論　說　報　告

第23卷第4號　昭和12年4月

捲立円形隧道の応力分布

准員　谷本勉之助*

The Distribution of Stress round a Circular Tunnel with Lining

By Bennosuke Tanimoto, C. E., Assoc. Member.

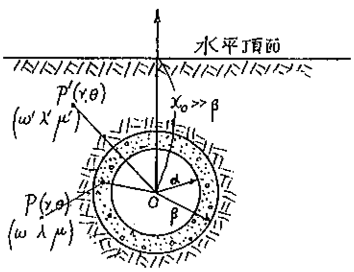
要　旨

捲立円形隧道に於て，捲立部及その周圍の重力体の応力分布を調べたものである。

1. 緒　言

起り得る変形が plane strain であるとして，重力の働く彈性体内に水平な円孔を開けた時，その周圍に起る可き応力分布の問題は，既に山口教授によつて解決せられてゐるが,[1] それに一定の厚さの同心円的捲立のある場合に就ては，未だ解かれたものがない様である。それで筆者は斯かる場合の孔の周圍の応力分布，並に捲立内に生ず可き応力分布を Airy の Stress-function を使つて解き，之が捲立のない場合，即ち山口教授の解かれたものと如何に異るかを調べ，且つ假定した地山の性質其の他の定められた條件に對して，適當な捲厚を決めてみた。

図-1.



計算に於ては，便宜上，此の重力体の上面は水平であるとし，且つ此の円孔附近の応力分布に就ては，土被りが相當大きくて，上面の影響を無視し得るものと假定した。

本論文は，山口教授，最上助教授の御指導の下に書き上げたものである。兩先生に厚く御禮を申し上げる次第である。

尙ほ式の表し方に就ては，通常の約束と多少異るものを使つたが，それは照合と計算の便利の爲である。

2. 極座標系による stress の形

Body force を有する彈性体の微小部分の，二次元的な平衡の基本方程式は，極坐標系による時は

$$\frac{\partial\widehat{\gamma\gamma}}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\widehat{\gamma\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\gamma}(\widehat{\gamma\gamma}-\widehat{\theta\theta})=\omega\cos\theta$$

$$\frac{\partial\widehat{\gamma\theta}}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\widehat{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{2}{\gamma}\widehat{\gamma\theta}=-\omega\sin\theta$$

各文字の在るべき位置を変へなければ，上式は次の様に略記しても間違ひは起らない。照合と計算との手間を大いに節約し得ることもあるので，以後すべてに此の種の略記を許して頂く。複雜な式程，此の種の略記が好都合な様である。

* 工学士

1) 土木学會誌 15-4 (昭 4.4) 頁 291-303.

$$\left[\frac{\partial}{\partial\gamma},\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma},\widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\gamma},\widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}+\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}-\widehat{\theta\theta}\\ 2\widehat{\theta\gamma}\end{bmatrix}=\omega\begin{bmatrix}\cos\\ -\sin\end{bmatrix}\theta \quad\cdots\cdots(2{\cdot}1)$$

茲に $\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}\text{半径}\\ \text{切線}\end{bmatrix}$ 方向の normal stress,

$\widehat{\gamma\theta}$: shearing stress ($\widehat{\theta\gamma}=\widehat{\gamma\theta}$)

ω : 重力体の單位容積の重量（深さにより不変と假定）

で，坐標系は**圖-1**の様に原點を重力体中にとり，原線の向きは鉛直上方とする。

(2.1) の $\widehat{\gamma\gamma}$, $\widehat{\gamma\theta}$, $\widehat{\theta\theta}$ は

$$\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\ -\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\\ \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\end{bmatrix}\phi+\omega\gamma\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\cos\theta \quad\cdots\cdots(2{\cdot}2)$$

で，此の中の ϕ は

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4\phi=0\\ \text{或は}\quad&\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\phi=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2{\cdot}3)$$

を満足する函數で，此所では J. H. Michell により求められてゐるもの[2)]を使ふ。即ち

$$\begin{aligned}\phi(\gamma\theta)=&(a_0\log\gamma+b_0\gamma^2+c_0\gamma^2\log\gamma)+d_0\gamma^2\theta+d_0'\theta\\ &+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}a_1\\ c_1\end{bmatrix}\gamma\theta\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}b_1\\ d_1\end{bmatrix}\gamma^3+\begin{bmatrix}a_1'\\ c_1'\end{bmatrix}\gamma^{-1}+\begin{bmatrix}b_1'\\ d_1'\end{bmatrix}\gamma\log\gamma\right\}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\begin{bmatrix}A_n\\ B_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(2{\cdot}4)\end{aligned}$$

茲に $$\begin{bmatrix}A_n\\ B_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n\\ c_n\end{bmatrix}\gamma^n+\begin{bmatrix}b_n\\ d_n\end{bmatrix}\gamma^{n+2}+\begin{bmatrix}a_n'\\ c_n'\end{bmatrix}\gamma^{-n}+\begin{bmatrix}b_n'\\ d_n'\end{bmatrix}\gamma^{-n+2}\quad\cdots\cdots(2{\cdot}5)$$

(2·4) を (2·2) に代入して stress は夫々

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma\gamma}=&\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\phi+\omega\gamma\cos\theta\\ =&\left\{a_0\gamma^{-2}+2b_0+(1+2\log\gamma)c_0\right\}+2d_0\theta+0\\ &+\left\{\begin{bmatrix}a_1\\ -c_1\end{bmatrix}\gamma^{-1}+\begin{bmatrix}2b_1+\omega\\ 2d_1\end{bmatrix}\gamma+\begin{bmatrix}-a_1'\\ -c_1'\end{bmatrix}2\gamma^{-3}+\begin{bmatrix}b_1'\\ d_1'\end{bmatrix}\gamma^{-1}\right\}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}\\ &+\sum\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma}\right)\begin{bmatrix}A_n\\ B_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(2{\cdot}6)\end{aligned}$$

$$\widehat{\gamma\theta}=-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

---

2) 本式は Timoshenko : Theory of Elasticity の中にあるものによつたが，Michell の原論文 (1899 年 Proc. London Math. Soc. XXXI. 111 頁) の中には $\gamma^2\theta$ の項がなく，$\gamma\cos\theta$, $\gamma\sin\theta$ の項がある。

$$
=\Big\{\ 0 \qquad 0 \qquad 0\ \Big\}+0+d_0'\gamma^{-2}
$$

$$
+\left\{\ 0\ +\begin{bmatrix}2b_1\\ -2d_1\end{bmatrix}\gamma+\begin{bmatrix}-a_1'\\ c_1'\end{bmatrix}2\gamma^{-3}+\begin{bmatrix}b_1'\\ -d_1'\end{bmatrix}\gamma^{-1}\right\}\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}
$$

$$
+\sum n\frac{d}{d\gamma}\begin{bmatrix}An/\gamma\\ -Bn/\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot7)
$$

$$
\widehat{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2}+\omega\gamma\cos\theta
$$

$$
=\Big\{-a_0\gamma^{-2}+2b_0+(3+2\log\gamma)c_0\Big\}+2d_0\theta+0
$$

$$
+\left\{\ 0\ +\begin{bmatrix}6b_1+\omega\\ 6d_1\end{bmatrix}\gamma+\begin{bmatrix}a_1'\\ c_1'\end{bmatrix}2\gamma^{-3}+\begin{bmatrix}b_1'\\ d_1'\end{bmatrix}\gamma^{-1}\right\}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}
$$

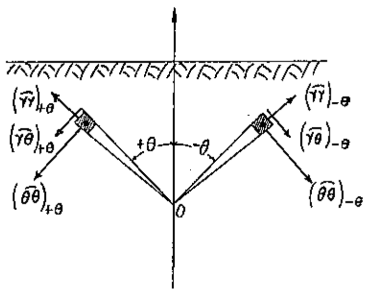
$$
+\sum\frac{d^2}{d\gamma^2}\begin{bmatrix}An\\ Bn\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot8)
$$

3. 原線に關し對稱的に分布した stress の形

Stress は原線に關し對稱的に分布してゐなければならない (図-2), 卽ち

$$
\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}_{+\theta}=\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ -\widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}_{-\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot1)
$$

図-2.



