

論 說 報 告

第 23 卷 第 9 號 昭和 12 年 9 月

等角寫像適用上から見た弾性学と水理学との比較

會員 工学博士 久野重一郎*

On Solving the Problems on the Theory of Elasticity and Hydrodynamics
by means of the Conformal Representation

By Jyunitio Kuno, Dr. Eng., Member.

要 旨

等角寫像(複素函數論)は、これを水理学へ適用することは、比較的容易である。しかるに、弾性学に對しては、極く限られた場合だけしか適用できない。本文は、なぜさうなるかの理由を平易に述べたものである。

I. 緒 言

複素函數論、特にその等角寫像性は、二次元弾性学の諸問題、並に二次元ポテンシャル流動の究明に對し、有力な武器の一つであります。一たい、弾性学にせよ、水理学にせよ、私どもが、一つの問題を理論的に解かうとするに當つては、いろいろな方法が、そこにあり得ることあります。例へば、座標にいたしましても、

直角座標 (Cartesian coordinates) x, y

極座標 (Polar coordinates) r, θ

直交曲線座標 (Orthogonal curvilinear coordinates) α, β

などがあります。問題に直面したら、まづ、どの座標が、一番有效適切かの見極めをすることが、大切であります。そして、直交曲線座標の採用は、それはいひかへれば、等角寫像の利用といふことに、外ならないのであります。直角座標や極座標では解けない題題が、直交曲線座標(等角寫像の適用)により、手ぎはよく解ける場合があるのであります。しかし、弾性学では、等角寫像ができてゐながら、理論上、解けない題題もあります。解けたり解けなかつたりするのを、どうして見分けるかにつき、私の扱つた諸問題を例にあげて、申述べて見たいと思ひます。但し、2次元弾性学のうち、振りモーメントをうける問題は、除外いたします。

II. 等角寫像と弾性学

1. 円板の問題

直径の方向に圧縮される円板の応力を、私は、かつて、解いたことがありました。この問題は、土木の方面でいふと、ローラーの内部におこる応力に相當するものと思はれます。かやうな円板については、すでに、Hertz が扱つてゐるのであります。しかし、Hertz の解法といふのは、円板の一つの直径の兩端に、點荷重の働く場合について、応力を出したものであります。點荷重を假定しますと、力の作用點が、数学上いはゆるシンギュラー・ポイントになります。たつた 1g の力がそこへ働いても、その點の応力が ∞ になるといふ結果を來します。いつたい、円板において、応力の値が大きくなるのは、作用點の近傍なのでありまして、その大切な點において、応力

* 九州帝國大学助教授

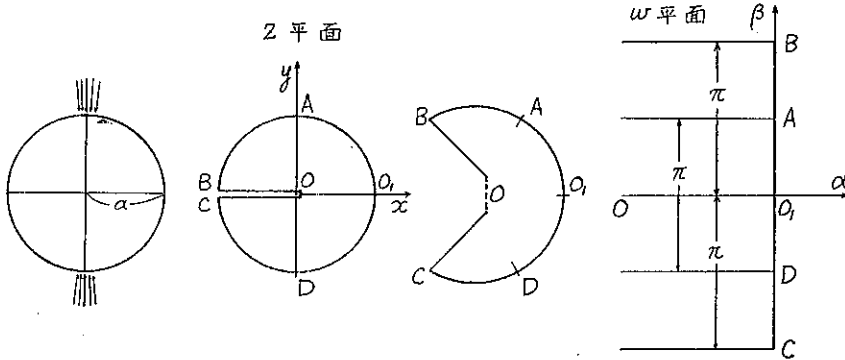
の値が求められないといふのが、Hertz の解法のもつ缺點なのであります。この不都合を避けたいために、私は、點荷重でなしに、荷重が微小幅の廣がりをもつやうな場合について、考へてみたのであります。

荷重のひろがりを考へますと、實際の現象によほど近くなるわけでありましたが、それと同時に、解法も面倒になつて參ります。まづ、普通の直角座標で、この問題を解かうといたしましたがつ、どうも、うまくゆきませんでした。極座標を使つて、やつてみましたが、これまた、思ふやうに參りませんでした。そこで、やむを得ず、直交曲線座標をためしてみようと思つたのであります。ひとくちに、直交曲線座標といひましても、際限なくあるわけですから、まづその形を決めねばなりません。境界條件を書きあらはす上の便宜からいふと、円板の周が、 O といふ座標で示されることが、一番望ましいのであります。即ち、円周を、他の平面における一つの座標軸に對應させるわけでありまして。

2. 円板の図形変換

図-1 における一番左は、直径方向に圧縮される円板を示したものであります。

図-1.



