めるには、 $M=0$ なる条件より、

$$\begin{aligned} & \sin(2\pi\xi - \nu) / \left\{ \frac{\cos p\xi}{\sin \frac{1}{2}p} - \cos \frac{1}{2}p \cdot (\cos p\xi \cot \frac{1}{2}p + \sin p\xi) \right\} \\ &= \frac{p \cos \nu}{2\pi \left(\frac{1}{p} 2 \sin \frac{1}{2}p - \cos \frac{1}{2}p \right)} \end{aligned}$$

図-5 は上式より計算したる p ~ σ_0 の関係を示してゐる。

同図に依れば、 $M=0$ の生ずる断面は 3 個所あるが、その内 1 個所を示す
断面位置 (ξ_{03}) は $0 < p < 2\pi$ 即ち $p \approx 1.424\pi$ で $\xi_{03}=1$ となる。

従つて $p \approx 2\pi$ の時、 $M=0$ の生ずる断面は 2 個所だけとなる。

この現象より大きな山形は次第に大きくなり、小さき山形は次第に小さく、即ち柱全体としては p が増すに従ひ次第に大きな山形に従つて曲らんとすることが判る。

(6)式に(7)式より得たる ξ_m , ξ_n を用ひて、柱中に於て生ずる最大曲げモーメント M_g を計算するを得。即ち

但し φ_0 は φ 式に於て $\xi = \xi_{01}, \xi_{02}$ と置きたる場合の値。

C. 弾性限點に於ける荷重

柱の彈性限點では、即ち柱中に起る最大圧縮応力値が材料の単純圧縮彈性限應力 σ_e に達する時は、周知の如く下記式が得られる。

但し A : 柱直断面の面積, P_i : 柱軸に沿うて働く圧縮力 = $\frac{W \cos \varphi}{\cos(\theta - \varphi)}$

$2h$: 柱直断面の曲げ平面内の厚さ,

I: 柱直断面の重心に於ける慣性モーメント中曲げ平面に直角な主軸に就ての慣性モーメント

(9) 式に (8) 式を用ひて、

$$P_1/A + P_1 c h \Psi_g/A i^2 = \sigma_t$$

之を書き替へて、

四七

但し $\sigma_m = P_i/A$: 平均圧縮応力, $i = \sqrt{I/A}$: 直断面の回転半径,

$$\sigma_m/E = e_m: \text{平均压缩率}, p = (l/i)\sqrt{e_m}$$

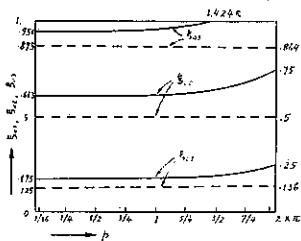
$$Y_p = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 - p^2} \left[\sin(2\pi\xi_0 - \nu) + \frac{p \cos \nu}{2\pi \left(\cos \frac{1}{2}p - \frac{2}{p} \sin \frac{1}{2}p \right)} \left(\frac{\cos p \xi_0}{\sin \frac{1}{2}\nu} \right) \right]$$

$$-\cos \frac{1}{2} p \cdot \left(\cos p \xi_g \cot \frac{1}{2} p + \sin p \xi_g \right) \Big] \dots \dots \dots \quad (12)$$

にして、上記(11)式より、任意の θ に對して $\sigma_m \sim ch/r^2 - l/i$ の關係を計算するを得、而して σ_m (或は ν) な

図-5. ρ ～ δ_0 の関係

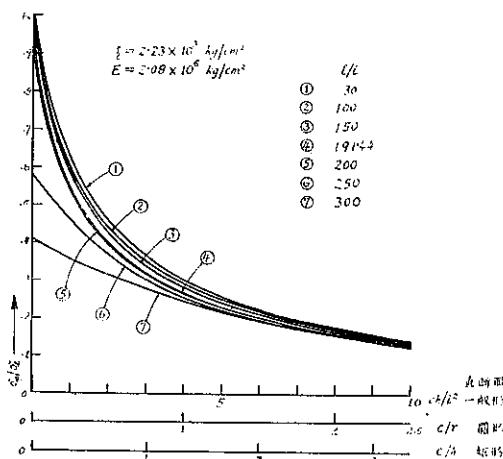
(a) 點線: $v=0$ の場合
 (b) 實線: $v=\pi/3$ の場合



