

# 論 説 報 告

第 24 卷 第 1 號 昭和 12 年 1 月

## 兩端固定せる鋼柱が偏心荷重を受ける場合の弾性破損

會 員 結 城 朝 恭\*

Elastic Failure of a Steel Column under Eccentric Loads  
(Both its Ends fixed)

By Tomoyasu Yūki, C. E., Member.

### 要 旨

柱軸の當初に於ける曲り量、即ち加重前に柱軸の有する曲り量が、柱の弾性限以内に於ける諸現象並に弾性破損に如何なる影響を及ぼすかを、兩端固定されたる鋼柱に就て、特に 1 山の曲りを有する場合に就て、論究を試みたものである。

### 緒 言

柱の挫屈はオイラーの提唱以來多數の學者によりて取扱はれてゐる。而して當初に曲りを持つ柱に偏心軸荷重の作用する場合に就ても、或る程度論究してゐるものもあるが、斯る場合に關する問題は未だに研究の餘地があると思惟する。兩端面に自由支持の偏心軸荷重を受ける眞直な鋼柱の弾性破損並に挫屈に就て、偏心比の全般に亘りて(1)砂谷教授と共に其の論究を試みたものであるが、柱は實際的には眞直なる柱と見做す場合でも當初に即ち加重前に或る量(微少なりとも)の曲りを持つべきであり、この當初に有する柱軸の曲りは偏心と類似の影響を柱に及ぼすならんことの推察をも述べて置いた。然らばその曲りの状態が如何に柱の諸問題に影響を及ぼすかを詳細に考察すべきであるが、この當初に於ける柱軸の曲りの形状は豫め之を決定し難き程度のものであり、之を簡單なる代數式で表はす事は困難である。本論文では問題の取扱を簡單にする目的から、假りに柱軸が 1 山の正弦曲線形である兩端固定の均一直断面の鋼柱が偏心荷重を受ける場合の弾性破損に就て考究を試み、以つて一般の現象の考察の一部に資せんとするものである。尙本論文の大要は第 3 回工学大會で講演せしものであるが茲にその詳細を述べる。

### A. 柱の曲り並に曲げモーメント

均一直断面にして、其の柱軸が當初から或る 1 山の曲り(この場合  $\xi = c \sin \pi \xi$  の形と假定する)を有する兩端固定の柱に偏心荷重が作用し、その曲り及荷重は直断面の重心に於ける慣性モーメントの 1 主軸及柱軸を含む平面内にある場合に就て論ずる。

圖-1 に於て曲線 ACB は加重前の柱軸、AC'B は加重後の柱軸、W は荷重、l は柱長、兩端偏心量中大なる

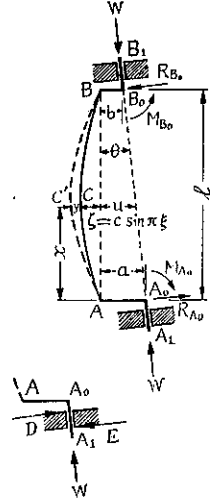
\* 仙臺高等工業學校教授 工学士

(1) C. Sunatani & T. Yūki—Elastic Failure and Buckling of a Steel Column under Eccentric Loads. The Fourth International Congress for Applied Mechanics (1934).

砂谷智導、結城朝恭——偏心荷重を受ける鋼柱の弾性破損並に挫屈、機械學會論文集第 1 卷第 5 號昭和 10 年 11 月

方を  $\alpha$  と置き、図に示したやうに両端偏心が柱軸に對して同じ側にある時は、 $a, b$  を共に正量にとり、反對側にある時は  $a$  を正量、 $b$  を負量にとるものと心得る。 $\theta$  は荷重力線の AB 直線に對する傾き、 $x, y$  は任意直断面重心の A 端からの距離並に変位、 $u$  は直線 AB、力線  $A_0B_0$  間の該直断面上での距離とし、 $\xi = c \sin \pi \xi$  は直線 AB に對し柱軸のなす曲り量を示す。扱て柱の固定端に於ける力の作用状態は次記の如く説明し得るものと思惟する。図に於て荷重  $W$  が作用する時には、 $A_0, A_1$  端には、壁に  $D, E$  なる反力を受ける。即ち力線  $A_0, A_1$  に直角に作用する  $I$  の反力と抵抗モーメントを受けるのであるが、取扱の便宜上これを  $A_0$  端に移し、力線に直角の方向に作用する反力  $R_{A_0}$  と抵抗モーメント  $M_{A_0}$  とで示す。 $B_0$  端に於ても全く同様の關係が述べられる。