左から 2 番目は、円板の中心から、 $180^\circ (\pi)$ の點まで、狭い切れ目をいれたものであります。そして、B 端を上方へ、また C 端を下方へ、引張ります。

左から 3 番目は、BC を引離したところであります。BC を、もつと、引離すと同時に、中心 O を左の方へ強く引いてみます。この手續を、理想的に行ひ得たと想像いたしますと、その結果は、一番右の図のやうになると考へてよいでありませう。円の中心 O は、無限左方へ延びてゐると考へて、結局、左から 2 番目の図（これを z 平面と名づけませう）における円の内部は、一番右の図（これを w 平面と名づけませう）における無限帯状の區域に寫像されるわけでありまして。そして、 z 平面の円周は、 w 平面の直線 BC に對應します。この直線 BC の方向を β 軸にとり、それと直交する直線 O_1O の方向を α 軸に選びませう。すると、 z 平面の円周は、 w 平面では $\alpha=0$ といふ座標に對應することになり、“円周を O で示す”といふ初めの方針が、實現されたわけでありまして。

z 平面。円板の半径 a 、円板内任意點の座標 $z=re^{i\theta}$ としませう。 r は中心からの距離、 θ は OO_1 からの偏角であります。なほ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ であります。

w 平面。諸點の位置について、 $A(\beta=\pi/2)$ 、 $B(\beta=\pi)$ 、 $C(\beta=-\pi)$ 、 $D(\beta=-\pi/2)$ と約束しませう。すると、次の關係があるわけです。

點	O	O ₁	A	B	C	D
$z \begin{cases} r \\ \theta \end{cases}$	0	a	a	a	a	a
	0	0	$\pi/2$	π	$-\pi$	$-\pi/2$
$w \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$	$-\infty$	0	0	0	0	0
	0	0	$\pi/2$	π	$-\pi$	$-\pi/2$

これからみると、次のことがあるわけでありす。

(1) $r=a$ が $\alpha=0$ に對應し、 $r=0$ が $\alpha=-\infty$ に對應してゐるから、 $\alpha=\log r-\log a$ とすれば、よささうであります。

(2) θ と β は、測り方は違ふけれども、數値は同じであります。だから、 θ も β も、ラジアンで示すことにすれば、 $\beta=\theta$ とおいてよいわけであります。

(3) α と β を組合せますと、

$$w = \alpha + i\beta = (\log r - \log a) + i\theta = (\log r + \log e^{i\theta}) - \log a = \log(re^{i\theta}) - \log a = \log z - \log a = \log(z/a)$$

$w = \log(z/a)$ なる函数によつて、 z 平面における円板内部が、 w 平面における幅 2π の半無限帯狀域へ寫されることがわかりました。しかも、複素函数による寫像でありますから、當然、等角性が保たれてゐる筈であります。

函数 $w = \log(z/a) \dots\dots\dots(1)$

を分解すれば、前に記したやうに、 $\alpha = \log(r/a)$ 、 $\beta = \theta$ となりますから、少し書きかへますと、

$$r = ae^\alpha, \quad \theta = \beta \dots\dots\dots(2)$$

これは、 α, β を指定したとき、それに対応する z 平面上の點を、極座標で與へる式であります。また、(1) を $e^w = z/a$ と替替へますと、次のやうになります。

$$z = ae^w = ae^{\alpha+i\beta} = ae^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta)$$

こゝで、 $z = x + iy$ とおきますと、

$$x = ae^\alpha \cos \beta, \quad y = ae^\alpha \sin \beta \dots\dots\dots(3)$$

これは、 α, β を指定したとき、それに対する z 平面上の點を、直角座標で與へる式であります。寫像函数 (1) が (2) または (3) の形に變へられるといふことは、この場合、重要なことなのであります。それについては、後に詳しく述べるつもりです。

3. 円板の応力方程式

二次元分応力に關する横田方程式は、 xy 座標系に對して、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y - 2i\tau &= 2iy \{ F_1'(z) + F_2(z) \} \\ \sigma_x + \sigma_y &= 2R[F_1(z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$R[F_1(z)]$ は、複素函数 $F_1(z)$ の實部だけをとりといふ約束であります。直交曲線座標 α, β に對しては、一般に

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} - \widehat{\beta\beta} - 2i\widehat{\alpha\beta} &= e^{2i\gamma} \{ 2iy \{ F_1'(z) + F_2(z) \} \} \\ \widehat{\alpha\alpha} + \widehat{\beta\beta} &= 2R[F_1(z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

γ は、 α 曲線の外方法線が、 x 軸正方向となす角であります。式 (1), (2), (3) からみますと

$$\begin{aligned} \gamma &= \theta = \beta \\ 2iy &= 2iae^\alpha \sin \beta = ae^\alpha(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = ae^\alpha(1 - e^{-2i\beta}) \end{aligned}$$

