論 說 報 告
第23卷第6號 昭和12年6月

ハンドルの操作を指定した場合に自動車の前後輪が畫く曲線に就て

准員 黑 岩 直*

On the Curves described by the Wheels of an Automobile

By Sunao Kuroiwa, C. E., Assoc. Member.

要 旨

本文は著者の卒業論文に若干の修正を加へたものである。

第1章に於ては自動車車輪の畫く曲線形に對する微分方程式を導き，次にその一般解式を與へてゐる。第2章に於ては，速度及操向角を一定に保つとき，車輪の畫く曲線が円になることを數学的に證明し，半径と操向角の關係及半径が速度に無關係であることを記してゐる。第3章に於ては速度を一定に保ち，一方操向角を時間と共に徐々に増すとき，車輪の畫く曲線がクロトイド曲線になることを數学的に證明し，その曲率半径と操向角の關係及曲線形が自動車速度に無關係であることを，述べてゐる。第3章の數理解法は從來，これを企てた人もあつたが[1]，クロトイド曲線を豫測しながら，その式が得られなかつたものである。

目 次

緒 言

道路曲線部は自動車の走行に對し，種々の困難なる問題を提供してゐる。曲線部の設計に自動車の走行を考慮に入れた方法が今日まで既に多く考へられてゐるけれども，其處には尙研究の餘地があることも確かである。

著者は本文に於て，自動車の走行と曲線形との關係について，一つの數理的解法を考へてみたのである。それは自動車のハンドルの廻はし方を指定した場合に，自動車の車輪が畫く曲線形を數学的に求め，その結果を道路曲線部の設計に關聯させたいといふ考へである。

記述の簡單をはかるため二三の記號を次のやうに定める。

---

* 工学士 兵庫縣廳土木部道路課勤務

(1) 例へば建築雜誌，昭和8年，頁 1077, 1723.

1. 操向角 φ

自動車が曲線部を走る時，前輪の向きと後輪の向きとの振れの角を指す。その正負の決定は，後輪の方向線を基準として，反時計様に計つたものを正とする。

2. 螺旋角 (spiral angle) θ, θ_1

後輪が畫く曲線上の任意點に於て切線を引くとき，その切線がx軸の正方向となす角を螺旋角と名付け，θ であらはす。尙前輪の畫く曲線に關しても螺旋角が考へられそれは θ_1 で示す。

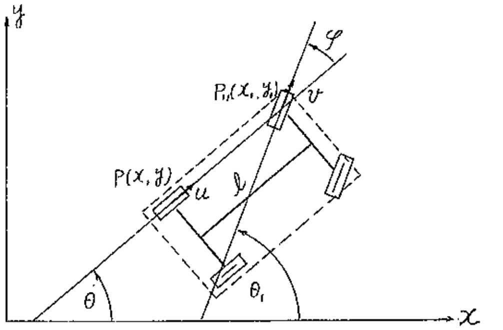
3. 軸距 (wheel base) l

前輪軸と後輪軸との距離である。軸距の大さは小型自動車で約 2m，大型自動車で約 4m が普通である。

4. 速度 u, v

後輪の速度を u m/sec とし，前輪の速度は v m/sec とする。曲線部を走る時，u と v とはその方向を異にするわけである。

図-1. 自動車車輪位置關係図



第1章 基本方程式

1. 基本の諸關係

自動車は元來 4 輪であるが，數學的取扱の便宜のため片側の前，後輪だけを考へることにする。

さて直交座標系 x, y を選び任意時刻 t に於ける自動車車輪の位置を図-1 のやうであるとする。

x, y:　時刻 t に於ける後輪の位置の座標

x_1, y_1:　時刻 t に於ける前輪の位置の座標

θ:　後輪が畫く曲線に對する螺旋角

θ_1:　前輪の畫く曲線に對する螺旋角

であるから次の關係がある。

$$\varphi=\theta_1-\theta \quad \cdots\cdots(1)$$

又後輪の速度が u であり，前輪の速度は v であるから次の關係がある

$$u\cos\theta=\frac{dx}{dt},\quad u\sin\theta=\frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$v\cos\theta_1=\frac{dx_1}{dt},\quad v\sin\theta_1=\frac{dy_1}{dt} \quad \cdots\cdots(3)$$