図-1. 柱の曲り



扱て、 $AC'B$  の曲率  $\kappa$  は、それが充分小さい場合には、(1) 式で示される。

$$\kappa = d^2y/dx^2 = -M/EI \dots\dots\dots(1)$$

$C'$  點に於ける曲げモーメント  $M$  は、

$$\begin{aligned} M_c &= W(\xi + u + y) \cos \theta + R_{A_0} \{ \alpha \sin \theta + x \cos \theta + (\xi + y) \sin \theta \} - M_{A_0} \\ &= P_1(\alpha + \xi + y) - Qx - M_{A_0} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \xi &\equiv c \sin \pi \xi, \quad P_1 \equiv W \cos \theta + R_{A_0} \sin \theta, \quad Q \equiv W \sin \theta - R_{A_0} \cos \theta, \\ \xi &\equiv x/l. \end{aligned}$$

(1) 式に (2) 式を用ひて之を解けば、任意直断面が受ける変位  $y$  は (3) 式で示される。

$$y = A \cos p\xi + B \sin p\xi + \xi p^2 / (\pi^2 - p^2) - \alpha + Qx/P_1 + M_{A_0}/P_1 \dots\dots\dots(3)$$

但し  $A, B$ : 積分常数、 $p = l\sqrt{P_1/EI}$

$I$ : 柱直断面の重心に於ける曲げ平面に直角なる主軸に就ての慣性モーメント

(3) 式に柱の両端条件、即ち  $\xi=0$  及  $\xi=1$  に於て  $y$  及  $dy/d\xi$  が何れも零であることの條件を適用して、下記が得られる。

$$\xi=0, y=0: \quad A + M_{A_0}/P_1 = \alpha \dots\dots\dots(4i)$$

$$\xi=1, y=0: \quad A \cos p + M_{A_0}/P_1 + B \sin p + Ql/P_1 = \alpha \dots\dots\dots(4ii)$$

$$\xi=0, dy/d\xi=0: \quad Bp + Ql/P_1 = -\pi c p^2 / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots(4iii)$$

$$\xi=1, dy/d\xi=0: \quad Ap \sin p - Bp \cos p - Ql/P_1 = -\pi c p^2 / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots(4iv)$$

従てこれらの諸式より、

$$(4i)-(4ii): \quad A(1 - \cos p) - B \sin p - Ql/P_1 = 0 \dots\dots\dots(4v)$$

$$(4iv)-(4iii): \quad p \{ A \sin p - B(1 + \cos p) \} - 2Ql/P_1 = 0 \dots\dots\dots(4vi)$$

$$(4v) \text{ より } \quad (\sin p) \left( A \tan \frac{1}{2} p - B \right) - Ql/p_1 = 0 \dots\dots\dots(4'v)$$

$$(4vi) \text{ より } \quad p(1 + \cos p) \left( A \tan \frac{1}{2} p - B \right) - 2Ql/P_1 = 0 \dots\dots\dots(4'vi)$$

$$(4'v) - \frac{1}{2}(4'vi): \quad \left( A \tan \frac{1}{2} p - B \right) \left\{ \sin p - \frac{p}{2}(1 + \cos p) \right\} = 0$$

依つて

$$(a) \quad B = A \tan \frac{1}{2} p \dots\dots\dots(4vii)$$

或は (b)  $\sin p = \frac{1}{2} p (1 + \cos p)$

即ち (b<sub>1</sub>)  $\tan \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} p \dots\dots\dots (4vi)$

或は (b<sub>2</sub>)  $\cos \frac{1}{2} p = 0 \dots\dots\dots (4ix)$

を得。

(a)  $B = A \tan \frac{1}{2} p$  の場合: この場合は (4v) 式より

$Q/P_1 = 0$ , 即ち  $Q = 0$ , 但し  $l \neq 0$ ,  $P_1 \neq \infty \dots\dots\dots (4ai)$

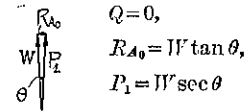
依つて,

$Q = W \sin \theta - R_{A_0} \cos \theta = 0$

従て,

$R_{A_0} = W \tan \theta, P_1 = W \sec \theta$

図-1a.