これを (5) の第 1 式の右邊へ代入しますと、

$$\begin{aligned}
 & e^{2i\beta} \{ae^{w(1-e^{-2i\beta})}F_1'(z) + F_2'(z)\} \\
 &= (e^{2i\beta} - 1)ae^{w}F_1'(z) + e^{2i\beta}F_2'(z) \\
 &= -(1 - e^{2i\beta}) \{ae^{w}F_1'(z)\} + e^{-\alpha+i\beta} \{e^{w}F_2'(z)\}
 \end{aligned}$$

ここで、 $f_1(w) = F_1(z)$, $f_1' = F_1' \frac{dz}{dw} = ae^w F_1'$

$$f_2(w) = -e^{w} F_2(z)$$

とおきますと、(5) は、次のやうになります。

$$\left. \begin{aligned}
 \widehat{\alpha\alpha} - \widehat{\beta\beta} - 2i\widehat{\alpha\beta} &= -(1 - e^{2i\beta})f_1'(w) - e^{-\alpha+i\beta}f_2'(w) \\
 \widehat{\alpha\alpha} + \widehat{\beta\beta} &= 2R[f_1(w)]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

これが、(1) で定義される座標を使つた場合の分応力方程式であります。z 平面において、円板の内部を、 $\alpha\beta$ 座標でカバーしたときの応力方程式とみてもよいし、或は円板を w 平面へ寫像して得た帯状域において成立する応力方程式と考へてもよいのであります。この後者の考へ方に従ひますと、荷重は、 $\beta = \pm\pi/2$ なる點(を中心にして、幅 $2h$ のひろがりの上)において、 β 軸上へ働くわけであります。2h は、z 平面でいへば、荷重の存する円弧に対する中心角に等しいのであります。いま、荷重の強さを p としませう。座標 β を、0 から π まで (或は 0 から $-\pi$ まで)、連続的に變へて行くとき、 $\beta = \pi/2$ の附近だけで p になり、その他では 0 になるといふやうな荷重の表はし方 (函数) を考へてみますに、それは、不連続荷重を連続函数で示さうといふのですから、フーリエ級數を使へば、よいわけでありませう。それをやつてみますと、

$$P = -\frac{2p}{\pi} \left[h - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin 2nh \cos 2n\beta \right]$$

負號は、圧縮を示す意味で添へたわけです。そして w 平面の境界條件は $\alpha=0$ において $\widehat{\alpha\alpha} = P$, $\widehat{\alpha\beta} = 0$

とすれば、よいことになるわけでありませう。そこで、(6) のうちの、未定函数を、次のやうにおいてみます。

$$f_1(w) = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{2nw}$$

$$f_2(w) = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} e^{(2n+1)w}$$

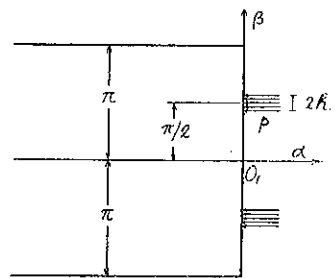
これを、(6) の第 1 式へ代入してみますと、その右邊は、

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [2nA_n e^{2nw}(1 - e^{2i\beta}) + B_{2n+1} e^{(2n+1)w} e^{-\alpha+i\beta}] \\
 &= -\frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [2nA_{2n} \exp(2nw) - 2nA_{2n} \exp(2nw + 2i\beta) + B_{2n+1} \exp(2nw + 2i\beta)]
 \end{aligned}$$

この括弧内第 1 項は、 $2(n+1)A_{2(n+1)} \exp(2nw + 2w)$ と書いて差支ないから、結局、(6) は、次のやうになります。

$$\widehat{\alpha\alpha} - \widehat{\beta\beta} - 2i\widehat{\alpha\beta} = -\frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(2nw + 2i\beta) \{2(n+1)A_{2(n+1)} \exp(2\alpha) - 2nA_{2n} + B_{2n+1}\}$$

図-2.



$$\widehat{\alpha\alpha} + \widehat{\beta\beta} = \frac{4\eta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \exp(2n\alpha) \cos 2n\beta$$

これから、まづ $\widehat{\beta\beta}$ を消去し、その結果へ $\alpha=0$ において、境界条件を挿入すれば、定数 A, B が決まる。それらの計算は、本文の目的でないから、すべて省くことにいたします。要するに、円板の問題へ、等角寫像を適用した最大の利益は、円周を $\alpha=0$ といふ數で定義できたことにあると思はれます。

4. 矩形板の問題

円周を $\alpha=0$ とする方法によつて、円板の問題がとけましたから、同じ考へ方で、矩形板はどうだらうかと考へたのであります。一番簡単な場合として、相對する2邊の中央で圧縮される矩形板をとり、板は、捩屈をおこさぬ程度の厚さをもつと假定します(圖-3の左)。

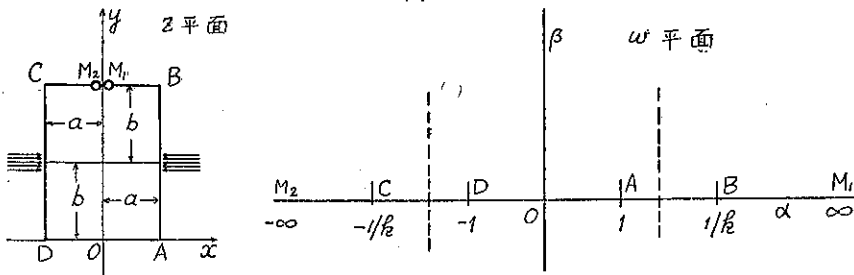


圖-3.