でなければならないから, 上の (2·6), (2·7), (2·8) の 3 式で, 括弧の中の上, 下の係數を夫々 U, L で代表させると

$$
\begin{bmatrix}U\\ L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U\\ 0\end{bmatrix}\ \text{及}\ d_0=d_0'=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot2)
$$

となり, 3 式は纒めて次の様になる。

$$
S\equiv\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}a_0\gamma^{-2}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}2b_0+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}c_0+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}2c_0\log\gamma\right\}
$$

$$
+\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}a_1\gamma^{-1}+\begin{bmatrix}2b_1+\omega\\ 2b_1\\ 6b_1+\omega\end{bmatrix}\gamma+\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}2a_1'\gamma^{-3}+b_1'\gamma^{-1}\right\}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}\theta
$$

$$
+\sum_{n=2}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma}\right)\\ n\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{1}{\gamma}\right)\\ \frac{d^2}{d\gamma^2}\end{bmatrix}An\begin{bmatrix}\cos\\ \mathrm{s}\\ \cos\end{bmatrix}n\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot3)
$$

(3·2) の證明は次の様である。

(2·6), (2·7), (2·8) の stress の式に對稱の關係 (3·1) を代入すると

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}2d_0\theta+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}d_0'\gamma^{-2}$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}c_1\gamma^{-1}+\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}2d_1\gamma+\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}2c_1'\gamma^{-3}+d_1'\gamma^{-1}\right\}\begin{bmatrix}\sin\\-\cos\\\sin\end{bmatrix}\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma}\right)\\n\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{1}{\gamma}\right)\\\frac{d^2}{d\gamma^2}\end{bmatrix}B_n\begin{bmatrix}\sin\\-\cos\\\sin\end{bmatrix}n\theta\cdots\cdots(3\cdot4)$$

が得られる。

θ を 2π だけ増しても，stress は元に戻らねばならない，即ち

$$\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\\widehat{\gamma\theta}\\\widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}_{\theta}=\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\\widehat{\gamma\theta}\\\widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}_{\theta+2\pi}\cdots\cdots(3\cdot5)$$

でなければならないから

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}2d_0\theta=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}2d_0(\theta+2\pi)$$

$$\therefore\ d_0=0\cdots\cdots(3\cdot6)$$

(3·4) の殘餘の項は直交 (orthogonal) で

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}d_0'\gamma^{-2}=0\cdots\cdots(3\cdot7)$$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}c_0\gamma^{-1}+\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}2d_1\gamma+\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}2c_1'\gamma^{-3}+d_1'\gamma^{-1}=0\cdots\cdots(3\cdot8)$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma}\right)\\n\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d\gamma}-\frac{1}{\gamma}\right)\\\frac{d^2}{d\gamma^2}\end{bmatrix}B_n=0,\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\cdots\cdots(3\cdot9)$$

(3·7), (3·8) は γ の勝手な値に就て成立しなければならないから

$$\left.\begin{aligned}&d_0'=0\\&c_1=d_1=c_1'=d_1'=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3\cdot10)$$

(3·9) の第 3 式を積分すると

$$B_n = Mx + N \quad (M,\ N \text{ は積分常数})$$

の形になり，第 1 式，第 2 式に代入して

$$M = N = 0$$

を容易に検し得る。

即ち，(2·5) で

$$c_n = d_n = c_n' = d_n' = 0 \qquad \cdots\cdots(3\cdot11)$$

斯くして，(3·2) は (3·6), (3·10), (3·11) で示されたのである。

(3·3) の $\sum$ の中の $n \geqq 4$ のものは，管でも周囲の重力体でも，stress 及 displacement の両方に contribute しないことを示し得る。それで (3·3) に於て，$n=2,\ 3$ のとき丈け (2·5) によつて，$\sum$ の中の

$$\mathfrak{N}_n \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{d}{d\gamma} - \dfrac{n^2}{\gamma}\right) \\ n\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{d}{d\gamma} - \dfrac{1}{\gamma}\right) \\ \dfrac{d^2}{d\gamma^2} \end{bmatrix} A_n$$

を計算しておくと

$$\mathfrak{N}_2 \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{d}{d\gamma} - \dfrac{4}{\gamma}\right) \\ 2\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{d}{d\gamma} - \dfrac{1}{\gamma}\right) \\ \dfrac{d^2}{d\gamma^2} \end{bmatrix} (a_2\gamma^2 + b_2\gamma^4 + a_2'\gamma^{-2} + b_2')$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 2a_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} 6b_2\gamma^2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} 6a_2'\gamma^{-4} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} 2b_2'\gamma^{-2}$$

$$\mathfrak{N}_3 \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{d}{d\gamma} - \dfrac{9}{\gamma}\right) \\ 3\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{d}{d\gamma} - \dfrac{1}{\gamma}\right) \\ \dfrac{d^2}{d\gamma^2} \end{bmatrix} (a_3\gamma^3 + b_3\gamma^5 + a_3'\gamma^{-3} + b_3'\gamma^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 6a_3\gamma + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} 4b_3\gamma^3 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} 12a_3'\gamma^{-5} + \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} 2b_3'\gamma^{-3}$$

になる。之等を代入して (3·3) をかき直すと c_0 を省いて[3)]

3) 後の (6·8) に此の項を入れると，θ が裸で出て dislocation を起すから。

$$S\equiv\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}a_0\gamma^{-2}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}2b_0$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}a_1\gamma^{-1}+\begin{bmatrix}1+\omega/2b_1\\1\\3+\omega/2b_1\end{bmatrix}2b_1\gamma+\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}2a_1'\gamma^{-3}+b_1'\gamma^{-1}\right\}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}\theta$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}2a_2+\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}6b_2\gamma^2+\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}6a_2'\gamma^{-4}+\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}2b_2'\gamma^{-2}\right\}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}2\theta$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}6a_3\gamma+\begin{bmatrix}-1\\3\\5\end{bmatrix}4b_3\gamma^3+\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}12a_3'\gamma^{-5}+\begin{bmatrix}-5\\-3\\1\end{bmatrix}2b_3'\gamma^{-3}\right\}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}3\theta\quad\cdots\cdots\cdots(3\cdot12)$$

之を係數を取り出し，三角函數の項を一纒めにして

$$S=\left[\begin{array}{llll}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\gamma^{-2}, & \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\gamma^{-1}, & \begin{bmatrix}1+\omega/(11)\\1\\3+\omega/(11)\end{bmatrix}\gamma, & \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\gamma^{-3}, & \gamma^{-1}\\ \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\gamma^{2}, & \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\gamma^{-4}, & \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}\gamma^{-2}\\ \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\gamma, & \begin{bmatrix}-1\\3\\5\end{bmatrix}\gamma^{3}, & \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\gamma^{-5}, & \begin{bmatrix}-5\\-3\\1\end{bmatrix}\gamma^{-3}\end{array}\right]\cdot\mathfrak{M}\Theta\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot13)$$

$$\Theta(\cos)=\begin{bmatrix}1\\ \cos\theta\\ \cos2\theta\\ \cos3\theta\end{bmatrix}$$ をあらはす

と記し

$$\mathfrak{M}\equiv\begin{bmatrix}(00),(01)\\(10),(11),(12),(13)\\(20),(21),(22),(23)\\(30),(31),(32),(33)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0, & 2b_0 & & \\ a_1, & 2b_1, & 2a_1', & b_1'\\ 2a_2, & 6b_2, & 6a_2', & 2b_2'\\ 6a_3, & 4b_3, & 12a_3', & 2b_3'\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot14)$$

でおきかへる。

上のものは管にも周圍の重力体にも共に適用できる形で，周圍の重力体では以後すべて dash 系を用ひることにすると（図-1）

$$S'=\begin{bmatrix} / & / & & \\ / & \begin{bmatrix}1+\omega/(11)'\\ 1\\ 3+\omega/(11)'\end{bmatrix}\gamma & / & / \\ / & / & / & / \\ / & / & / & / \end{bmatrix}\mathfrak{M}'\Theta\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix} \qquad\cdots\cdots(3\cdot15)$$

(／印は (3·13) に同じ)

$\mathfrak{M}'$ は (3·14) の $\mathfrak{M}$ と同様に

$$\mathfrak{M}'=\begin{bmatrix}(00)',\ (01)' & & & \\ (10)',\ (11)',\ (12)',\ (13)' \\ (20)',\ (21)',\ (22)',\ (23)' \\ (30)',\ (31)',\ (32)',\ (33)'\end{bmatrix} \qquad\cdots\cdots(3\cdot16)$$

である。

4. 水平頂面を有つ無孔重力体内の応力分布

頂面が水平で，前後左右及下方に無限に擴がつた彈性体が，Body force の作用の下にあるとき，その内部の応力分布は，山口教授により求められてゐる。[4] それに筆者の略記を許して頂き

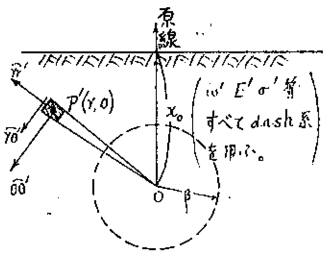
$$\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\left(1+\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\frac{W}{2}+\begin{bmatrix}3+\sigma/(1-\sigma)\\ -1+\sigma/(1-\sigma)\\ 1+3\sigma/(1-\sigma)\end{bmatrix}\frac{V}{4}\frac{\gamma}{a}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}\theta$$

$$+\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\frac{W}{2}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}2\theta+\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\frac{V}{4}\frac{\gamma}{a}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}3\theta \qquad\cdots\cdots(4\cdot1)$$

茲に

$$\begin{bmatrix}W\\ V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ a\end{bmatrix}\omega=\begin{bmatrix}\text{円孔中心迄}\\ \text{円孔半径長}\end{bmatrix}\text{の単位の柱の重量}$$

図-3.