にして, 図-1a に示す如くである。

故に又 (4iii) 式から,

$B = -\pi c p / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots (4aii)$

(4vi) 式を (4iv) 式に入れて,

$A = -\pi c p \left( \cot \frac{1}{2} p \right) / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots (4aiv)$

但し  $\tan \frac{1}{2} p \neq 0$

従て (4i) 式より,

$M_{A_0}/P_1 = \alpha + \pi c p \left( \cot \frac{1}{2} p \right) / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots (4aiv)$

(a)  $\tan \frac{1}{2} p = 0$  なる場合: この場合は次の二つの場合となる。即ち, (a<sub>ii</sub>)  $p = 0$ , 或は (a<sub>iii</sub>)  $p = 2\pi$  である。

(a<sub>ii</sub>) なる場合: 即ち  $p = 0$  にして,

(4iii) 式より,  $Q/P_1 = 0$  即ち  $Q = 0$  但し  $l \neq 0$ ,  $P_1 = 0$

(4aii) 式より,  $B = 0$

(4aiii) 式より

$A = -\pi c \Delta p \left( \cot \frac{1}{2} \Delta p \right) / (\pi^2 - \Delta p^2) \cong -2c/\pi$

$$\left[ \begin{array}{l} \Delta p \cot \frac{1}{2} \Delta p = \Delta p \frac{\cos \frac{1}{2} \Delta p}{\sin \frac{1}{2} \Delta p} \cong \Delta p \frac{1}{\frac{1}{2} \Delta p} \cong 2 \end{array} \right]$$

(4aiv) 式より,  $M_{A_0}/P_1 = \alpha + 2c/\pi$

従て, 以上の値を再記せば,

$$Q=0, \quad B=0, \quad A=-2c/\pi, \quad M_{A_0}/P_1=a+2c/\pi \quad \dots\dots(4a_{ii})$$

故に (3) 式に (4a<sub>ii</sub>) 式を代入して、

$$y=0 \quad \dots\dots(4'a_{ii})$$

又  $M_{A_0}=(a+2c/\pi)P_1=0$ , 但し  $P_1=0$  にして、故に (2) 式より、

$$M_c=0 \quad \dots\dots(4''a_{ii})$$

即ち  $p$  (従て荷重  $W$ ) が零の際には、 $y$  及  $M_c$  が零である。

(a<sub>iii</sub>) なる場合: 即ち  $p=2\pi$  にして、この際は、(4a) の諸式は次記の値となる。

$$Q=0, \quad B=-\pi cp/(\pi^2-p^2), \quad A=\infty, \quad M_{A_0}/P_1=\infty \quad \dots\dots(4a_{iii})$$

従て、この場合は柱軸の曲り  $y$  並に其の曲げモーメント  $M$  は  $\infty$  となる。

$$\text{即ち} \quad y=\infty, \quad M=\infty \quad \dots\dots(4'a_{iii})$$

(b<sub>i</sub>)  $\tan \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$  なる場合:

$$\begin{aligned} (4'vi)-(4'v): \quad Ql/P_1 &= \{p(1+\cos p)-\sin p\} \left( A \tan \frac{1}{2}p - B \right) \\ &= (\sin p) \left( \frac{1}{2}pA - B \right) \end{aligned}$$

$$\text{即ち} \quad \frac{1}{2}Ap \sin p - B \sin p - Ql/P_1 = 0 \quad \dots\dots(4x)$$

$$(4x)+(4iii): \quad \frac{1}{2}Ap \sin p + B(p - \sin p) = -\pi cp^2/(\pi^2 - p^2)$$

$$(4iv)+(4iii): \quad Ap \sin p + Bp(1 - \cos p) = -\pi cp^2/(\pi^2 - p^2)$$

$$\text{故に} \quad B \{p(1 + \cos p) - 2 \sin p\} = -\pi cp^2/(\pi^2 - p^2)$$

$$\text{従て} \quad B(\sin p) \times 0 = -\pi cp^2/(\pi^2 - p^2)$$

$$\text{故に} \quad B = \infty \quad \dots\dots(4bi)$$

然らば (4iii) 式から

$$Ql/P_1 = \infty, \quad \text{即ち} \quad Q = \infty \quad \dots\dots(4bii)$$

$$\text{但し} \quad l \neq \infty, \quad P_1 \neq 0$$

$$(4ii)+(4iv): \quad Ap \sin p + Bp(1 - \cos p) = -2\pi cp^2/(\pi^2 - p^2)$$

$$\text{故に} \quad p(\sin p) \left( A + B \frac{1}{2}p \right) = -2\pi cp^2/(\pi^2 - p^2)$$