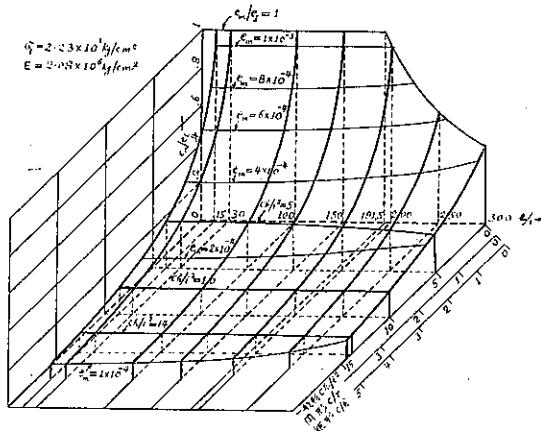
る量) が上記式の値をもつ時、柱は弾性限點に達する。 σ_m のこの値と ch/i^2 との関係は 図-6(a₁), (a₂), (b₁), (b₂) が示す通りである。

圖-6

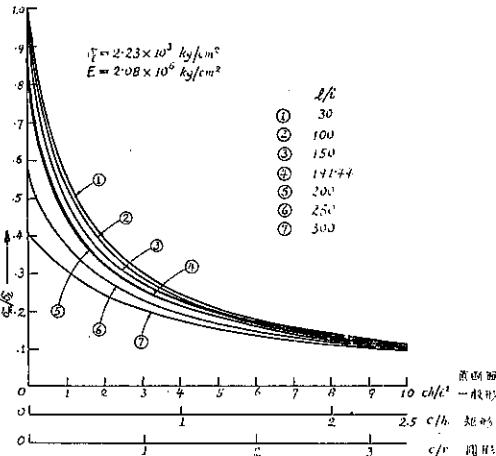
(a₁) 弾性限荷重～ cl/i^2 の関係 ($\nu = 0$)



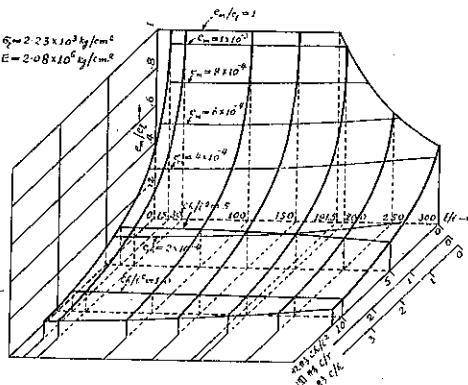
(a₃) 弾性限荷重～ $ch/i^2 \sim l/i$ の関係 ($\nu = 0$)



(b₁) 弾性限荷重～ ch/i^2 の関係 ($\nu = \pi/3$)



(b₂) 弾性限荷重～ $ch/i^2 \sim l/i$ の関係 ($\nu = \pi/3$)



C₁. 微小偏心に於ける弾性破壊

前節では偏心量を必ずしも、微小ならずとして、柱の弾性破損を論じたが、本節では偏心量が微小と考へられる際の同破損を特に論じようとする。荷重 W が柱軸となす角 θ が微小の場合、

$$P_1 = W \cos \varphi / \cos(\theta - \varphi) \cong W$$

にして、本節の場合 P_i, W は同一量と見做され得る。

次に $\sigma_m = P_l/A$ を W/A と見做す場合の誤差は何程であるかを述べる。試みに $\tan \theta = (a-b)/l$ が $1/100, 3/100, 5/100$ なる場合に就て、 $c/l = 1/1000, p = \frac{3}{2}\pi$ の際に、 $\cos \varphi / \cos(\theta - \varphi)$ は夫々 $1.00006, 1.00051, 1.00129$ にして、誤差 (σ_m) _{$\tan \theta = 0.01$} ~ (σ_m) _{$\tan \theta = 0$} に対する比を示せば、夫々 $0.06\%, 0.51\%, 1.29\%$ である。

c. 柱軸の曲り量が微小なる場合に於ける弾性破損

前節では當初における柱軸の曲り量を必ずしも、微小ならずとして柱の彈性破損を論じたが本節では曲り ch/i^2 が微小と考へらるる際の同破損を特に論じて見る。

(i) $p \neq \pi$ なる場合: $\sin \frac{1}{2}p \neq 0$ にして,

但し詳しくは(10)式を以て表はすべきである。

(ii) $p \equiv \pi$ なる場合: 従つて $\sin \frac{1}{2}p \equiv 1, \cos \frac{1}{2}p \equiv 0,$