尙図-1 から次の幾何学的關係の成立することが分る。

$$x=x_1-l\cos\theta,\quad y=y_1-l\sin\theta \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta,\quad \frac{dy_1}{dx_1}=\tan\theta_1 \quad \cdots\cdots(5)$$

2. 微分方程式の誘導

(4) 式を時間 t に關して微分することによつて夫々 (6) 及(7) 式を得。

$$l\sin\theta\, d\theta/dt=dx/dt-dx_1/dt \quad \cdots\cdots(6)$$

$$l\cos\theta\, d\theta/dt=dy_1/dt-dy/dt \quad \cdots\cdots(7)$$

$(6)\times\sin\theta_1+(7)\times\cos\theta_1$ を計算すれば

$$l\,d\theta/dt(\sin\theta_1\sin\theta+\cos\theta_1\cos\theta)=dx/dt\sin\theta_1-dy/dt\cos\theta_1-dx_1/dt\sin\theta_1+dy_1/dt\cos\theta_1$$

$$l\,d\theta/dt\cos(\theta_1-\theta)=u(\sin\theta_1\cos\theta-\cos\theta_1\sin\theta)-v(\cos\theta_1\sin\theta_1-\cos\theta_1\sin\theta_1)$$

$$l\cos\varphi\,d\theta/dt=u\sin(\theta_1-\theta)=u\sin\varphi$$

故に
$$d\theta/dt=\frac{1}{l}u\tan\varphi \quad\cdots\cdots(8)$$

(8) 式が自動車の位置に關する微分方程式である。

3. 微分方程式の一般的解法

l は一定値にして θ, u, φ は一般に時間 t の函數である。(8) 式を書きかへると

$$d\theta=\frac{1}{l}u\tan\varphi\,dt \quad\cdots\cdots(9)$$

初めの條件として $t=0$ に於て後輪は座標原點 ($x=0$, $y=0$) にあつて且つその向きが x 正方向と一致してゐるとする，即ち $t=0$ に對し $x=0$, $y=0$, $\theta=0$ とする。任意時刻 t に於ては，後輪の位置は (x, y) にしてその向きは x 正方向と θ の角をなす。よつて (9) 式を積分すれば

$$\int_0^\theta d\theta=\frac{1}{l}\int_0^t u\tan\varphi\,dt$$

$$\theta=\frac{1}{l}\int_0^t u\tan\varphi\,dt \quad\cdots\cdots(10)$$

之が微分方程式 (8) の一般解である。u 及 φ が時間の函數として與へられゝば上式の右邊の積分が出來るわけである。

即ち螺旋角の一般式が分ることになり，從て曲線の性質が明かになる筈である。次に (10) 式で得た θ を使へば (2) 式より後輪の座標 x, y を求めることが出來る。その計算は次の通りである。

$$dx/dt=u\cos\theta, \quad 或は \quad dx=u\cos\theta\,dt$$

これを積分するに當り，前に記した初めの條件を入れると

$$x=\int_0^t u\cos\theta\,dt \quad\cdots\cdots(11)$$

又 $dy/dt=u\sin\theta$, 　或は　$dy=u\sin\theta\,dt$

同様にして前記の初めの條件により

$$y=\int_0^t u\sin\theta\,dt \quad\cdots\cdots(12)$$

式 (11), (12) の右邊に於て，u と θ が t の函數として與へられるならば，x, y が求められる。

上のやうにして x, y が求められゝば，それ等を (4) 式へ代入して後輪が畫く曲線の座標 x_1, y_1 を求めることが出來る。即ち

$$x_1=x+l\cos\theta, \quad y_1=y+l\sin\theta \quad\cdots\cdots(13)$$

第 2 章　自動車の速度及操向角が一定の場合に前，後輪が畫く曲線

1. 後輪が畫く曲線

今　$u=u_0=$ 一定，$\varphi=\varphi_0=$ 一定　とすれば

$$\theta=\frac{1}{l}\int_0^t u\tan\varphi\,dt=\frac{1}{l}u_0\tan\varphi_0\int_0^t dt=\frac{1}{l}u_0\tan\varphi\cdot t$$