$$\text{故に} \quad A = \infty \quad \dots\dots(4biii)$$

$$\text{従て又} \quad M_{A_0}/P_1 = \infty \quad \dots\dots(4biv)$$

従てこの場合は柱軸の曲り  $y$  及曲げモーメント  $M$  は  $\infty$  となる。この時の  $p$  (従て荷重  $W$ ) の値は  $2\pi$  以上の或る特定の値であることは明かである。而して  $p$  のこの特定値に就ては、後記の總括及  $C_2$ , (iii) で論究する。

(b<sub>2</sub>)  $\cos \frac{1}{2}p = 0$  なる場合: この場合は即ち  $p = \pi$  なる時にして、(4'v) 式より、

$$Ql/P_1 = 0, \quad \text{即ち} \quad Q = 0 \quad \dots\dots(4bvi)$$

$$(4v) \text{ より} \quad A = 0 \quad \dots\dots(4bvii)$$

$$\text{従て} \quad M_{A_0}/P_1 = a \quad \dots\dots(4bviii)$$

従て  $B = \infty$  .....(4b<sub>2</sub>v)

依つて (3) 及 (2) 式より,  $y = \infty$ ,  $M = \infty$  となるが, これは實際的には考へる必要がない特異現象である。以下少しく其の探究を試みる。

扱て, 前記 (a) の場合の考察に於ては  $p = \pi$  なる場合は, 之を除外した。今  $p = \pi \pm \Delta p$  但し  $\Delta p \neq 0$  なる場合を論究する。

後記の (6) 及 (7) 式に於て  $p = \pi \pm \Delta p$  と置くに,

$$\left( \cot \frac{1}{2} p \right)_{p=\pi \pm \Delta p} = \cos \left( \frac{1}{2} \pi \pm \frac{1}{2} \Delta p \right) / \sin \left( \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \Delta p \right) = \mp \frac{1}{2} \Delta p,$$

$$(\pi^2 - p^2)_{p=\pi \pm \Delta p} = \pi^2 - (\pi \pm \Delta p)^2 \cong \mp 2 \Delta p \pi,$$

$$(p \sin \pi \xi - \pi \sin p \xi)_{p=\pi \pm \Delta p} = \pm \Delta p \sin \pi \xi \mp \pi \Delta p \xi \cos \pi \xi$$

であるから, この場合の  $y$  並に  $M$  の値は後記 (6) 及 (7) 式に上記の値を代入して, 下記の値となる。

$$(y)_{p=\pi \pm \Delta p} = (c/l/2) \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos p \xi) - \frac{1}{\pi} \sin \pi \xi + \xi \cos \pi \xi \right\}$$

$$(M)_{p=\pi \pm \Delta p} = \left( \sin \pi \xi + \pi \xi \cos \pi \xi - \frac{1}{2} \pi \cos \pi \xi \right) / 2$$

即ち図-4 及 6 に明示した如くなる。

故に  $p \cong \pi$  の際には, 場合 (a) の諸現象並に弾性破損を呈するものである。しかして  $p$  を  $\pi$  以下から  $\pi$  以上にまで漸次増し行く場合を考へて見る。この際正しく  $p = \pi$  なる點を通る時に  $y = \infty$ ,  $M = \infty$  となる。しかし, この際  $p$  が  $\pi$  に絶対に等しくあり得る時間は絶対零である ( $p$  が正しく  $\pi$  に達した時,  $p$  の増加を中止せんとすることは實際的には不可能であるから)。  $y$  及  $M$  が  $\infty$  となる時間は絶対零である。尚又或る荷重が作用してある場合に, その荷重の  $p$  が  $\pi$  に全く等しくあり得る事確率は零である。然れば  $p$  を實際的に  $\pi$  と見做す場合も (a) の場合の諸現象を生ずるものである。