(4·1) を筆者の notation に都合の良い様に (図-3)

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}W\\ V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ \beta\end{bmatrix}\omega'\\ &1-\frac{\sigma}{1-\sigma}=1-\frac{\sigma'}{1-\sigma'}=\tau'\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(4\cdot2)$$

でかきかへると

$$S_0'=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}(2-\tau')\frac{\omega' x_0}{2}+\begin{bmatrix}4-\tau'\\ -\tau'\\ 4-3\tau'\end{bmatrix}\frac{\omega'}{4}\gamma\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}\theta$$

$$+\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\tau'\frac{\omega' x_0}{2}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}2\theta+\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}\tau'\frac{\omega'}{4}\gamma\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}3\theta \qquad\cdots\cdots(4\cdot3)$$

4) 前掲[1]

5. 周圍の重力体にて $\gamma=\infty$ の條件を入れる

円孔から充分離れた點に於ける stress は，孔のない場合のその點に於ける stress に殆ど等しく，又極限に於て兩者は相等しいと考へ得るから

$$[(3\cdot15)\ の\ S']_{\gamma=\infty}=[(4\cdot3)\ の\ S_0'] \cdots\cdots(5\cdot1)$$

(4·3) を (3·14) に倣つてかき直すと

$$S_0'=\begin{bmatrix} / & \begin{bmatrix}+1\\0\\+1\end{bmatrix} & & \\ / & \begin{bmatrix}-4/\tau'+1\\+1\\-4/\tau'+3\end{bmatrix}\gamma^{*} & / & / \\ \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} & / & / & / \\ \begin{bmatrix}-1\\+1\\+1\end{bmatrix}\gamma & / & / & / \end{bmatrix}\begin{bmatrix} / & -(2-\tau')\dfrac{\omega' x_0}{2} & & \\ / & -\tau'\dfrac{\omega'}{4} & / & / \\ \tau'\dfrac{\omega' x_0}{2} & / & / & / \\ -\tau'\dfrac{\omega'}{4} & / & / & / \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\\ \cos\end{bmatrix}\cdots\cdots(5\cdot2)$$

之を (3·14) と較べて直ちに

$$\mathfrak{M}'\equiv\begin{bmatrix} (00)' & (01)' & & \\ (10)' & \overline{(11)'} & (12)' & (13)' \\ \overline{(20)'} & \overline{(21)'} & (22)' & (23)' \\ \overline{(30)'} & \overline{(31)'} & (32)' & (33)' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} / & -(2-\tau')\dfrac{\omega' x_0}{2} & & \\ / & -\tau'\dfrac{\omega'}{4} & / & / \\ \tau'\dfrac{\omega' x_0}{2} & 0 & / & / \\ -\tau'\dfrac{\omega'}{4} & 0 & / & / \end{bmatrix}\cdots\cdots(5\cdot3)$$

卽ち，周圍の重力体には尙ほ 8 個の未定の係數があるが，之等は円孔附近の境の條件等から定められる。

以後便宜上，既知の係數には上に bar をつける。

6. Stress を積分して displacement を求める

管と周圍の重力体との接觸面（圖-1 で $\gamma=\beta$）で，displacement を考慮に入れなければならないから，次に stress を積分して displacement を求める。

stress と strain との關係式は，極坐標系によれば

$$\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\lambda\Delta+\begin{bmatrix}2e_{\gamma\gamma}\\ e_{\gamma\theta}\\ 2e_{\theta\theta}\end{bmatrix}\mu\cdots\cdots(6\cdot1)$$

茲に

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ e_{\gamma\gamma} \\ e_{\gamma\theta} \\ e_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial\gamma},\ \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\gamma}\right) \begin{bmatrix} u, & v, & u \\ u, & 0, & 0 \\ v, & u, & -v \\ 0, & v, & u \end{bmatrix}^{5)} \cdots\cdots (6\cdot2)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \text{radial} \\ \text{tangential} \end{bmatrix} \text{ displacement}$$

$$\Delta \quad : \text{dilatation} \quad \left.\begin{matrix} e_{\gamma\gamma} \\ e_{\gamma\theta} \\ e_{\theta\theta} \end{matrix}\right\} : \text{strain}$$

(6·2) を (6·1) に代入すると

$$\begin{bmatrix} \widehat{\gamma\gamma} \\ \widehat{\gamma\theta} \\ \widehat{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda\left(\frac{\partial}{\partial\gamma},\ \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\gamma}\right)(u, v, u) + \mu\left(\frac{\partial}{\partial\gamma},\ \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\gamma}\right) \begin{bmatrix} 2u, & 0, & 0 \\ v, & u, & -v \\ 0, & 2v, & 2u \end{bmatrix} \cdots (6\cdot3)$$

$\widehat{\gamma\theta}$ を分離して

$$\widehat{\gamma\theta} = \mu\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \left(\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{\gamma}\right)v\right] \cdots\cdots (6\cdot4)$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{\gamma\gamma} \\ \widehat{\theta\theta} \end{bmatrix} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial\gamma},\ \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\gamma}\right)(u, v, u) + 2\mu\left(\frac{\partial}{\partial\gamma},\ \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\gamma}\right) \begin{bmatrix} u, & 0, & 0 \\ 0, & v, & u \end{bmatrix}$$

整頓して

$$\begin{bmatrix} \widehat{\gamma\gamma} \\ \widehat{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu \\ \lambda \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial\gamma} + \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda+2\mu \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma}\left(u + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right) \cdots\cdots (6\cdot5)$$

之から $\frac{1}{\gamma}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$ を消去すると

$$4\mu(\lambda+\mu)\frac{\partial u}{\partial\gamma} = (\lambda+2\mu)\widehat{\gamma\gamma} - \lambda\widehat{\theta\theta}$$

積分して

$$4\mu(\lambda+\mu)u = (\lambda+2\mu)\int\widehat{\gamma\gamma}d\gamma - \lambda\int\widehat{\theta\theta}d\gamma + \Theta \cdots\cdots (6\cdot6)$$

Θ は θ のみの函數

又 (6·5) から $\partial u/\partial\gamma$ を消去し，上の 2 式を代入して $\partial v/\partial\theta$ を求めると

$$4\mu(\lambda+\mu)\frac{\partial v}{\partial\theta} = (\lambda+2\mu)\left(\gamma\widehat{\theta\theta} - \int\widehat{\gamma\gamma}d\gamma\right) - \lambda\left(\gamma\widehat{\gamma\gamma} - \int\widehat{\theta\theta}d\gamma\right) - \Theta$$

積分して (6·6) と對応させると

$$4\mu(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (\lambda+2\mu)\begin{bmatrix} \int\widehat{\gamma\gamma}d\gamma \\ -\int d\theta\int\widehat{\gamma\gamma}d\gamma + \gamma\int\widehat{\theta\theta}d\theta \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} \int\widehat{\theta\theta}d\gamma \\ -\int d\theta\int\widehat{\theta\theta}d\gamma + \gamma\int\widehat{\gamma\gamma}d\theta \end{bmatrix}$$

5) Love: Elasticity. 4th ed. p. 56.

$$+\begin{bmatrix} -\Theta \\ -\int \Theta d\theta + R \end{bmatrix} \cdots\cdots (6\cdot7)$$

R は γ のみの函數

便宜上

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+u_2 \\ v_1+v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

にわけて

$$4\mu(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = (\lambda+2\mu)\begin{vmatrix} \int \widehat{\gamma\gamma}\, d\gamma \\ -\int d\theta \int \widehat{\gamma\gamma} d\gamma + \gamma \int \widehat{\theta\theta}\, d\theta \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \int \widehat{\theta\theta}\, d\gamma \\ -\int d\theta \int \widehat{\theta\theta}\, d\gamma + \gamma \int \widehat{\gamma\gamma}\, d\theta \end{vmatrix} \cdots (6\cdot8)$$

$$4\mu(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -\Theta \\ -\int \Theta\, d\theta + R \end{vmatrix} \cdots\cdots (6\cdot9)$$

とする。

(3·13) 中

$$\int \begin{vmatrix} \gamma^{-2}, & 1 & & \\ \gamma^{-1}, & \gamma, & \gamma^{-3}, & \gamma^{-1} \\ 1, & \gamma^2, & \gamma^{-4}, & \gamma^{-2} \\ \gamma, & \gamma^3, & \gamma^{-5}, & \gamma^{-3} \end{vmatrix} d\gamma = \begin{vmatrix} -\gamma^{-1}, & \gamma & & \\ \log\gamma, & \frac{1}{2}\gamma^2, & -\frac{1}{2}\gamma^{-2}, & \log\gamma \\ \gamma, & \frac{1}{3}\gamma^3, & -\frac{1}{3}\gamma^{-3}, & -\gamma^{-1} \\ \frac{1}{2}\gamma^2, & \frac{1}{4}\gamma^4, & -\frac{1}{4}\gamma^{-4}, & -\frac{1}{2}\gamma^{-2} \end{vmatrix}$$

及

$$\int \Theta(\cos)\, d\theta = \begin{vmatrix} \theta \\ \sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{3}\sin 3\theta \end{vmatrix} \qquad [(3\cdot13)\ \text{の記法から}]$$

で，組合はせると

$$\begin{vmatrix} -\gamma^{-1}\theta, & \gamma\theta & & \\ \log\gamma, & \frac{1}{2}\gamma^2, & -\frac{1}{2}\gamma^2, & \log\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma, & \frac{1}{6}\gamma^3, & -\frac{1}{6}\gamma^{-3}, & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} \\ \frac{1}{6}\gamma^2, & \frac{1}{12}\gamma^4, & -\frac{1}{12}\gamma^{-4}, & -\frac{1}{6}\gamma^{-2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 3\theta \end{bmatrix}$$