にして、

$$p = \pi - 4p, \text{ 但 } \sqcup 4p \approx 0$$

と置いて、(12) 式から

$$(\Psi_g)_{y \cong \pi} \cong \left(\frac{4}{3} \right) \left[\sin(2\pi\xi_g - v) - \frac{\pi \cos v}{4} \cos 2\pi\xi_g \right]$$

故に (10) 式より

となりて、 $c \rightarrow 0$, $c \equiv 0$ の際には、 $\sigma_m \equiv \sigma_l$ となる。

(iii) $\frac{1}{2}p \equiv \pi$ なる場合: この際には,

$$\frac{1}{2}p = \pi - Ap, \text{ 但 } \nabla Ap \approx 0$$

と置いて、

$$\sin \frac{1}{2} p \approx 4p, \cos \frac{1}{2} p \approx -1, \quad 4\pi^2/(4\pi^2 - p^2) \approx \pi/24p$$

となる。

$$(\mathcal{W}_g)_{p \approx 2\pi} \equiv \frac{\pi}{2A_m} \{ \sin(2\pi\xi_g - \nu) - \cos\nu \cdot \sin p\xi_g \} + \cos\nu \cdot \sin p\xi_g$$

$$\left(\frac{c\hbar}{i^2}\right) \left| \frac{\pi}{2dp} \{ \sin(2\pi\xi_0 - \nu) - \cos\nu \cdot \sin p\xi_0 \} + \cos\nu \cdot \sin p\xi_0 \right| \cong \frac{\sigma_l}{\sigma_m} - 1$$

従つて

$$\Delta p \equiv \frac{\pi}{2} \frac{\sin(2\pi^e g - \nu) - \cos\nu \cdot \sin p \xi_g}{\frac{\xi' - 1}{ch/i^2} - \cos\nu \cdot \sin p \xi_g}$$

但し $\xi' = \sigma_l/\sigma_m = (p_l/p)^2 \neq 1$ とする。尙 $p = (l/i)c_m^{1/2}$

$$\text{ならば} \quad p = 2\pi - 2dp$$

卷之二

$$e_m \cong (i/l)^2 \left[4\pi^2 - 4\pi^2 \frac{\sin(2\pi\xi_0 - v) - \cos v \cdot \sin p\xi}{\xi' - 1} \right] \frac{1}{\omega(l)^2} - \cos v \cdot \sin p\xi$$

$$\left. \approx \left(2\pi \frac{i}{l}\right)^2 \left[1 - \frac{\sin(2\pi\xi_n - \nu) - \cos\nu \cdot \sin p\xi}{\frac{\zeta' - 1}{ch^2 i^2} - \cos\nu \cdot \sin p\xi} \right] \right\} \dots \dots \dots \quad (10iv)$$

$$\text{但 } 1 < \xi' = \sigma_i/\sigma_m = (n'/n)^2 \leq 1.$$

こゝに除外した $\sigma' \equiv 1$ なる場合は $p_i \equiv 2\pi$ であり、一方今の場合には $p \equiv 2\pi$ である。従つてこの除外の場合は、 $p \equiv p$ 、即ち $\sigma_m \equiv \sigma_i$ となる場合である。