玆に便宜上 $u_0\tan\varphi_0/l\equiv m$ とおけば $\theta=mt$ である。

$$x=\int_0^t u\cos\theta\,dt=u_0\int_0^t \cos mt\,dt=\frac{u_0}{m}\Big|\sin mt\Big|_0^t$$

$$x=l\cot\varphi_0\sin mt \quad\cdots\cdots(14)$$

$$y=\int_0^t u\sin\theta\,dt=u_0\int_0^t \sin mt\,dt=\frac{u_0}{m}\Big|-\cos mt\Big|_0^t$$

$$y=l\cot\varphi_0(1-\cos mt)$$

或は $y-l\cot\varphi_0=-l\cot\varphi_0\cos mt \quad\cdots\cdots(15)$

(14) 式と (15) 式を自乘して加へると次のやうになる。

$$x^2+(y-l\cot\varphi_0)^2=l^2\cot^2\varphi_0$$

これは円の方程式である。而してその半徑

$$R=l\cot\varphi_0$$

中心の座標は

$$x=0,\quad y=l\cot\varphi_0$$

即ち y 軸上に中心があり x 軸に接する円である。この円は速度には關係しない。

2. 前輪が畫く曲線

前輪の座標は $x_1=x+l\cos\theta$, $y_1=y+l\sin\theta$ である。此等の式に前出の x, y 及 θ の値を入れゝば

$$x_1=l\cot\varphi_0\sin mt+l\cos mt \quad\cdots\cdots(16)$$

$$y_1=l\cot\varphi_0(1-\cos mt)+l\sin mt$$

或は $(y_1-l\cot\varphi_0)=-l\cot\varphi_0\cos mt+l\sin mt \quad\cdots\cdots(17)$

(16) 式と (17) 式を自乘して加へると

$$x_1^2+(y_1-l\cot\varphi_0)^2=(l\cot\varphi_0)^2+l^2$$

これも円の方程式である。中心の座標は

$$x_1=0,\quad y_1=l\cot\varphi_0$$

即ち後輪の畫く円の中心と一致する

$$\text{半徑 } R_1=\sqrt{(l\cot\varphi_0)^2+l^2}$$

$$=l\sqrt{1+\cot^2\varphi_0}$$

$$=l\,\mathrm{cosec}\,\varphi_0$$

前輪と後輪の畫く二つの円は半徑が異る。その差は

$R_1-R=l(\mathrm{cosec}\,\varphi_0-\cot\varphi_0)$ である。

φ_0 の種々の値に對する R_1, R 及 R_1-R の値を示せば**表-1** のやうになる。

表-1.

l(m)	φ_0	R_1(m)	R(m)	R_1-R(m)
4	5°	45.87	45.72	0.15
4	10°	23.04	22.68	0.36
4	20°	11.70	10.99	0.71
4	30°	8.00	6.93	1.07

3. 半徑と操向角との關係

後輪が畫く曲線の曲率半徑 R は，前に得たところによれば $R=l\cot\varphi_0$ である。從て

$$\cot\varphi_0=\frac{R}{l}\quad\text{或は}\quad\varphi_0=\cot^{-1}\left(\frac{R}{l}\right)$$

道路曲線部が円曲線である場合に，その半徑と操向角の關係が上式で與へられるわけである。今 $l=4.00$ m にとつて R と φ_0 との關係を計算すれば**表-2** のやうである。

4. 曲線の半徑と擴幅との關係

前輪と後輪の曲率半徑の差を w とすれば，曲線部に於ては，少くともこの w だけ，1 車線の有效幅員を廣くする必要がある。今その量を，上に得た理論より計算すれば，

$$w=R_1-R=l\operatorname{cosec}\varphi_0-R$$

然るに，$R=l\cot\varphi_0$ 故に $\cot\varphi_0=\frac{R}{l}$，或は $\varphi_0=\cot^{-1}\left(\frac{R}{l}\right)$

從て $w=l\operatorname{cosec}\left[\cot^{-1}\left(\frac{R}{l}\right)\right]-R$

この w は，曲線の擴幅を推定する一つの資料とするに足るであらう。

表-2.