矩形の四つの邊を、 $\alpha=0$ (或は $\beta=0$) といふ座標で示すためには、曲つた邊を、1直線に伸ばす必要があります。その伸ばし方は、いろいろありませうが、一つの方法として、矩形を z 平面上の図形とみて、その4邊を、 w 平面の實軸全体へ、對応させてみました。まづ、矩形の上邊の中央部へ、切口を入れ、そこから左右へ開き、 M_1 を $+\infty$ へ、 M_2 を $-\infty$ へまで、引張つたとしますと、矩形の内部は、 w 平面の上半分にひろがるわけでありませう。計算の便宜上、矩形の A 點を $\alpha=1$ へ、また矩形の D 點を $\alpha=-1$ へ重ねました。矩形の B と C が、 w 平面の實軸上どこへ来るかは、矩形の長邊と短邊の比に關係しますから、一がいにいへませぬ。しかたがないから、未定の定數 k (1 より小さい數と假定) を用ひて、B 點は $+1/k$ に、C 點は $-1/k$ に来ると考へます。矩形の形が決まれば、 k は知れる筈であります。

z 平面の矩形の内部を、 w の半平面に移すところの寫像函数は、いはゆる Schwarz-Christoffel の變換を使ふことになります。矩形の各隅角においては、内角の大きさが、いづれも $\pi/2$ であるから、4隅を、 $\pm 1, \pm 1/k$ へ寫像する函数は、次の形で示されます。

$$z = C \int_0^w \left\{ (w-1) \left(w - \frac{1}{k} \right) \left(w + \frac{1}{k} \right) (w+1) \right\}^{-1/2} dw + C'$$

或は
$$z = \int_0^w \frac{C_1 dw}{\{(1-w^2)(1-k^2w^2)\}^{1/2}} + C'$$

原點。 $z=0$ は $w=0$ へ對應するから、 $0=0+C'$ 、従つて、 $C'=0$ 。

隅角 A。 $z=a$ が $w=1$ へ對應するから、

$$a = C_1 \int_0^1 \frac{dw}{\{(1-w^2)(1-k^2w^2)\}^{1/2}} = C_1 K$$

従つて $C_1 = a/K$ であります。 K は、楕圓函数の周期に關する一つの値であります。

隅角 B。 $z=a+2ib$ は $w=1/k$ へ對應することから、

$$\begin{aligned} \alpha + 2ib &= \frac{a}{K} \int_0^{1/k} \frac{dw}{\{(1-w^2)(1-k^2w^2)\}^{1/2}} = \frac{a}{K}(K+iK') \\ &= a + iaK'/K \end{aligned}$$

従つて $2b = aK'/K$ となり、さらに

$$\frac{K'}{K} = \frac{2b}{a} \dots\dots\dots(7)$$

なる大切な関係ができます。一方、寫像函数は、 C_1 と C' の値がわかつたから、

$$\frac{Kz}{a} = \int_0^w \frac{dw}{\{(1-w^2)(1-k^2w^2)\}^{1/2}} \dots\dots\dots(8)$$

これは、Legendre-Jacobi の標準形における第 1 種楕円積分でありますから、逆函数をとつて、次のやうに書くことができます。

$$w = \operatorname{sn}\left(\frac{Kz}{a}\right) \dots\dots\dots(9)$$

これは、Jacobi の楕円函数の一つであります。そして、 $4K$ 及び $2iK'$ といふ二つの週期をもつてであります。

z 矩形の周邊が、 w 實軸上へ、果して寫像されてゐるかどうかを調べてみますと、

隅角 A. $z = a, w = \operatorname{sn} K = 1$

隅角 B. $z = a + 2ib, w = \operatorname{sn}(K + 2ibK/a) = \operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$

同様にして、隅角 C は $z = -a + 2ib$ で、 $w = -1/k$ 。

隅角 D は $z = -a$ で、 $w = -1$ 。かやうな次第で、 z 平面の矩形の 4 隅角は、たしかに w 平面の實軸上にあることがわかります。だから、矩形の周邊は、 $\beta = 0$ といふ一つの座標で示されるわけであります。

これから応力方程式を出すわけではありますが、それが、いろいろやつてみましたけれども、どうも、うまく行きませんでした、まことに残念だが、矩形板を解くことが、できなかつたのであります。即ち、この矩形板は解けなかつた方の例として、あげたわけであります。