之等により (3·13) を (6·8) に代入すると

$$4\mu(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$
=\left|\begin{array}{llll}
\begin{bmatrix}-2(\lambda+\mu)\\0\end{bmatrix}\gamma^{-1}, & \begin{bmatrix}2\mu\\0\end{bmatrix}\gamma & & \\
\begin{bmatrix}0\\-\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(\lambda+2\mu)\log\gamma, & \left\{\begin{bmatrix}-\lambda+\mu\\3\lambda+5\mu\end{bmatrix}+\frac{\mu\omega}{(11)}\right\}\gamma^{2}, & (\lambda+\mu)\gamma^{-2}, & \begin{bmatrix}0\\2\mu\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}2\mu\log\gamma \\
2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(\lambda+\mu)\gamma, & \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-\lambda\\2\lambda+3\mu\end{bmatrix}\gamma^{3}, & \frac{2}{3}(\lambda+\mu)\gamma^{-3}, & 2\begin{bmatrix}\lambda+2\mu\\-\mu\end{bmatrix}\gamma^{-1} \\
\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(\lambda+\mu)\gamma^{2}, & \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3\lambda-\mu\\5\lambda+7\mu\end{bmatrix}\gamma^{4}, & \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\gamma^{-4}, & \begin{bmatrix}3\lambda+5\mu\\\lambda-\mu\end{bmatrix}\gamma^{-2}
\end{array}\right| \mathfrak{M}\Theta\begin{bmatrix}\cos\\\sin\end{bmatrix}
$$

…………………………(6·10)

之を (6·4) に代入すると

$$
\widehat{\gamma\theta}=\mu\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{\gamma}\right)v_1\right]
$$

$$
=\left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & & \\
-\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\gamma^{-1} & \gamma & -\gamma^{-3} & -\frac{\mu}{\lambda+\mu}\gamma^{-1} \\
1 & \gamma^{2} & -\gamma^{-4} & -\gamma^{-2} \\
\gamma & 3\gamma^{3} & -\gamma^{-5} & -3\gamma^{-3}
\end{array}\right|\mathfrak{M}\Theta(\sin)
$$

(3·13) から $\widehat{\gamma\theta}$ を拾ひ出すと

$$
\widehat{\gamma\theta}=\left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & & \\
0 & \gamma & -\gamma^{-3} & \gamma^{-1} \\
1 & \gamma^{2} & -\gamma^{-4} & -\gamma^{-2} \\
\gamma & 3\gamma^{3} & -\gamma^{-5} & -3\gamma^{-3}
\end{array}\right|\mathfrak{M}\Theta(\sin)
$$

上の 2 式を較べて

$$
-\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\gamma^{-1}(10)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\gamma^{-1}(13)=\gamma^{-1}(13)
$$

$$
\therefore\quad (13)=-\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}(10)
$$ ……………………………………(6·11)

之は (6·9) の (u_2, v_2) を考慮に入れない displacement (u_1, v_1) から導いた關係式であるが，(u_2, v_2) は stress に contribute しない故，上の様に取扱つてもよいと考へられる。

Lamé の常數 λ, μ と，Young 率 E, Poisson 比 σ との關係式：

$$
\begin{bmatrix}\lambda\\\mu\end{bmatrix}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left|\begin{array}{c}\frac{2\sigma}{1-2\sigma}\\1\end{array}\right|
$$ ……………………………………(6·12)

によりて，(6·11) をかき直すと

$$
(13)=-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)(10)
$$ ……………………………………(6·13)

之は，dislocation を起さないといふ一般的な條件の下に，山口教授により巧妙に求められてゐる關係式で[6]，本

6) 前掲 1)

文では原線に關し對稱な場合に局限して求めた。一般に求めるのに (2·4) を直接處理してもいゝわけで，此の際には

$$\begin{bmatrix} b_1' \\ d_1' \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\begin{bmatrix} a_1 \\ -c_1 \end{bmatrix}$$

が二つ共得られる。

之等の關係が，plane stress の場合には

$$\begin{bmatrix} b_1' \\ d_1' \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}(1-\sigma)\begin{bmatrix} a_1 \\ -c_1 \end{bmatrix}$$ [7]

となる，即ち

plane strain：$1-\dfrac{\sigma}{1-\sigma}$

plane stress：$1-\sigma$

なる對応の在ることも，山口教授の指摘せられてゐる所である。

(6·9) を (6·4) に代入すると

$$\left(\gamma\frac{dR}{d\gamma}-R\right)+\left(\frac{d\Theta}{d\theta}+\int\Theta d\theta\right)=0$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad & \gamma\frac{dR}{d\gamma}-R=-C \\ & \frac{d\Theta}{d\theta}+\int\Theta\, d\theta=C \end{aligned}\right\}\quad (C\ は常數) \qquad \cdots\cdots(6\cdot14)$$

之等を解くと

$$R=A\gamma+C$$

$$\int\Theta\, d\theta=k_1\cos\theta+k_2\sin\theta+C \qquad (k_1,\ k_2\ は積分常數)$$

(6·9) に入れて

$$4\mu(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ A\gamma \end{bmatrix}-k_1\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_2\cos\theta \\ -k_2\sin\theta \end{bmatrix}$$

而て，對稱の關係から，原線上では，tangential displacement は零でなければならない，即ち

$$(v=v_1+v_2)_{\theta=0}=(v_2)_{\theta=0}=0$$

でなければならないから

$$A=k_1=0$$

$$\therefore\quad 4\mu(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_2\cos\theta \\ -k_2\sin\theta \end{bmatrix}$$

k_2 は常數であるから，改めて

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (14)\cos\theta \\ -(14)\sin\theta \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(6\cdot15)$$

---

7) 次の中に此の關係あるを見た。

Timoshenko：Theory of Elasticity, p. 116.

同譯本（井阪・江崎・森 3 氏共譯）(コロナ社), p. 94.

とかく。之も管及周圍の重力体に共通な形であるが，管では

$$(14)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6\cdot16)$$

でなければならない。それは，此の項は rigid body displacement であつて，坐標原點は常に管の中心においてゐるからである。rigid body displacement であることは，stress を積分した過程から明かで，(6·3)に代入してみても矢張り 0 になる。u_2, v_2 のベクトル和は，その大さが

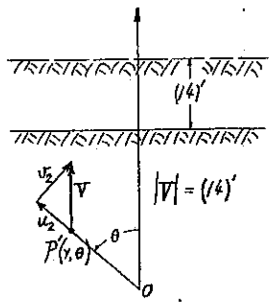
$$|V|=\sqrt{(u_2)^2+(v_2)^2}=\sqrt{[(14)\cos\theta]^2+[-(14)\sin\theta]^2}=(14)$$

で原線となす角が

$$\arg V=0 \quad 或は \quad \pi$$

である (図-4)。

図-4.



之等を (6·10) と組合せて，(6·7) は次の様になる。

$$D\equiv\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$$

$$=\left|\begin{array}{llll}
\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\gamma^{-1}, & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\gamma & & \\
\frac{1}{4\mu(\lambda+\mu)}\left\{\begin{bmatrix}0\\-\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(\lambda+2\mu)\log\gamma\right\}, & \frac{1}{4\mu(\lambda+\mu)}\left\{\begin{bmatrix}-\lambda+\mu\\3\lambda+5\mu\end{bmatrix}+\frac{\mu\omega}{(\overline{11})}\right\}\gamma^2, & \frac{1}{4\mu}\gamma^{-2}, & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\log\gamma\right\} \\
\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\gamma, & \frac{1}{6\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}-\lambda\\2\lambda+3\mu\end{bmatrix}\gamma^3, & \frac{1}{6\mu}\gamma^{-3}, & \frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}\lambda+2\mu\\-\mu\end{bmatrix}\gamma^{-1} \\
\frac{1}{4\mu}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\gamma^2, & \frac{1}{8\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}-3\lambda-\mu\\5\lambda+7\mu\end{bmatrix}\gamma^4, & \frac{1}{8\mu}\gamma^{-4}, & \frac{1}{4\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}3\lambda+5\mu\\\lambda-\mu\end{bmatrix}\gamma^{-2}
\end{array}\right|$$

$$\times\mathfrak{M}\Theta\begin{bmatrix}\cos\\\sin\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6\cdot17)$$

$$D'\equiv\begin{bmatrix}u'\\v'\end{bmatrix}\equiv\left|\begin{array}{ccccc}
/ & / & & & \\
/ & / & / & / & \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \\
/ & / & / & / & \\
/ & / & / & / & \\
\multicolumn{5}{l}{\text{(此の中は上と全く同一で dash を附ければよい。)}}
\end{array}\right|\mathfrak{M}_1'\Theta\begin{bmatrix}\cos\\\sin\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(6\cdot18)$$