**總括:** 茲に上述の場合を纏めて論ずる。(a) の場合は,  $p$  (従て荷重  $W$ ) は零から  $2\pi$  迄の任意値に適用される。

その他の場合は,  $p$  の特定値の場合である。その中で (a<sub>1</sub>) 即ち,  $p = 2\pi$  及 (b<sub>2</sub>) 即ち,  $p = \pi$  の場合に於ける  $p$  は (a) の場合の  $p$  に含まれて居り, (b<sub>1</sub>) 即ち,  $\tan \frac{p}{2} = \frac{2}{2}$  なる場合の  $p$  は (a) の場合外に於ける特定値の場合である。而して (a<sub>1</sub>) 及 (b<sub>2</sub>) なる場合の  $p$  の特定値では, 柱軸の曲り  $y$  及その曲げモーメント  $M$  が  $\infty$  になる。この (a<sub>1</sub>) の場合に関しては, 後節 C<sub>2</sub>, (iii) で詳論する。又 (b<sub>2</sub>) の場合に関しては, この際は, 特異現象を呈し, 正しく  $p = \pi$  の場合は實在し得ず。尚實際的に  $p = \pi$  なる場合は, (a) の場合に含まれることを既に該場合に於て論じてある。

更に (b<sub>1</sub>) なる場合は實際的に起り得ない事が後節 C<sub>2</sub>, (iii) で論究してある  $p > 2\pi$  なることから明かである。之を要するに,  $p$  (従て荷重  $W$ ) の任意値に對して考究するためには, (a) の場合だけを論ずればよい事になる。従て以下 (a) の場合に就て論究を試みる。

扱て (4a<sub>1</sub>v) 式より  $a > b$  なる時には常に A<sub>0</sub> 端に於ける曲げモーメントが B<sub>0</sub> 端に於ける曲げモーメントより大なること明かである。  $M_{10}$  が  $p$  が増すと共に増大する有様は 図-2 の示す通りである。尚  $M_{10}$  は偏心量  $a$  が増すに従て増大する。A 點に於ける曲げモーメント  $M_A$  は後記 (7) 式より下記 (5) 式で示される。但し  $p = 0$  の際は, (4a<sub>1</sub>i) 式より  $M_{10} = 0$  となることを既に論じてある。又 (4'a<sub>1</sub>ii) 式より  $M_A = 0$  なることも判る。尚

$p \neq 0$  にありては、 $M_{A0}/P_1c \cong a/c + 2 \cdot \frac{1}{\pi}$  且つ  $M_A/P_1c \cong 2 \cdot \frac{1}{\pi}$  である。

$$M_A/P_1 = c\pi p \cot\left(\frac{1}{2}p\right) / (p^2 - \pi^2) \dots\dots\dots(5)$$

その  $M_A \sim p$  関係は図-2 の如くである。

上記 (3) 式に (4a) の諸式を用ひて書替へると、

$$y = c\pi p \left\{ \left( \cot \frac{1}{2}p \right) (1 - \cos p\xi) - \sin p\xi + (p \sin \pi\xi) / \pi \right\} / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots(6)$$

この式は柱軸が當初に有する曲り  $C$  が絶対零 (但し實在性等) なる際は、即ち眞直柱に於ては荷重偏心量の如何に拘らず常に変位  $y$  が零となりて、曲りが起らないことを告げてゐる。しかし、實際的には微少なりとも  $c$  を有するから、変位  $y$  が  $p$  従て荷重  $W$  の作用に依つて必ず生ずる。この詳細に就ては後節に記載することにする。

(6) 式より最大曲り即ち  $y_{max}$  の起る直断面の位置  $\xi$  を與へる下式が求まる。

$$\left( \cot \frac{1}{2}p \right) \sin p\xi = \cos p\xi - \cos \pi\xi$$

上式の與へる  $\xi$  の實際値は  $1/2$  だけである (其の譯は後記最大曲げモーメントの起る直断面の位置  $\xi_0 = 1/2$  だけが (8) 式の與へる實際値であると同様である)。

**B. 弾性限界内に於ける最大曲げモーメント**

(2), (3) 式と (4a) の諸式とより、一般に曲げモーメント  $M$  は次記で示される。

$$M = P_1c\pi \left\{ \pi \sin \pi\xi - p \left( \sin p\xi + \cot \frac{1}{2}p \cos p\xi \right) \right\} / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots(7)$$