III: 等角寫像と水理学

1. 二次元ポテンシャル流動

圧縮されない流体が、二次元の領域で定流をなし、渦巻をとまなはず、且つ粘りけの影響を無視してよいやうな場合について、いま、 ϕ を速度ポテンシャル、 ψ を流函数とおき、分速度を次のやうに定義させよう (u と v の符號を反對に定義する方法もありますが、こゝでは、それに従ひません)。

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 分速度} \quad u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ y \text{ 分速度} \quad v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

この 1 組の式は、函数論ではゆる Cauchy-Rieman 方程式を形成してゐますから、 ϕ も ψ も、ともに Laplace の方程式を満たす筈であります。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

なほ、 $w = \phi + i\psi, z = x + iy$ とおけば、 w は z の函数になるべきことが、Cauchy-Rieman 方程式から保證されるわけであります。よつて、

$$w = f(z), \quad \frac{dw}{dz} = u - iv$$

z は、また w の函数でもあるわけですから、 w 平面上の軸に平行な基礎目の線に對して、 z 平面上には、直交する曲線群があることになり、そのうち、 $\phi = \text{const.}$ に對するものが、いはゆる等ポテンシャル線、 $\psi = \text{const.}$ に對するものがいはゆる流線であります。即ち、2次元ポテンシャル流動の場合には、流線及び等ポテンシャル線と、 w 平面上の軸に平行な直線群との間に、等角寫像性が成立するわけであります。そして、この寫像函数が與へられれば、速度の要素は、(分速度の定義からみてすぐわかるやうに) 次の式で與へられることになります。

$$\text{合速度の大きさ } V = \sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right| \dots\dots\dots (11)$$

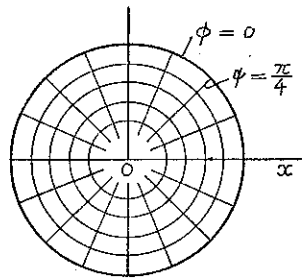
$$\text{合速度の方向 } \alpha = \tan^{-1} \frac{v}{u} = -\Re \left(\frac{dw}{dz} \right) \dots\dots\dots (12)$$

これを言葉でいへば、寫像函数の微係数を求めると、その絶対値が合速度の大きさになり、その偏角の符號をかへたものが合速度の方向になる。これは、普通のテキストに書いてあることであります。

2. 函数 $w = \log(z/a)$ の流れ

函数 $w = \log(z/a)$ は、さきに式 (1) として記したものであります。 z 平面における円の内部を、 w 平面上の無限帯状域へ寫した函数であります。いま、 $w = \alpha + i\psi$ であつたものを、 $w = \phi + i\psi$ と書替へてみます。これは、 w 平面上の實軸と虚軸の名稱を変更しただけのことから、函数の内容は、少しも變つて居りません。内容を変へないなら、名稱もかへるに及ばぬではないかといふ理窟も立つわけですが、今までの習慣上、弾性学では $\alpha\beta$ といふ座標を用ひて居り、水理学では $\phi\psi$ といふ文字を使ひ來つてゐるから、そのしきたりに従つたままでのことであります。さて、 α を ϕ に、 β を ψ に書きかへますと、式 (2) は、次のやうになります。

図-4.



$$r = ae^\phi, \quad \theta = \psi \dots\dots\dots (13)$$

$\phi = 0$ ならば、 $r = a$ といふ円になります。 $\phi = 1$ ならば、 $r = ae$ といふ円になります。 $\phi = 2$ ならば、 $r = ae^2$ といふ円になります。また、 $\phi = -1$ ならば、 $r = ae^{-1}$ といふ円になります。だから、等ポテンシャル線 ($\phi = \text{const.}$ に對應する z 平面上の線) は、同心円になるわけであります。

θ と ψ は、全く等しいのですから、 $\psi = 0$ は $\theta = 0$ になり、 x 軸正方向を示します。 $\psi = \pi/2$ ならば $\theta = \pi/2$ で、 y 軸の正方向を示します。 $\psi = -\pi/2$ ならば $\theta = -\pi/2$ で、これは y 軸の負方向を示します。だから、流線は、中心から四方へ放射する直線だといふことがわかります。この直線に沿ふて、流体が流れるのですから、流体は、中心から、四方へ向つて流出するか、それとも、四方から中心へ向つて流込むのか、そのどちらかでありませう。さて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ V &= \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} = 1/\sqrt{x^2+y^2} = 1/r \\ \alpha &= \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) / \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \right\} = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

これからみると、合速度の大きさは、中心からの距離に反比例し、その方向は、動径の向きに一致する。即ち、中心から外方へ向つて、流体が流れることを示します。原點に、いはゆる噴きだし (source) のある流れであります。