$\mathfrak{M}_1'$ は $(14)'$ を餘分に含んだものとし，

$$\mathfrak{M}_1'=\begin{bmatrix}
(00)' & (\overline{01})' & & & \\
(10)' & (\overline{11})' & (12)' & (\overline{13})' & (14)' \\
(\overline{20})' & (\overline{21})' & (22)' & (23)' & \\
(\overline{30})' & (\overline{31})' & (32)' & (33)' &
\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6\cdot19)$$

をあらはす。

7. 円孔附近の境の條件を考慮に入れる

管及周圍の重力体の，夫々の stress 及 displacement に円孔附近の境の條件を入れて，未定の係數を決める。

管の内徑を α，管の外徑，卽ち周圍の重力体との接觸円の半徑を β (図-1) とすれば，接觸面で相互のずれがないとして，境の條件は

$$\left\{(3{\cdot}13)\text{ の }\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\end{bmatrix}=0\right\}_{\gamma=\alpha}\quad\cdots\cdots(7{\cdot}1)$$

$$\left\{(3{\cdot}13)\text{ の }\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\end{bmatrix}=(3{\cdot}15)\text{ の }\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma'}\\ \widehat{\gamma\theta'}\end{bmatrix}\right\}_{\gamma=\beta}\quad\cdots\cdots(7{\cdot}2)$$

$$\left\{(6{\cdot}17)\text{ の }\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=(6{\cdot}18)\text{ の }\begin{bmatrix}u'\\ v'\end{bmatrix}\right\}_{\gamma=\beta}\quad\cdots\cdots(7{\cdot}3)$$

である。

(7·1) から

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\alpha^{-2} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & & \\
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\alpha^{-1} & \begin{bmatrix}1+\omega/(11)\\1\end{bmatrix}\alpha & -\alpha^{-3} & \alpha^{-1}\\
\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\alpha^{2} & -\alpha^{-4} & \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\alpha^{-2}\\
\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\alpha & \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\alpha^{3} & -\alpha^{-5} & \begin{bmatrix}-5\\-3\end{bmatrix}\alpha^{-3}
\end{bmatrix}\mathfrak{M}=0\quad\cdots\cdots(7{\cdot}4)$$

横向きに 1 行宛 0 になり，7 個の式を含む。第 1 行は，$\mathfrak{M}$ の第 1 行が (00), (01) であるから

$$\alpha^{-2}(00)+(01)=0$$

で，以下同様。

(7·2) から

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\beta^{-2} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & & \\
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\beta^{-1} & \begin{bmatrix}1+\omega/(11)\\1\end{bmatrix}\beta & -\beta^{-3} & \beta^{-1}\\
\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\beta^{2} & -\beta^{-4} & \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\beta^{-2}\\
\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\beta & \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\beta^{3} & -\beta^{-5} & \begin{bmatrix}-5\\-3\end{bmatrix}\beta^{-3}
\end{bmatrix}\mathfrak{M}=
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\beta^{-2} & / & & \\
/ & \begin{bmatrix}1+\omega'/(\overline{11})'\\1\end{bmatrix}\beta & / & /\\
/ & / & / & /\\
/ & / & / & /
\end{bmatrix}\mathfrak{M}'$$

（／ 印は左邊に全く同じ）

$$\cdots\cdots(7{\cdot}5)$$

之も 7 個の式を含み，例へば第 1 行は

$$\beta^{-2}(00)+(01)=\beta^{-2}(00)'+(01)'$$

(7·3) から

$$\left[\begin{array}{llll}
\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\beta^{-1}, & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\beta & & \\
\frac{1}{4\mu(\lambda+\mu)}\left\{\begin{bmatrix}0\\-\lambda\end{bmatrix}\right. & \frac{1}{4\mu(\lambda+\mu)}\left\{\begin{bmatrix}-\lambda+\mu\\3\lambda+5\mu\end{bmatrix}\right. & \frac{1}{4\mu}\beta^{-2}, & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\log\beta\right\} \\
\quad\left.+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(\lambda+2\mu)\log\beta\right\}, & \qquad\qquad\left.+\frac{\mu\omega}{(\overline{11})}\right]\beta^{2}, & & \\
\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\beta, & \frac{1}{6\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}-\lambda\\2\lambda+3\mu\end{bmatrix}\beta^{3}, & \frac{1}{6\mu}\beta^{-3}, & \frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}\lambda+2\mu\\-\mu\end{bmatrix}\beta^{-1} \\
\frac{1}{4\mu}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\beta^{2}, & \frac{1}{8\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}-\beta\lambda-\mu\\3\lambda+7\mu\end{bmatrix}\beta^{4}, & \frac{1}{8\mu}\beta^{-4}, & \frac{1}{4\mu(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}3\lambda+5\mu\\\lambda-\mu\end{bmatrix}\beta^{-2}
\end{array}\right]\mathfrak{M}$$

$$=\begin{bmatrix}
/ & / & & & \\
/ & / & / & / & \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \\
/ & / & / & / & \\
/ & / & / & / &
\end{bmatrix}\mathfrak{M}_1' \quad\cdots\cdots(7\cdot6)$$

（/ 印は左邊のものを dash 系にかへればよい）。

之も 7 個の式を含み，例へば第 1 行は

$$-\frac{1}{2\mu}\beta^{-1}(00)+\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\beta(01)=-\frac{1}{2\mu'}\beta^{-1}(00)'+\frac{1}{2(\lambda'+\mu')}\beta(\overline{01})'$$

8. 未定の係數を決める

I. (00), (01), (00)' の決定：

(7·4), (7·5), (7·6) の夫々の第 1 行を拾ひ出して

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} (00), & (01), & (00)', & (\overline{01})' \end{bmatrix} \\
{}_{3+1}\vartheta_0\equiv\begin{bmatrix}
\alpha^{-2}, & 1, & 0, & 0 \\
\beta^{-2}, & 1, & -\beta^{-2}, & -1 \\
-\frac{1}{2\mu}\beta^{-1}, & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\beta, & +\frac{1}{2\mu'}\beta^{-1}, & -\frac{1}{2(\lambda'+\mu')}\beta
\end{bmatrix}
\end{array} \quad\cdots\cdots(8\cdot1)$$

分母行列式，即ち最後の column を除いた行列式を Δ_0，夫々の分子行列式，即ち夫々の未定係數の下の column を除いた行列式を $\Delta(00)$, $\Delta(01)$, $\Delta(00)'$ であらはすと

$$\begin{bmatrix}(00)\\(01)\\(00)'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\Delta(00)\\\Delta(01)\\-\Delta(00)'\end{bmatrix}\frac{(\overline{01})'}{\Delta_0} \quad\cdots\cdots(8\cdot2)$$

例へば

$$(00)=-\frac{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & -\beta^{-2}, & -1 \\ \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\beta, & +\frac{1}{2\mu'}\beta^{-1}, & -\frac{1}{2(\lambda'+\mu')}\beta \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \alpha^{-2} & 1 & 0 \\ \beta^{-2} & 1 & -\beta^{-2} \\ -\frac{1}{2\mu}\beta^{-1} & \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\beta & +\frac{1}{2\mu'}\beta^{-1} \end{bmatrix}}\cdot\overline{(01)}' \cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot3)$$

一般に n 元一次の聯立方程式を

$$\begin{array}{c} [\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ \cdots\ x_n, \quad \bar{c}\ ] \\ {}_{n+1}\vartheta\equiv\begin{bmatrix} (11), & (12), & (13),\cdots\cdots(1n), & c_1 \\ (21), & (22), & \cdots\cdots\cdots(2n), & c_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\ \vdots & \vdots \\ (n1), & (n2), & \cdots\cdots\cdots(nn), & c_n \end{bmatrix} \end{array}$$

とすると x_γ は

$$x_\gamma=(-1)^{n+1}(-1)^\gamma\cdot\frac{\Delta(x_\gamma)}{\Delta(c)}$$

で上の場合は

$$n+1=4, \quad x_\gamma=(00), \quad \therefore\ (00)=-\frac{\Delta(00)}{\Delta(c)}\bar{c}\quad \text{等。}$$