(10_{IV}) 式は曲り量 c が零に極めて接近する際、オイラー提唱の式に一致する。然れども i^2/h は普通の場合有限量であるが、 p_l が 2π に近い値である場合は、 $\xi' - 1$ が微小数であつて (10_{IV}) 式よりの $\sigma_m/E \approx (2\pi \frac{i}{l})^2$ 及 $\sigma_m \approx \sigma_l$ なる近似値が大なる誤差を含むであらうことが想像される。この想像の當否は上記の近似式によりては判定しかねるが近似式によらざる図-6 a_{1,2}, b_{1,2} でその是なることが判る。即ち同図に於て $ch/i^2 = 0$ なる點の σ_m/σ_l の諸値は何れも $c \rightarrow 0, c \equiv 0$ の時に於ける値にして、所謂オイラー提唱値である。 $c \rightarrow 0, c \equiv 0$ の時には、(10_{IV}), (10'_{IV}) 式より、 $p \approx 2\pi$ にして、 $c \rightarrow 0, c \neq 0$ の時には、常に $p < 2\pi$ である。即ち $p > 2\pi$ なる p は弾性限以内の p としては實現し得ない。図-6 (a), (b) でもそれを明示してゐる。

c₃. 柱軸の曲り量が零の場合に於ける弾性破損

c₂ に述べたやうに (10_{IV}) 式も 図-6 (a_{1,2}), (b_{1,2}), も共に長柱 ($p_l > 2\pi$) は柱軸の曲り量 c が零に極めて接近する ($c \rightarrow 0, c \equiv 0$) 時にオイラー現象が起ることを告げてゐる。而して兩端固定されたる真直柱 ($c=0$) が、偏心荷重を受けたる場合に、一方に曲がるとするオイラー現象を起すことは、明らかに不合理であることを本會誌第 23 卷第 9 號 977 頁 (下段参照) で述べた。本項に關しては本會誌第 23 卷第 1 號 (25 頁) c₃ (本項第 1 行目に於ける “ c が絶対零である長柱” の絶対零は零とすべきを誤りたるものである) に述べたると全く同様に下記の通り説明される。曲り量 c を [a] 絶対零 ($c=0$) とする場合には單純圧縮のみが起る、しかし $c=0$ なる場合は實在性を持たないから、實際的には [b] 近似零 ($c \rightarrow 0, c \equiv 0$) である場合支けが考へられ、従つて長柱 ($p_l > 2\pi$) は常にオイラー現象を起すことになる。

場合 [a] 即ち c を絶対零と考ふる時には、(10) 式に於て、 $c=0$ とせば、 $0 \leq p \leq 2\pi$ の場合、 $p=p_l$ (即ち $\sigma_m = \sigma_l$) にして單純圧縮で弾性破損が起ることが判る。又 $p=2\pi$ の場合は、(10) 式中 $(ch/i^2)\psi_g = 0/0$ の形となりて見掛上 σ_m は不定となるが、 p が 2π に絶対に等しくあり得る時間は絶対零である (p が 2π に達した時に、 p の増加を中止せんとする事は實際的には不可能である) から $(ch/i^2)\psi_g = 0/0$ となる時間は絶対零である。尙又或る荷重が作用してある場合に、その荷重の p が 2π に全く等しくあり得る事の確率は零であるから、 $(ch/i^2)\psi_g$ が不定であり得ない、即ち $(ch/i^2)\psi_g$ は零にして、 $\sigma_m = \sigma_l$ となる。故に $c=0$ なる場合には、 p の値の如何に拘らず、單純圧縮のみで弾性破損が起ることになる。要するに柱軸の曲り量が零なる場合に於ける弾性破損に就ては、實際的には、場合 [b] $c \rightarrow 0, c \equiv 0$ 支けが實在可能にして、長柱 ($p_l > 2\pi$) は常にオイラー現象に依りて弾性破損を受けることが結論される。

c₄. $ch/i^2 \sim \sigma_m$ 線図に就ての考察

図-6 (a), (b) は種々の細長比 (l/i) の柱に對して $ch/i^2 \sim \sigma_m$ の關係を $e_l = 1.077 \times 10^{-3}$ である場合 (軟鋼) に就て求めた。

これらの諸図を見るに σ_m の値は $ch/i^2 = 0$ に於ては $p_l < 2\pi$ では σ_l であり、 $p_l > 2\pi$ では σ_l よりも小さく、且つ細長比の大きくなる程小さくなる。而して ch/i^2 が増すに従ひ σ_m の値は漸次降下する。この降下率は各曲線に於て ch/i^2 が小さい程大きくなり、又 $p_l = 2\pi$ なる時即ち、④の時に最大にして、 p_l と 2π との差が大きくなる程小さくなる。