す。このことは、ポテンシャル流動に詳しい方なら、函数形をみただけで、すぐおわかりになることであります。

3. 函数 $w = \text{sn}(Kz/a)$ の流れ

函数 $w = \text{sn}(Kz/a)$ は、さきに式 (9) として記したものであります。z 平面における矩形の内部を、w 上半面へ寫すための函数であります。軸の名稱をかへて、 $w = \phi + i\psi$ といたしました場合、z 平面における等ポテンシャル線及び流線はどんな形になり、速度の大きさと方向はどうなるかを調べませう。

まづ、簡単のため、K と a を式から除いて、 $w = \text{sn} z$ とし、この兩邊の虚實を分離してみますと、次のようになります。

$$\phi = \text{sn}(x, k) \text{dn}(y, k') / \{k^2 \text{sn}^2(x, k) + \text{cn}^2(y, k')\}$$

$$\psi = \text{cn}(x, k) \text{dn}(x, k) \text{sn}(y, k') \text{cn}(y, k') / \{k^2 \text{sn}^2(x, k) + \text{cn}^2(y, k')\}$$

これらの式には、k と k' が含まれてゐます。k は、幾何学的には、図-3、z 平面の隅角 B 及び C を、w 軸上のどこへ寫すかによつて決まるもので、それは、具体的には、矩形の長邊と短邊の比から定まるわけであります。k' は、 $(1-k^2)^{1/2}$ に等しい數です。だから、矩形の形を與へて、k と k' を出してからでないで、等ポテンシャル線や流線を、求めるわけにゆかないのであります。

計算例として $b=2a$ なる矩形を考へてみます。縦の邊の長さが、横の邊の 2 倍に等しい矩形であります。つまり、縦に細長い矩形であります。すると、式 (7) から、

$$\frac{K'}{K} = \frac{2b}{a} = \frac{2 \times 2a}{a} = 4$$

Theta 函数の展開に必要な定數 q は、

$$q = \exp(-\pi K'/K) = \exp(-4\pi) = 0.0000035$$

$$q^2 = 0.12 \times 10^{-10}$$

$$q^{1/4} = \exp(-\pi)$$

これらの數値から判断いたしますと、 $b=2a$ なる矩形においては、 q^2 以上はもちろんのこと、q 自体も、實用上、1 に對して省略して差支ないことがわかります。さうしますと、

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + \dots) = \frac{\pi}{2}, \quad 2K = \pi$$

$$K' = 4K = 2\pi$$

簡単のため $\frac{Kz}{a} = \frac{\pi z}{2a} = \zeta$ とおき、なほ $v = \frac{\zeta}{2K} = \frac{\zeta}{\pi}$ とし、4種の Theta 函数を求めますと、實用上、最初の 1 項だけとればよいことになり、即ち、次の結果が得られます。

$$\theta_0(v) = 1 - 2q \cos 2\pi v + \dots = 1$$

$$\theta_1(v) = 2q^{1/4} \sin \pi v + \dots = 2e^{-\pi} \sin \zeta$$

$$\theta_2(v) = 2q^{1/4} \cos \pi v + \dots = 2e^{-\pi} \cos \zeta$$

$$\theta_3(v) = 1 + 2q \cos 2\pi v + \dots = 1$$

これらを使つて、まづ母數を出しますと、

$$k^2 = \left\{ \frac{\theta_1(v)}{\theta_3(v)} \right\}^4 = \{2e^{-\pi}\}^4, \quad \text{従つて } \sqrt{k} = 2e^{-\pi}$$

$$k'^2 = \left\{ \frac{\theta_0(v)}{\theta_2(v)} \right\}^4 = 1, \quad \text{従つて } \sqrt{k'} = 1$$

上に得た Theta 函数と母数を用ひて, Jacobi の楕円函数を書替へますと,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} \zeta &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)} = \sin \zeta \\ \operatorname{cn} \zeta &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2(v)}{\theta_0(v)} = \cos \zeta \\ \operatorname{dn} \zeta &= \sqrt{k'} \frac{\theta_3(v)}{\theta_0(v)} = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

これが, $b=2a$ なる矩形において得られた關係式でありまして, 楕円函数が, 近似的に, 三角函数で代用される
ことがわかつたのであります。従つて, 與へられた函数は, 次の形に変へられるわけでありませう。

$$w = \operatorname{sn} \frac{Kz}{a} = \sin \frac{\pi z}{2a} \dots\dots\dots (16)$$

簡單のため, 次のやうにおきませう。

$$\xi = \frac{\pi}{2} \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{\pi}{2} \frac{y}{a}, \quad \frac{\pi z}{2a} = \xi + i\eta$$