II. (10), (11), (12), (10)′, (12)′, (14)′ の決定：

(6·11) により

$$(13)=-\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}(10)$$

$$(13)'=-\frac{\mu'}{2(\lambda'+2\mu')}(10)'$$

(6·16) により

$$(14)=0$$

であるから，円孔附近の境の條件に對して，上の 6 個を未定の係數に選び，(7·4), (7·5), (7·6) の夫々の第 3, 4 行を拾ひ出して

$$\begin{array}{c} [\quad (10), \qquad (11), \qquad (12), \qquad (10)', \\ {}_{n+1}\vartheta_1\equiv\begin{bmatrix} \left[1-\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\right]\alpha^{-1}, & \alpha, & -\alpha^{-3}, & 0, \\ -\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\alpha^{-1}, & \alpha, & -\alpha^{-3}, & 0, \\ \left[1-\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\right]\beta^{-1}, & \beta, & -\beta^{-3}, & -\left[1-\frac{\mu'}{2(\lambda'+2\mu')}\right]\beta^{-1}, \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{matrix}
-\dfrac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\beta^{-1}, & \beta, & -\beta^{-3}, & +\dfrac{\mu'}{2(\lambda'+2\mu')}\beta^{-1}, \\
\dfrac{\log\beta}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}-\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\right], & \dfrac{-\lambda+\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\beta^{2}, & \dfrac{1}{4\mu}\beta^{-2}, & \dfrac{-\log\beta}{4(\lambda'+\mu')}\left[\dfrac{\lambda'+2\mu'}{\mu'}-\dfrac{\mu'}{\lambda'+2\mu'}\right], \\
\dfrac{-1}{4(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{\lambda+(\lambda+2\mu)\log\beta}{\mu}+\dfrac{\mu(1-\log\beta)}{\lambda+2\mu}\right], & \dfrac{3\lambda+5\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\beta^{2}, & \dfrac{1}{4\mu}\beta^{-2}, & \\
 & & & \dfrac{+1}{4(\lambda'+\mu')}\left[\dfrac{\lambda'+(\lambda'+2\mu')\log\beta}{\mu'}+\dfrac{\mu'(1-\log\beta)}{\lambda'+2\mu'}\right],
\end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix}
(12)', & (14)', & \overline{(11)}' \\
0, & 0, & \dfrac{1}{\overline{(11)}'}\omega\alpha \\
0, & 0, & 0 \\
+\beta^{-3}, & 0, & \left[-1+\left\{-\omega'+\omega\right\}\dfrac{1}{\overline{(11)}'}\right]\beta \\
+\beta^{-3}, & 0, & -\beta, \\
-\dfrac{1}{4\mu'}\beta^{-2}, & -1, & \left[\dfrac{\lambda'-\mu'}{4\mu'(\lambda'+\mu')}+\left\{\dfrac{-\mu'\omega'}{8\mu'(\lambda'+\mu')}+\dfrac{\mu\omega}{8\mu(\lambda+\mu)}\right\}\dfrac{1}{\overline{(11)}'}\right]\beta^{2} \\
-\dfrac{1}{4\mu'}\beta^{-2}, & +1, & \left[\dfrac{-3\lambda'-5\mu'}{4\mu'(\lambda'+\mu')}+\left\{\dfrac{-\mu'\omega'}{8\mu'(\lambda'+\mu')}+\dfrac{\mu\omega}{8\mu(\lambda+\mu)}\right\}\dfrac{1}{\overline{(11)}'}\right]\beta^{2}
\end{matrix}
\quad\cdots\cdots\cdots(8{\cdot}4)
$$

之から未定の係数は夫々, (8·2) と同様に

$$
\begin{bmatrix} (10) \\ (11) \\ (12) \\ (10)' \\ (12)' \\ (14)' \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \Delta(10) \\ -\Delta(11) \\ \Delta(12) \\ -\Delta(10)' \\ \Delta(12)' \\ -\Delta(14)' \end{bmatrix}
\cdot\frac{\overline{(11)}'}{\Delta_1}
\quad\cdots\cdots\cdots(8{\cdot}5)
$$

III. (20), (21), (22), (23), (22)', (23)' の決定;

(5·3) により

$$\overline{(20)}'=\tau'\frac{\omega' x_0}{2}$$

$$\overline{(21)}'=0$$

故に 2 で始る係数は上の 6 個が未定で, 之等を決める式は (7·4), (7·5), (7·6) の夫々の第 5, 6 行を拾ひ出して

$$
\left[(20),\ (21),\ (22),\ (23),\ (22)',\ (23)',\ \overline{(20)}'\right]
$$

$$
{}_{6+1}\vartheta_2\equiv
\begin{vmatrix}
-1, & 0, & -\alpha^{-4}, & -2\alpha^{-2}, & 0, & 0, & 0 \\
1, & \alpha^{2}, & -\alpha^{-4}, & -\alpha^{-2}, & 0, & 0, & 0 \\
-1, & 0, & -\beta^{-4}, & -2\beta^{-2}, & +\beta^{-4}, & +2\beta^{-2}, & +1 \\
1, & \beta^{2}, & -\beta^{-4}, & -\beta^{-2}, & +\beta^{-4}, & +\beta^{-2}, & -1
\end{vmatrix}
\quad\cdots\cdots(8{\cdot}6),
$$

$$
\begin{vmatrix}
-\frac{1}{2\mu}\beta, & \frac{-\lambda}{6\mu(\lambda+\mu)}\beta^{3}, & \frac{1}{6\mu}\beta^{-3}, & \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\beta^{-1} & -\frac{1}{6\mu'}\beta^{-3}, & -\frac{\lambda'+2\mu'}{2\mu'(\lambda'+\mu')}, & +\frac{1}{2\mu'}\beta \\
\frac{1}{2\mu}\beta, & \frac{2\lambda+3\mu}{6\mu(\lambda+\mu)}\beta^{3}, & \frac{1}{6\mu}\beta^{-3}, & -\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\beta^{-1}, & -\frac{1}{6\mu'}\beta^{-3}, & +\frac{1}{2(\lambda'+\mu')}\beta^{-1}, & -\frac{1}{2\mu'}\beta
\end{vmatrix}
$$

之から未定の係數は夫々

$$
\begin{vmatrix} (20) \\ (21) \\ (22) \\ (23) \\ (22)' \\ (23)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta(20) \\ -\Delta(21) \\ \Delta(22) \\ -\Delta(23) \\ \Delta(22)' \\ -\Delta(23)' \end{vmatrix} \cdot \frac{\overline{(20)}'}{\Delta_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8\cdot7)
$$

IV. (30), (31), (32), (33), (32)′ (33)′ の決定：

(5·3) により

$$\overline{(30)}' = -\tau'\frac{\omega'}{4}$$

$$\overline{(31)}' = 0$$

故に 3 で始る係數は上の 6 個が未定で，之等を決める式は (7·4), (7·5), (7·6) の夫々の第 7, 8 行を拾ひ出して

$$
{}_{6+1}\vartheta_3 \equiv \begin{vmatrix}
(30), & (31), & (32), & (33), & (32), & (33), & \overline{(30)}' \\
-\alpha, & -\alpha^{3}, & -\alpha^{-5}, & -5\alpha^{-3}, & 0, & 0, & 0 \\
\alpha, & 3\alpha^{3}, & -\alpha^{-5}, & -3\alpha^{-3}, & 0, & 0, & 0 \\
-\beta, & -\beta^{3}, & -\beta^{-5}, & -5\beta^{-3}, & +\beta^{-5}, & +5\beta^{-3}, & +\beta \\
\beta, & 3\beta^{3}, & -\beta^{-5}, & -3\beta^{-3}, & +\beta^{-5}, & +3\beta^{-3}, & -\beta \\
-\frac{1}{4\mu}\beta^{2}, & \frac{-3\lambda-\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}\beta^{4}, & \frac{1}{8\mu}\beta^{-4}, & \frac{3\lambda+5\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\beta^{-2}, & -\frac{1}{8\mu'}\beta^{-4}, & -\frac{3\lambda'+5\mu'}{4\mu'(\lambda'+\mu')}\beta^{-2} & +\frac{1}{4\mu'}\beta^{2} \\
\frac{1}{4\mu}\beta^{2}, & \frac{5\lambda+7\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}\beta^{4}, & \frac{1}{8\mu}\beta^{-4}, & \frac{\lambda-\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\beta^{-2}, & -\frac{1}{8\mu'}\beta^{-4}, & -\frac{\lambda'-\mu'}{4\mu'(\lambda'+\mu')}\beta^{-2}, & -\frac{1}{4\mu'}\beta^{2}
\end{vmatrix} \cdots(8\cdot8)
$$

之から未定の係數は夫々

$$
\begin{vmatrix} (30) \\ (31) \\ (32) \\ (33) \\ (32)' \\ (33)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta(30) \\ -\Delta(31) \\ \Delta(32) \\ -\Delta(33) \\ \Delta(32)' \\ -\Delta(33)' \end{vmatrix} \cdot \frac{(30)'}{\Delta_3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8\cdot9)
$$

以上ですべての係數が決定したから，之等を (3·13) の S, (3·15) の S' に代入して stress が得られ，(6·17) の D, (6·18) の D' に代入して displacement が得られる。

倘ほ，山口教授によつて解かれた無裝の場合と較べてみるに，管の彈性常數等，λ, μ, ω が，周圍の重力体その

れ等，λ' μ', ω' に等しい時，S 及び S' は共に山口教授の結果[8] に合はねばならぬ筈である。此の計算は可成り繁雑なので，便宜 $\beta=\alpha$ の條件を添加して，一致することを確認した。その計算は玆には省略する。

9. 數値計算例及此の場合の結論

管をコンクリート，周圍の重力体を土として，Lamé の常數及密度を

$\lambda=5.0\times10^4\ \mathrm{kg/cm^2}$　$\lambda'=\infty$　$\mu=10.0\times10^4\ \mathrm{kg/cm^2}$　$\mu'=20\ \mathrm{kg/cm^2}$

$\omega=2.3\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$　$\omega'=1.6\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

とし，

表-1.

捲厚 cm ＼ 係數	(00) kg-m	(01) kg-m	(00)' kg-m	(01)' kg-m
10	$+20.432\times10^6$	-81.728×10^4	$+69.3\times10^2$	-3.20×10^4
20	10.556	42.225	36.8	〃
30	7.252	29.008	25.6	〃
40	5.596	22.383	19.8	〃
50	4.602	18.406	16.6	〃
60	3.939	15.756	14.5	〃
70	3.466	13.864	13.0	〃
80	3.111	12.445	11.8	〃

表-2.