R(m)	φ_0	R(m)	φ_0
50	4°34′	150	1°31′
60	3 48	200	1 08
70	3 16	250	0 55
80	2 51	300	0 46
90	2 33	350	0 39
100	2 17	400	0 34
		500	0 27

第 3 章　自動車の速度は一定にして操向角は時間と共に變化する場合に前，後輪が畫く曲線

1. 操向角の變化

操向角 φ が，時間と共に變化すると考へる場合に，之を數式上，どんな形で示すかに就ては，種々の方法があると思ふけれども，最も簡單な方法は，時間の一次式として，例へば $\varphi=\beta t$ とする方法である。之に依ると，式形の簡單な點に於て利益があるが，時間 t の增すに從て φ が限りなく大きくなる。而るに自動車に於ては，その構造上 φ が限りなく增すことは實際上出來ない。依つて此の場合 φ を次のやうに假定する。

$$\varphi=\tan^{-1}\beta t$$

此の式に依れば，t が限りなく大きくなつた場合でも，φ の値は 90° を超へない。尤も自動車の構造上，φ は 90° に達し得ないことが普通であるが，一次式で示すよりは數學的に見て無理が少いと考へられる。

尙ほ上式を採る今一つの理由は，螺旋角 θ を求める時の積分計算が，著しく容易になる點にある。何となれば，θ を求める式 (10) に於て，

$$\tan\varphi=\tan(\tan^{-1}\beta t)=\beta t$$

となり，(10) 式の計算が容易になるのである。今假に，$\beta=0.002$ にとれば（β の單位は $\sec^{-1}$ である），t の種々の値に對する φ の大さは表-3 のやうである。

2. 後輪が畫く曲線

速度を一定にとるとして，その値を u_0，操向角は前述のやうに $\varphi=\tan^{-1}\beta t$ とすると，(10) 式から，θ は次のやうに計算される。

表-3.

t(sec)	0	1	5	10	15	20	30
βt	0	0.002	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06
φ(degree)	0	7′	34′	1°09′	1°43′	2°17′	3°26′

$$\theta=\frac{1}{l}\int_0^t u\tan\varphi\,dt=\frac{u_0}{l}\int_0^t\beta t\,dt=\frac{u_0\beta}{l}\left|\frac{t^2}{2}\right|_0^t=\frac{u_0\beta}{2l}t^2$$

こゝで便宜上，$a=\frac{u_0\beta}{2l}$ とおけば

$$\theta=at^2$$

この式によつて螺旋角の大さが radian の單位で與へられるのである。そして θ が時間の 2 乘に比例することが判る。

螺旋角 θ を得たからその値を (11) 式へ入れゝば横距 x が求められる。又 (12) 式へ入れゝば縦距 y が出る。それらを計算すれば,

$$x=\int_0^t u\cos\theta\,dt=u_0\int_0^t\cos at^2\,dt$$

$$\cos at^2=1-\frac{1}{2!}(at^2)^2+\frac{1}{4!}(at^2)^4-\frac{1}{6!}(at^2)^6+\cdots\cdot$$

$$x=u_0\int_0^t\left[1-\frac{1}{2!}(at^2)^2+\frac{1}{4!}(at^2)^4-\frac{1}{6!}(at^2)^6+\cdots\cdot\right]dt$$

$$=u_0t\left[1-\frac{1}{2!\times5}(at^2)^2+\frac{1}{4!\times9}(at^2)^4-\frac{1}{6!\times13}(at^2)^6+\cdots\cdot\right]$$