これによつて, 次の諸式があるわけです。

$$w = \sin \xi \cosh \eta + i \cos \xi \sinh \eta$$

$$\left. \begin{aligned} \text{等ポテンシャル線の式} \quad \sin \xi \cosh \eta &= \phi \\ \text{流線の方程式} \quad \cos \xi \sinh \eta &= \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\pi}{2a} \cos \frac{\pi z}{2a} \\ &= \frac{\pi}{2a} \{ \cos \xi \cosh \eta - i \sin \xi \sinh \eta \} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{合速度の大きさ} \quad V &= \frac{\pi}{2a} \sqrt{\cos^2 \xi + \sinh^2 \eta} \\ \text{合速度の方向} \quad \alpha &= \tan^{-1}(\tan \xi \tanh \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

式 (17) から, 等ポテンシャル線と流線の形がわかります。(18) から, どの方向へ流れるかがわかるわけであり
ます。

(17) の第 2 式において, $\psi=0$ としますと,

(a) $\cos \xi=0, \quad \xi=\pm\pi/2, \quad x=\pm a$

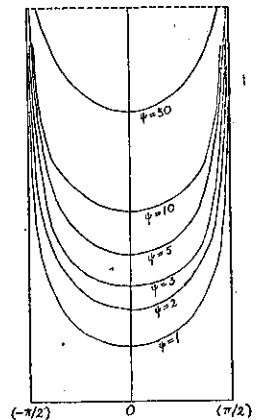
(b) $\sinh \eta=0, \quad \eta=0, \quad y=0$

つまり, 矩形の左右兩邊と, 下の 1 邊とが, $\psi=0$ に對應する流線であることが
わかります。 $\psi=1$ では, $\cos \xi \sinh \eta=1$ となり, これを追跡してみますと, 図-5
において, $\psi=1$ と記してあるやうな曲線になります。 $\psi=2, 3, \dots$ などに對する
ものを求めると, これも図に示すやうな形になります。これで, 流線の形は大體見
當つくわけですが, 次に流れの方向を調べてみます。(18) の第 2 式へ, $\xi=0$ (矩形
中央の對稱軸) とおきますと, $\tan \xi=0$ だから, $\alpha=0$ です。これは, 對稱軸 $\xi=0$
の上では, 流れの向きが水平であることを示します。しかも, (18) の第 2 式

$$\alpha = \tan^{-1} \{ \tan \xi \tanh \eta \}$$

において, η は, いまの場合必ず正であります。だから, ξ が正であると α も正

図-5.



になり、 ξ が負だと α も負になるわけです。 $\xi=0$ なる縦線の右側では、流れが上向きであり、縦線の左側では流れが下向きだといふわけであります。だから、流れは、大体において、矩形の左上の隅角から出て、右上の隅角へ向ふことがわかります。ところで、 $\cos \xi \sinh \eta = \psi$ から出る流線は、左または右上の角へ、正しく集まつては呉れないのであります。また α の値も、矩形の上部の邊（図-5 に點線で示した邊）の上で、0 でないところを生じます。即ち、流線は、上部隅角に極く接近した點で、矩形の上邊と交はることになります。しかし、これは $\sin \xi$ を、 $\sin \xi$ に等しいと見なしたことに、原因があつて、本當は、左上の角から、右上の角へ向ふ流れだと思はれるのであります。なぜならば、

1. $w = \sin \xi$ は、 z 矩形の 4 邊を、 w 實軸 ($\psi=0$) へ寫してゐる。
2. w 平面における $\psi=2, 3, \dots$ などの直線は、 w 實軸に平行であつて、實軸とは、決して交らない。
3. w 平面で相交らない諸直線は、それを z 平面へ寫像した場合にも、決して相交らない。これは、等角寫像の性質から、當然いへることであります。
4. だから、 z 平面の流線が、矩形の上邊（それは w 平面では $\psi=0$ の一部である）を切ることは、決してあり得ないのであります。

矩形の上邊を流線が切らない筈としますと、矩形の左上の角に噴出し (source) があつて、右上の角に吸込 (sink) のある流れになるわけであります。

$\sin \xi$ は $4K$ 及び $2iK'$ の週期をもちますから、横へ四つ、縦へ二つの矩形を並べてみます。すると、噴出し (+) と吸込 (-) とが、横へ一つおきに並んでゐる場合の流を示すことがわかります

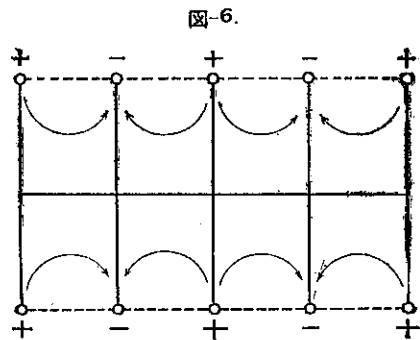


図-6 にそれを示します。図に實線で示したものは、流域の境界になるわけで、これらに沿ふての速度は 0 であります。図に點線で示したものは噴出しから吸込へ向ふ最短距離で、速度の一番大きいところであります。図-6 に示した 8 個の矩形は、これだけを 1 組として、それを上下左右へ限りなく並べて行くことができます。 $w = \sin \xi$ なる函数は、それらのすべてを表はすわけであります。