捲厚 cm ＼ 係數	(10) kg-m	(11) kg-m	(12) kg-m	(13) kg-m	(14)
10	-5.750×10^4	$+96.004\times10^2$	$+62.878\times10^6$	$+1.150\times10^4$	0
20	〃	46.672	32.045	〃	〃
30	〃	30.114	21.696	〃	〃
40	〃	21.804	16.502	〃	〃
50	〃	16.810	13.381	〃	〃
60	〃	13.472	11.295	〃	〃
70	〃	11.086	9.804	〃	〃
80	〃	9.289	8.681	〃	〃

表-3.

捲厚 cm ＼ 係數	(10)' kg-cm	(11)' kg-m	(12)' kg-m	(13)' kg-m	(14)' cm
10	-3.93×10^4	0	-5.06×10^6	0	+10.443
20	3.86	〃	5.19	〃	10.350
30	3.78	〃	5.30	〃	10.245
40	3.71	〃	5.39	〃	10.129
50	3.63	〃	5.48	〃	10.005
60	3.56	〃	5.56	〃	9.871
70	3.48	〃	5.64	〃	9.728
80	3.40	〃	5.70	〃	9.577

8) 前掲[1]

$x_0=20\,\mathrm{m},\quad \alpha=5.0\,\mathrm{m},\quad \beta=5.1\,\mathrm{m},\quad 5.2\,\mathrm{m},\quad \cdots\cdots,\quad 5.8\,\mathrm{m}$

として，(8.2), (8.5) により係數を計算すると**表-1～3**の樣である。

(14)′ が正であるのは相對的には管が全体として沈むことで，その値の変化の樣子をみるに，捲厚が大きくなるにつれて沈みの量が小さくなつてゐる。之は一寸逆說的な結果の樣に思はれる。管の外側の半徑 ($\gamma=\beta$) を一定にして，捲厚を内側で変化した時には，厚くするにつれて，沈みが大きくなる樣で，常識に一致する。

(3·13), (3·15) に於て

$$S\equiv\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}\\ \widehat{\gamma\theta}\\ \widehat{\theta\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{\gamma\gamma}\\ A_{\gamma\theta}\\ A_{\theta\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{\gamma\gamma}\cdot\cos\theta\\ B_{\gamma\theta}\cdot\sin\theta\\ B_{\theta\theta}\cdot\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$S\equiv\begin{bmatrix}\widehat{\gamma\gamma}'\\ \widehat{\gamma\theta}'\\ \widehat{\theta\theta}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{\gamma\gamma}'\\ A_{\gamma\theta}'\\ A_{\theta\theta}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{\gamma\gamma}'\cos\theta\\ B_{\gamma\theta}'\sin\theta\\ B_{\theta\theta}'\cos\theta\end{bmatrix}$$

とかき，$A_{\gamma\gamma}$, $A_{\gamma\theta}$, $\cdots$, $B_{\theta\theta}'$ を表にすると**表-4～7**の樣である。

表-4.

管で $\gamma=5.0^{\mathrm{m}}$ のとき (單位は kg-cm)

係数 / 捲厚 cm	$A_{\gamma\gamma}$	$A_{\gamma\theta}$	$A_{\theta\theta}$	$B_{\gamma\gamma}$	$B_{\gamma\theta}$	$B_{\theta\theta}$
10	0.000	0	−163.456	0.000	0.000	+20.811
20	−0.001	〃	− 84.449	〃	〃	+10.944
30	0.000	〃	− 58.016	〃	〃	+ 7.633
40	+0.001	〃	− 44.767	〃	〃	+ 5.971
50	+0.002	〃	− 36.814	〃	〃	+ 4.972
60	0.000	〃	− 31.512	〃	〃	+ 4.304
70	0.000	〃	− 27.728	〃	〃	+ 3.827
80	−0.001	〃	− 24.889	〃	〃	+ 3.468

表-5.

管で $\gamma=\beta$ ($\beta=5.1^{\mathrm{m}}\sim5.8^{\mathrm{m}}$) のとき

係数 / 捲厚 cm	$A_{\gamma\gamma}$	$A_{\gamma\theta}$	$A_{\theta\theta}$	$B_{\gamma\gamma}$	$B_{\gamma\theta}$	$B_{\theta\theta}$
10	−3.174	0	−160.282	+0.427	+0.382	+20.823
20	−3.187	〃	− 81.263	+0.459	+0.369	10.977
30	−3.191	〃	− 54.825	+0.490	+0.356	7.681
40	−3.192	〃	− 41.574	+0.520	+0.342	6.035
50	−3.193	〃	− 33.619	+0.549	+0.329	5.052
60	−3.195	〃	− 28.317	+0.578	+0.317	4.400
70	−3.196	〃	− 24.532	+0.606	+0.304	3.938
80	−3.197	〃	− 21.693	+0.635	+0.292	3.594

表-6.

周圍の重力体で $\gamma=\beta$ のとき

捲厚 cm ＼ 係數	$A_{\gamma\gamma}'$	$A_{\gamma\theta}'$	$A_{\theta\theta}'$	$B_{\gamma\gamma}'$	$B_{\gamma\theta}'$	$B_{\theta\theta}'$
10	−3.173	0	−3.227	+0.426	+0.381	+1.197
20	−3.186	〃	−3.214	+0.459	+0.369	+1.201
30	−3.191	〃	−3.209	+0.491	+0.359	+1.204
40	−3.193	〃	−3.207	+0.519	+0.342	+1.206
50	−3.195	〃	−3.205	+0.549	+0.329	+1.209
60	−3.195	〃	−3.205	+0.577	+0.317	+1.213
70	−3.196	〃	−3.204	+0.606	+0.305	+1.217
80	−3.196	〃	−3.204	+0.634	+0.292	+1.220

表-7.

周圍の重力体で $\gamma=10^{m}$ のとき

捲厚 cm ＼ 係數	$A_{\gamma\gamma}'$	$A_{\gamma\theta}'$	$A_{\theta\theta}'$	$B_{\gamma\gamma}'$	$B_{\gamma\theta}'$	$B_{\theta\theta}'$
10	−3.193	0	−3.207	+1.258	+0.051	+1.549
20	−3.196	〃	−3.204	+1.266	+0.052	+1.548
30	−3.197	〃	−3.203	+1.275	+0.053	+1.547
40	−3.198	〃	−3.202	+1.283	+0.054	+1.546
50	−3.198	〃	−3.202	+1.292	+0.055	+1.545
60	−3.199	〃	−3.201	+1.300	+0.056	+1.544
70	−3.199	〃	−3.201	+1.308	+0.056	+1.544
80	−3.199	〃	−3.201	+1.317	+0.057	+1.543

表-4 に於て

$$A_{\gamma\gamma}\fallingdotseq 0,\quad A_{\gamma\theta}=0,\quad B_{\gamma\gamma}\fallingdotseq 0\quad B_{\gamma\theta}\fallingdotseq 0$$

は (7·1) の検證で，**表-5** と **表-6** とを較べて

$$A_{\gamma\gamma}\fallingdotseq A_{\gamma\gamma}',\quad A_{\gamma\theta}=A_{\gamma\theta}',\quad B_{\gamma\gamma}\fallingdotseq B_{\gamma\gamma}',$$

$$B_{\gamma\theta}=B_{\gamma\theta}'$$

は (7·2) の検證である。

上の表をみるに，管の hoop stress が格段に大きく，周圍の重力体のそれは 10％ にも足りない位小さい。管の hoop stress の最大は眞下の内面で起り，最小は眞上の外面で起る。周圍の重力体の stress は円孔を去るも急激に減少しない。$\widehat{\gamma\gamma}$, $\widehat{\gamma\gamma}'$ は値は小さいが，あらゆる場所で負で，接觸面で離れない様に働いてゐることになる。

表-4 に於て $A_{\theta\theta}$ と $B_{\theta\theta}$ との絶對値の和を縦軸にとり，捲厚を横軸にとつて，グラフを畫けば **図-5** の様である。之よりコンクリートの許容圧応力を 50 kg/cm² 位とすれば，適當な捲厚は 40 cm 位である。

捲厚 40 cm の場合に就て 6 個の stress を図示すれば **図-6～図-11** の様である。

図-5.

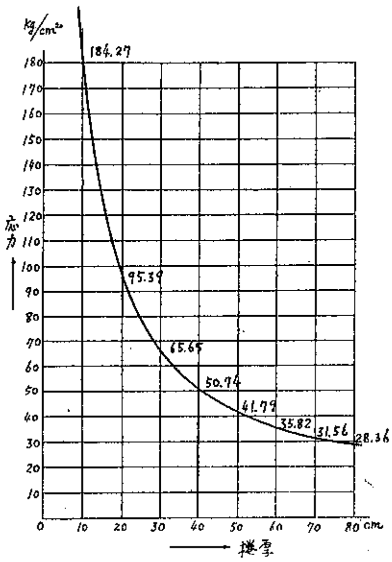


図-6.