同様にして $y=\int_0^t u\sin\theta\,dt=u_0\int_0^t\sin at^2\,dt$

$$\sin at^2=at^2-\frac{1}{3!}(at^2)^3+\frac{1}{5!}(at^2)^5-\frac{1}{7!}(at^2)^7+\cdots\cdot$$

$$y=u_0\int_0^t\left[at^2-\frac{1}{3!}(at^2)^3+\frac{1}{5!}(at^2)^5-\frac{1}{7!}(at^2)^7+\cdots\cdot\right]dt$$

$$=u_0t\left[\frac{1}{3}at^2-\frac{1}{3!\times7}(at^2)^3+\frac{1}{5!\times11}(at^2)^5-\frac{1}{7!\times15}(at^2)^7+\cdots\cdot\right]$$

u_0t は, $t=0$ より $t=t$ に至る迄の曲線長である。之を L_t とおき, 尙, at^2 は螺旋角 θ に等しいから, 上記の x, y をかき直せば,

$$x=L_t\left[1-\frac{1}{2!\times5}\theta^2+\frac{1}{4!\times9}\theta^4-\frac{1}{6!\times13}\theta^6+\cdots\cdot\right]\cdots\cdots(18)$$

$$y=L_t\left[\frac{1}{3}\theta-\frac{1}{3!\times7}\theta^3+\frac{1}{5!\times11}\theta^5-\frac{1}{7!\times15}\theta^7+\cdots\cdot\right]\cdots\cdots(19)$$

(18), (19) 式は後輪の畫く曲線の方程式であつて, 之はクロトイドの式である。

曲率半徑 R の一般式は,

$$R=\frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}$$

(2) 式に於て, u を u_0 と置き, θ を at^2 と置けば

$$\frac{dx}{dt}=u_0\cos at^2,\qquad \frac{dy}{dt}=u_0\sin at^2$$

之を t に關して微分すれば

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2u_0at\sin at^2,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=2u_0at\cos at^2$$

これらの式を代入すると, 上に示した R の式の分子は u_0^3 になる。又 R の式の分母は, $2u_0^3at$ となる。從て

$$R=\frac{l}{\beta t}\cdots\cdots(20)$$

或は $R=l\cot\varphi\cdots\cdots(21)$

(20), (21) 式より見れば, 曲率半徑は軸距 l と操向角 φ に依つてのみ定まり, 後輪の速度 u_0 には無關係である。即ち, 大きい速度で走つても, 小さい速度で走つても, 後輪の畫く曲線の形は同一である。又, 操向角は, β 及

t に依つて變るから，時刻 t によつて半徑が變り，定數 β を變へれば別の曲線になることが判る。β は，操向角を變へる速さに關する數値であつて，之を大にとる程，曲率半徑が急速に小さくなる。

(20) 式の右邊の分母子に u_0 をかけ，更に $u_0t=L_t$ とおけば，

$$R=\frac{c}{L_t}\quad 但し\quad c=\frac{lu_0}{\beta} \qquad \cdots\cdots(22)$$

(22) 式に於て右邊の l, u_0 及 β は，此の場合一定値であるから，c は定數である。從て，曲率半徑 R は，曲線の長さに逆比例することが判る。この點からいつても，上に得た曲線はクロトイド (Klothoide) である。(22) 式の c のうちには，速度 u_0 が含まれてゐる。之は，一見，曲率半徑 R が，速度に支配されるかのやうに見へるけれども，實は分母にある曲線長 L_t が，u_0 に依つて變はるものであつて，分母と分子と併せ考へれば，速度 u_0 の影響はないのである。

今 $l=4.00\,\mathrm{m}$, $\beta=0.002$, $u_0=4\,\mathrm{m/sec}$ を與へて x, y の數値，曲率半徑及曲線長を計算すれば，表-4 の通りである。

表-4.

t (sec)	x (m)	y (m)	R (m)	L_t (m)
0	0	0	∞	0
1	4.00	0	2,000	4
5	20.00	0.17	400	20
10	40.00	1.33	200	40
15	59.97	4.50	133	60
20	78.73	10.54	100	80

3. 前輪の畫く曲線

前輪の畫く曲線の座標は，(4) 式より次のやうになる。

$$x_1=x+l\cos\theta,\quad y_1=y+l\sin\theta \qquad \cdots\cdots(23)$$

此等の式に (18), (19) 式の x, y を入れゝば

$$x_1=l\cos\theta+L_t\left[1-\frac{1}{2!\times5}\theta^2+\frac{1}{4!\times9}\theta^4-\frac{1}{6!\times13}\theta^6+\cdots\right] \qquad \cdots\cdots(24)$$

$$y_1=l\sin\theta+L_t\left[\frac{1}{3}\theta-\frac{1}{3!\times7}\theta^3+\frac{1}{5!\times11}\theta^5-\frac{1}{7!\times15}\theta^7+\cdots\right] \qquad \cdots\cdots(25)$$