その降下する割合は、(i) $v = \pi/3$ 即ち場合 [b] は、 $v = 0$ 即ち場合 [a] よりその割合大である。(ii) 場合 [b] $v = \pi/3$ は p の値の如何に拘らずその降下する割合は、1 山の場合 $c \sin \pi \xi$ の割合よりも常に大である。(iii) 場合 [a] 即ち $c \sin 2\pi \xi$ の場合は、 $p_l < 2\pi$ にありては、1 山の場合、 $c \sin \pi \xi$ のそれより大であるが、長柱 $p_l > 2\pi$ にありては、反対にその降下率小である。

之を要するに $ch^2 \theta \approx 0$ の附近に於て、 σ_m が急激なる降下を示すことは、即ち僅少の曲りを持つ柱に於ても、柱の弾性限荷重はオイラー提唱の値、或は単純圧縮の弾性限値より遙かに小なることがあり得べきことを意味してゐる。又柱軸が 2 山の曲りをなす場合には、その弾性限荷重は實際的には 1 山の曲りをなす場合のそれより常に小である。故に一般に眞直であると見做す場合でも、その弾性限の實際値は必ず、オイラー 値又は単純圧縮値よりも小さくして、特に p_1 の値如何によりては、遙かに小さくあり得るのである。

D. 柱の曲り

任意荷重によりて生ずる柱の曲り γ は (5) 式で示される。而して γ ～ δ の関係は図-2 の諸図の如くである。 δ_0 の断面では反曲點を生じ、該断面で曲げモーメントが零である。 δ_0 の断面では最大曲げモーメントが生ずる。

$p=0$ の際は、 $M_c=0, y=0$ にして、 ε_0 並に ε_0' なる断面位置は實在しない。然れども $p \neq 0$ に於ては、 $\varepsilon_0, \varepsilon_0'$ なる断面位置は図-5, 4 に示せる如き値を持つ。 $p \rightarrow 2\pi$ の際は、 $M_c \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ となり、 $\varepsilon_0, \varepsilon_0'$ は同図に示せる値を持つ。

E. 弾性限點に於ける最大曲り

先づ與へられたる ρ によりて生ずる最大曲りの断面位置 ξ_0 は (5) 式より $dy/d\xi = 0$ を満足する式を作ることによりて下記の如くに求まる。

$$\frac{2}{p \left(\cot \frac{p}{2} - \frac{2}{p} \right)} = \frac{\sin p\xi + \cos p\xi \cot \frac{p}{2}}{\cot \frac{p}{2} - \frac{2}{p}} - \cos 2\pi\xi - \sin 2\pi\xi \tan v \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

上記(13)式より図-7の如き $p \sim \epsilon_1$ なる関係を計算することが出来る。

さて弾性限點に於ける曲りの極大値 y_t は、前記 (5) 式に於て、 p を彈性限値にとり、 ε_1 を ε_{t1} にとりて求まる。而して p の弾性限値については (11) 式より求まる。又 ε_{t1} は (18) 式より求まる。故にこの兩式に於て p をパラメーターとして弾性限點に於ける最大曲り y_{t1} を h/t^2 倍したる y_t が求まる。即ち p に種々なる値を與へることによりて、 c の種々なる値に對応する y_{t1} を h/t^2 倍したる y_t なる値が正確然も簡単に計算することが出来る。 $y_{t1} \sim c$ の關係を、上記の計算によりて求めたものが図-8 (a) (b) である。

この図に就て見るに、 η_1 は (1) $|l/i| \leq 2\pi/\sqrt{e}$ なる柱では $c \rightarrow 0$ 時には零であり、(2) $|l/i| > 2\pi/\sqrt{e}$ なる柱では、 $c \rightarrow 0$ 時には、一定値をとる。而して兩種柱に於て、 c が増すにつれて、 η_1 は次第に増す。