(7) 式より最大曲げモーメント  $M_0$  の起る直断面の位置  $\xi_0$  を與へる式が求まり、次記で示さる。

$$\sin \left\{ p(1/2 - \xi_0) \right\} = \left( \pi^2 \cos 2\pi\xi_0 \sin \frac{1}{2}p \right) / p^2 \dots\dots\dots(8)$$

但し (8) 式の與へる  $\xi_0$  の實際値は  $1/2$  だけである。その譯は  $\xi_0 = 1/2$  が (8) 式を満足する事は先づ明かである。 $\xi_0$  がそれ以外の値では (8) 式を満足し得ない事は  $p$  を次変數として解く図解法で判る。従て (7) 式に於て  $\xi = 1/2$  と置けば、 $M_0$  の値が求まり、(9) 式で示さる。

$$M_0 = P_1c\pi \left( \pi - p \sin \frac{1}{2}p \right) / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots(9)$$

換言せば、図-3 で見る如くに、 $0 \leq p \leq 2\pi$  に於て、 $p$  の値の如何に拘らず、柱の中央 (即ち  $\xi_0 = 1/2$ ) で、最大曲げモーメント  $M_0$  が生ずる。 $p = 0$  の時には、(9) 式より、或は既に論じたる如くに、 $M_0 = 0$  である。

図-2.  $M_{A0} \sim P, M_A \sim p$  の関係

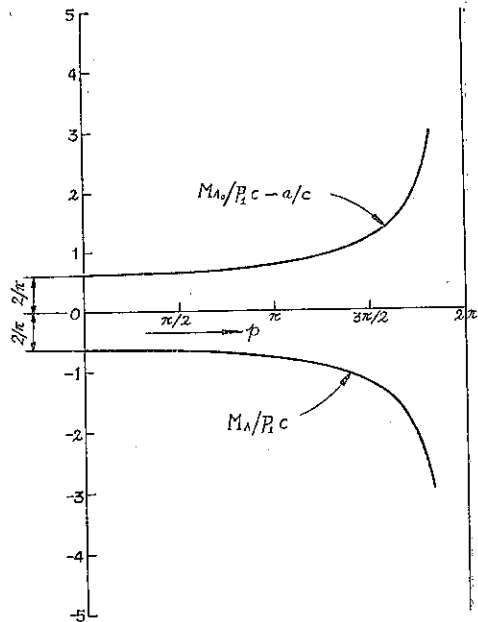
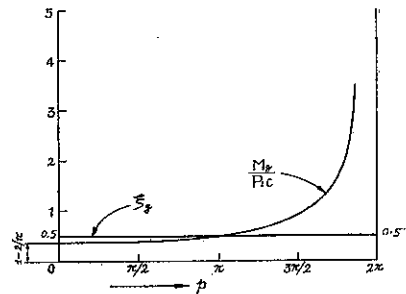


図-3.  $M_0 \sim p, \xi_0 \sim p$  の関係



従て  $\xi_0$  なる断面位置は實在せず。然れども  $p \equiv 0$  では、 $\xi_0 = 1/2$  即ち柱の中央で、 $M_0$  が起る。この際  $(M_0/P_1c)_{p \equiv 0} = 1 - 2/\pi$  である。  $p$  が次第に増大するに従て、 $M_0$  は図-3の如くに次第に増し、 $p \equiv 2\pi$  では、 $\xi_0 = 1/2$  の断面位置で、 $(M_0/P_1c)_{p \equiv 2\pi} = \infty$  である。

次に (7) 式より種々の  $p$  の値に對して、柱中の任意直断面に生ずる曲げモーメント  $M$  の大きを示せば 図-4 の如くである。

$M=0$  の位置を示す  $\xi_0$  なる断面から柱の両端断面に至る部分の直断面には負の曲げモーメントが起り、之に反して、 $\xi_0$  断面より中央に至る部分の直断面には正の曲げモーメントが起る、そして何れも  $\xi_0$  断面から遠去るに従て次第にその大きを増す。図には  $p = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$  並に  $p \equiv \pi$  の場合に於ける  $M$  を示した。