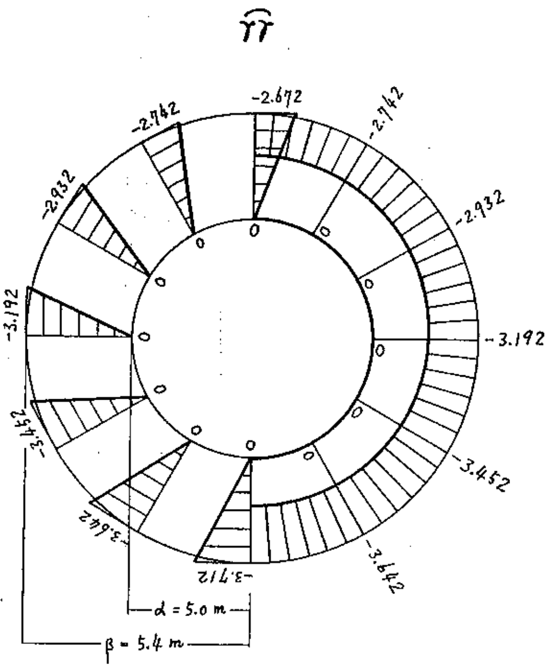

$\widehat{rr}$
-2.672
-2.742
-2.932
-3.192
-3.452
-3.642
-3.712
α = 5.0 m
β = 5.4 m

図-7.

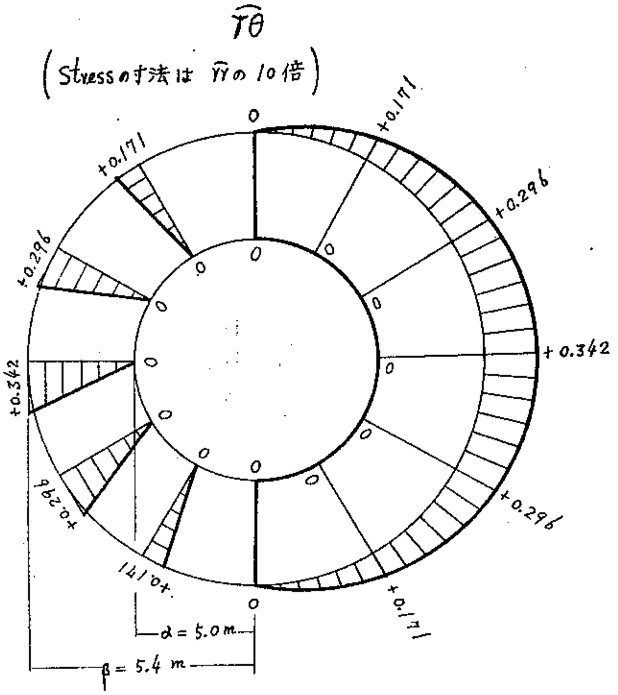

$\widehat{r\theta}$
(Stressの寸法は $\widehat{rr}$の10倍)
+0.171
+0.296
+0.342
α = 5.0 m
β = 5.4 m

図-8.

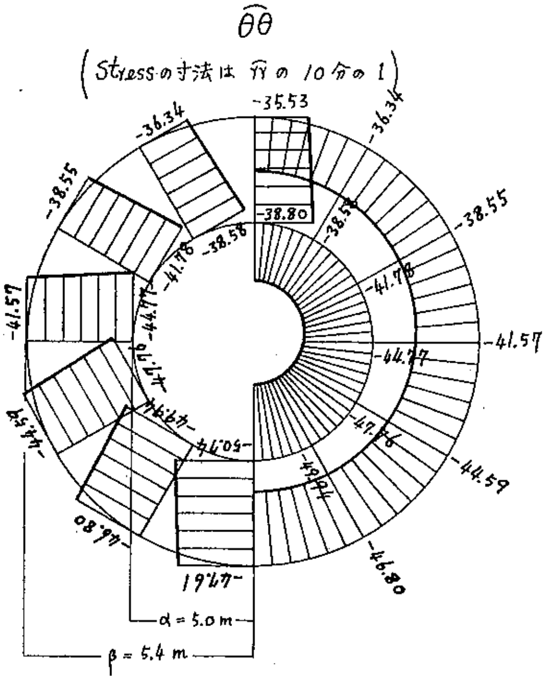

$\widehat{\theta\theta}$
(Stressの寸法は $\widehat{rr}$の10分の1)
-35.53
-36.34
-38.55
-41.57
-44.59
-46.80
-47.62
-38.80
-38.58
-41.78
-44.77
-47.46
-49.64
-50.74
α = 5.0 m
β = 5.4 m

図-9.

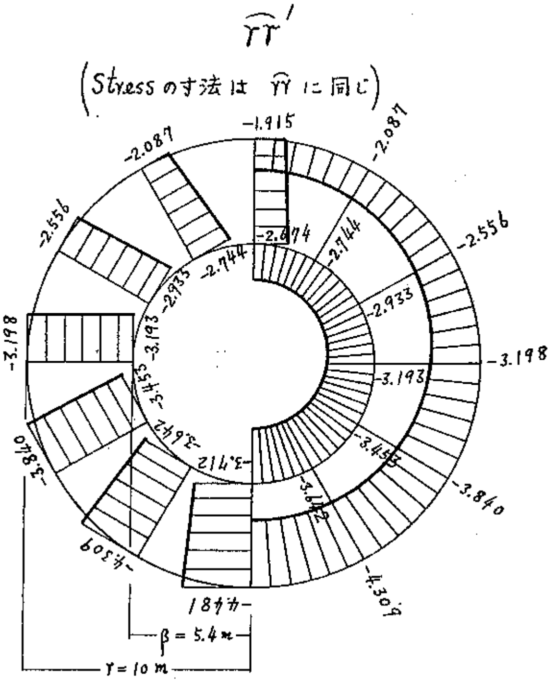

$\widehat{rr}'$
(Stressの寸法は $\widehat{rr}$に同じ)
-1.915
-2.087
-2.556
-3.198
-3.840
-4.309
-4.481
-2.674
-2.744
-2.933
-3.193
-3.453
-3.642
-3.712
β = 5.4 m
γ = 10 m

図-10.

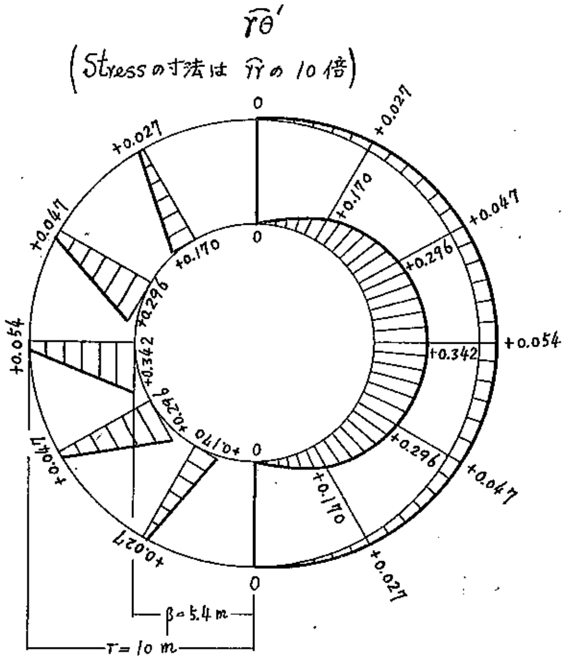
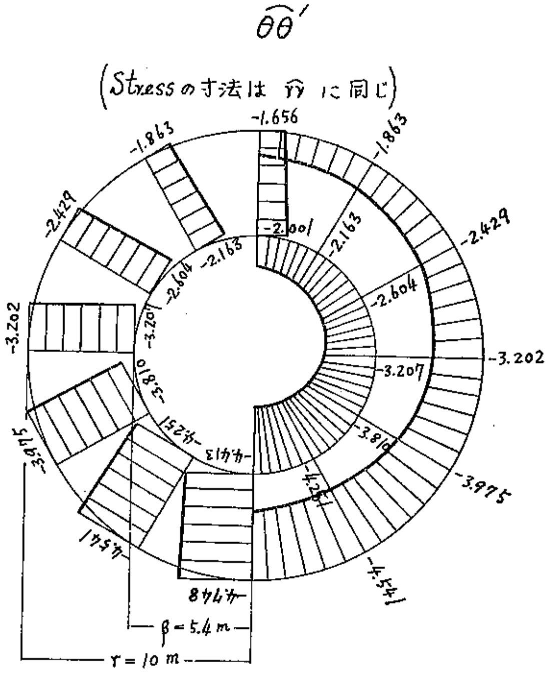

$\widehat{r\theta}'$
(Stress の寸法は $\widehat{rr}$ の 10倍)
0
+0.027
+0.170
+0.047
+0.296
+0.054
+0.342
+0.296
+0.047
+0.170
+0.027
0
β=5.4 m
r=10 m

図-11.


$\widehat{\theta\theta}'$
(Stress の寸法は $\widehat{rr}$ に同じ)
-1.656
-1.863
-2.001
-2.163
-2.429
-2.604
-3.202
-3.207
-3.810
-3.975
-4.251
-4.413
-4.541
-4.448
β=5.4 m
r=10 m