尙 $\nu = \pi/3$ 即ち場合 [b] の γ は 1 山の正弦曲線形 $c \sin \pi \xi$ の場合のそれより著しく大きくなることは注目すべきことである。

図-7. p ～ ε_i の関係

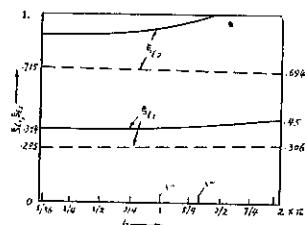
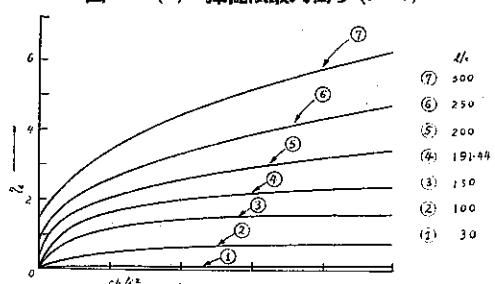


図-8. (a) 強性限最大曲り ($\nu = 0$)



F. 結 び

本論文では両端固定の鋼柱の柱軸が當初に曲りを持つ時に、その弾性限荷重、曲り(変位)、最大曲げモーメント等の大きさ及位置を論じ、それがオイラー値と何程の相違を生ずるかを、假りに2山の正弦曲線形を柱軸とする柱に對して試みたるものである。こゝに論究されたる主なる事項を述べれば、

(1) 先に柱軸の當初の曲りが1山の正弦曲線形を有する場合に就て論究されたる事項の全部(本誌第23巻第1号28頁)1), 2), 3)が本論文の場合にも適用される他に、更に下記の事項が論究される。

(2) 柱軸が當初に2山の曲りを有する際には、これを[a]全く相等しき2つの山形 $c \sin 2\pi\xi$, [b]相異りたる2つの山形 $2c \sin \pi\xi \cos(\pi\xi - \nu)$ を有する2つの場合に分けて考へると、場合[a]では p (從つて荷重)に依て2つの山形が反対方向に相等しき変位を常に生じ、柱の中央では変位及曲げモーメントが常に零である。場合[b]では p の或る値以内にありては、 p の増すに従つて何れの山形も増大するが、 p がそれ以上大なる際は p が増大するに従つて、大きな山形の部分は漸次大きくなり、小なる山形の部分は反対に次第に小さくなりて、結局柱軸は全体として大きな山形に従つて次第に曲るに至ることが考察される。而して場合[a]は實在性零にして、現実的には場合[b]だけが實在可能である。

(3) $\sigma_m \sim ch/i^2$ 線図に示せる如くに ch/i^2 が増すに従つて σ_m の漸次降下する割合は、(i) $\nu = \pi/3$ 即ち場合[b], $2c \sin \pi\xi \cos(\pi\xi - \nu)$ は、 $\nu = 0$ 即ち場合[a], $c \sin 2\pi\xi$ よりもその割合大である。(ii) 案件[b]は p の値の如何に拘らず、その降下する割合は、1山の場合即ち $c \sin \pi\xi$ の割合よりも常に大である。(iii) 案件[a]即ち $c \sin 2\pi\xi$ の場合は、 $p_l < 2\pi$ にありては、1山の場合、即ち $c \sin \pi\xi$ の場合のそれよりも大であるが、長柱 $p_l > 2\pi$ にありては、反対にその降下率小である。

之を要するに、僅少の曲りを持つ柱に於て、その柱の弾性限荷重はオイラー値、或は單純圧縮の弾性限値より遙かに小なることがあり得べきこと、並に柱軸が2つの山の曲りをなす場合には、その弾性限荷重は、實際的には、1つの山の曲りをなす場合のそれより常に小である。

(4) $\nu = \pi/3$ 即ち場合[b]の弾性限點に於ける最大曲り η_l は1山の正弦曲線形 $c \sin \pi\xi$ の場合のそれより著しく大きくなることは注目すべきことであることを述べた。

(本論文は砂谷教授の御指導を受けたものである。茲に衷心から感謝の意を表す。)

図-8. (b) 弾性限最大曲り ($\nu = \pi/3$)