IV. 弾性学と水理学との比較

以上述べたところは、ホンの僅かな例にすぎませんけれども、一般に、次のことがいへると思はれます。

二次元ポテンシャル流動

- (1) 與へられた図形の境界線を、 w 平面の直線に寫像できれば、その寫像函数に對する流れが、理論上、いつでも存在する。
- (2) 境界条件を考へるとき、複素函数を用ひるならば、流れの微分方程式を必ず満たすことになる。

二次元弾性学

- (1) 等角寫像を行ふても、応力の方程式は、別にこれを考慮する必要がある。
- (2) 等角寫像に応じて、応力式の変數変換を行ふことができ始めて、解式の探求が可能になる。

これを一言でいひますと、境界線を等角寫像した場合、二次元ポテンシャル流動においては、必ず、なにらかの流れが與へられるのでありますけれども、二次元弾性学においては、その等角寫像の役に立たない事が、屢々あり

得るのであります。

弾性学において、行きづまりになるといふその原因は、応力式の変数変換が行はれるか否かにあります。応力方程式は、 x, y 座標、または r, θ 座標で示されてゐるのが、普通でありまして、それを α, β 座標に変へるためには、数学上、次の関係式が必要であります。

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(\alpha, \beta), & y &= F_2(\alpha, \beta) \\ \text{或は} & & r &= F_3(\alpha, \beta), & \theta &= F_4(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

いま、 $z = x + iy = re^{i\theta}$, $w = \alpha + i\beta$ としますと、(19) は、 $z = F(w)$ なる函数の虚實を分離したものに等しいわけでありまして、しかるに、等角寫像は、一般に $w = f(z)$ の形で示されることが多いのであります。だから、次のやうに、結論することができると思はれます。

『等角寫像の函数が $w = f(z)$ であるとき、その逆函数 $z = F(w)$ について、右邊の虚實の分離ができるならば、問題の解が、可能である。虚實の分離ができないときは、その等角寫像を放棄しなければなりません』。

円板の応力解析が、等角寫像の適用によつて解けたのは、寫像函数

$$w = \log(z/a)$$

に關し、逆函数 $z = ae^w$ の右邊の虚實を分離して、

$$x = ae^\alpha \cos \beta, \quad y = ae^\alpha \sin \beta$$

とすることができたからであります。この y を、応力方程式 (4) へ入れて、(6) を導くことができました。(6) は α, β 座標に關する応力方程式であります。

矩形板の問題においては、寫像函数が、 $w = \operatorname{sn}(Kz/a)$

でありまして、その逆函数は、

$$z = \frac{a}{K} \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

となりますが、この右邊の虚實を分離することが、私にはできませんでした。それで、応力方程式を出すことが、不可能になり、行きづまつたわけでありまして。

かつて、私は、水底トンネルに及ぼす水圧の影響を解いたことがありました(土木學會誌、昭和4年8月號)。そのときは、2極座標 bipolar coordinates と通稱されてゐる等角寫像を用ひました。その函数は、

$$w = \log \frac{z + ia}{z - ia} \dots\dots\dots(20)$$

この逆函数は、 $z = ia(e^w + 1)/(e^w - 1)$ になり、虚實を分離しますと、

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \beta / (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ y &= a \sinh \alpha / (\cosh \alpha - \cos \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

$F = \text{Airy}$ の応力函数 とすれば、この F は、次の微分方程式を満たす筈であります。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

この変数 x, y を、(21) によつて定義される α, β へ変換いたしますと、(22) が次のやうになります。

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] F_0 = 0 \dots\dots\dots(23)$$

こゝで $F_0 = F/h$, h は寫像擴大率であつて、(20) なる式については、

$$h = \left| \frac{dw}{dz} \right| = (\cosh \alpha - \cos \beta) / a$$

この h は, (20) を二次元ポテンシャル流動と考へた場合, 速度の大きさを示す式に等しいわけです。

F に対する分応力の式は,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots(24)$$

この関係式も, (21) によつて, α, β 座標へ変換しなければなりません。その結果を書きますと,

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right] F_0 \\ \widehat{\beta\beta} &= \frac{1}{\alpha} \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] F_0 \\ \widehat{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\alpha} \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] F_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

式 (23) と境界条件とを満たすやうな F_0 について, (25) から分応力を求めるわけであります。等角寫像 (20) が, 弾性学へ応用できたのは, 式 (21) が書けたからであります。もし, (21) の分離ができないならば, (23) も (25) も出ませんから, 問題が解けないといふことになるわけであります。

昭和 12 年 4 月土木學會第 1 回年次學術講演會において, 安藏博士の御發表になられた論文も, この bipolar coordinates によつて居られます。弾性学では, 有用な座標系の一つと考へられます。