但し $\theta=at^2$ である。

$$a=\frac{u_0\beta}{2l}$$

$l=4.00\,\mathrm{m}$, $\beta=0.002$, $u_0=4\,\mathrm{m/sec}$ の時の x_1, y_1 の値を計算すれば表-5 のやうになる。次に，前輪の畫く曲線の曲率半徑を求めよう。先づ

$$x=u_0\int_0^t\cos at^2\,dt,\quad y=u_0\int_0^t\sin at^2dt$$

$$\theta=at^2$$

を (23) 式へ代入して，t に關して微分すれば

$$\frac{dx_1}{dt}=u_0\cos at^2-2atl\sin at^2$$

$$\frac{dy_1}{dt}=u_0\sin at^2+2atl\cos at^2$$

再び t に關して微分すれば

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-2u_0at\sin at^2-2al\sin at^2-4a^2t^2l\cos at^2$$

表-5.

t (sec)	x_1 (m)	y_1 (m)
0	4.00	0
1	8.00	0.01
5	24.00	0.26
10	43.98	1.73
15	63.87	5.39
20	82.41	12.10

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=2u_0at\cos at^2+2al\cos at^2-4a^2t^3l\sin at^2$$

從て

$$\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=u_0{}^3(1+\beta^2t^2)^{\frac{3}{2}}=u_0{}^3\sec^3\varphi$$

$$\frac{dx_1}{dt}\frac{d^2y_1}{dt^2}-\frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dy_1}{dt}=\frac{u_0{}^3\beta t}{l}\left[1+\beta^2t^2+\frac{l}{u_0t}\right]$$

曲率半徑 R_1 は上の 2 式の比によつて與へられる。

$\beta t=\tan\varphi,\quad u_0t=L_t$ （曲線長）

とおいて整理すれば

$$R_1=\frac{l}{\sin\varphi}\,\frac{1}{1+l\cos^2\varphi/L_t}$$

然るに $l\cos^2\varphi/L_t$ は，原點近傍を除けば一般に 1 に對して微小である。よつて近似的に，曲率半徑は，

$$R_1=\frac{l}{\sin\varphi}\quad\cdots\cdots(26)$$

こゝで φ は時間と共に変る。R_1 が自動車の速度に無關係であることが判る。尙 (26) 式に於て $\varphi=\varphi_0$ （時間に無關係）とおけば $R_1=l\operatorname{cosec}\varphi_0$ になる。之は第 2 章 2. の終りに得た式に等しい。

前輪と後輪とは，距離に於て l だけの差がある。後輪の速度 u_0 をもつて，この l を進むに要する時間は l/u_0 である。よつて，前輪が時刻 t に於て占めた位置の近傍へ後輪が達するのは，時刻 $t+l/u_0$ に於てゞある。この位置に於て前輪と後輪が畫く曲線の曲率半徑を比較しよう。先づ (20) 式の t を $t+l/u_0$ とおけば

$$R=\frac{l}{\beta(t+l/u_0)}$$

之と (26) 式との差を求めれば，次の通りである。

$$R_1-R=\frac{l}{\sin\varphi}-\frac{l}{\beta t+\beta l/u_0}$$

こゝで $\beta t=\tan\varphi,\quad u_0t=L_t$ とおけば

$$R_1-R=\frac{l}{\sin\varphi}\left[1-\frac{\cos\varphi}{1+l/L_t}\right]$$

原點から遠い點では l/L_t が 1 に對して省略出來るから

$$R_1-R=l\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\quad\cdots\cdots(27)$$

この式により，前，後輪が畫く曲線の曲率半徑の差が求められる。

終りに，本文について懇切なるお指導を頂きました久野重一郎先生に厚く御禮申します。