**C. 弾性限點に於ける荷重**

柱の弾性限點では、即ち柱中に起る最大圧縮応力値が材料の單純圧縮弾性限應力  $\sigma_l$  に達する時には、周知の如く下記が得られる。

$$P_1/A + M_0h/I = \sigma_l \dots\dots\dots(10)$$

但し  $A$ : 柱直断面の面積、  $P_1$ : 柱軸に沿ふて働く圧縮力  $W \sec \theta$ ,

$2h$ : 柱直断面の曲げ平面内の厚さ、

$I$ : 柱直断面の重心に於て曲げ平面に直角なる主軸に就ての慣性モーメント、

上記 (10) 式に (9) 式の  $M_0$  を用ひ、

$$P_1/A + P_1 c \pi h \left( \pi - p / \sin \frac{1}{2} p \right) / (\pi^2 - p^2) I = \sigma_l$$

之を書替へて、

$$\sigma_m \left[ 1 + (ch/i^2) \left( \pi - p / \sin \frac{1}{2} p \right) \left\{ \pi / (\pi^2 - p^2) \right\} \right] = \sigma_l \quad (11)$$

更に書替へると、

$$ch/i^2 = (\sigma_l / \sigma_m - 1) \left\{ \left( \pi - p / \sin \frac{1}{2} p \right) \left\{ \pi / (\pi^2 - p^2) \right\} \right\} \quad (12)$$

但し  $\sigma_m = P_1/A$ : 平均圧縮応力、

$i = (I/A)^{1/2}$ : 直断面回転半径、

$\sigma_m / E = e_m$ : 平均圧縮歪、  $p = (l/i) e_m^{1/2}$

上記 (12) 式より、任意の  $\theta$  に對して  $\sigma_m \sim (ch/i^2) \sim l/i$  關係を計算するを得、而して  $\sigma_m$  (或は  $p$  なる量) が上記式の値をもつ時、柱は弾性限點に達する。 $\sigma_m$  のこの値と  $ch/i^2$  との關係は 図-5 が示す通りである。

**C.1. 微小偏心に於ける弾性破損**

前節では、偏心量を必ずしも、微小ならずとして、柱の弾性破損を論じたが、本節では偏心量が微小と考へられる際の際の同破損を特に論じようとする。本節の場合先づ荷重  $W$  が柱軸となす角  $\theta$  は微小である。即ち

$$\tan \theta = (a-b)/l = \text{微小}$$

図-4.  $M/P_1c \sim \xi$  の關係

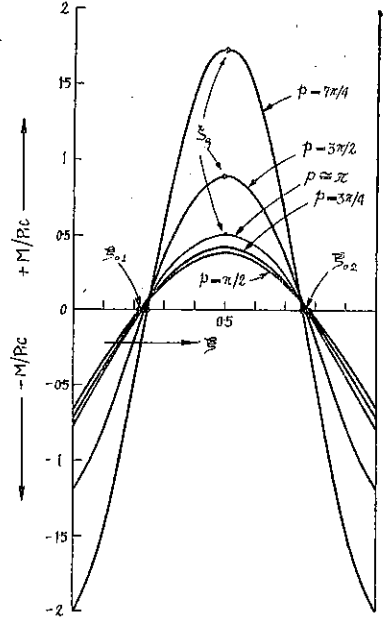
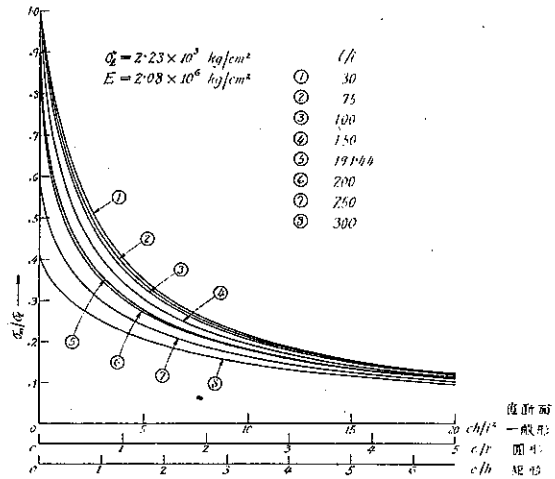


図-5. 弾性限荷重  $\sim ch/i^2$  の關係



依つて

$$P_1 = W \sec \theta \cong W \dots \dots \dots (II_i)$$

即ち本節の場合  $P_1$ ,  $W$  は同一量と見做され得る。

次に本節の場合  $\sigma_m = P_1/A$  を  $W/A$  と見做す場合の誤差は何程であるかを述べれば次の如くである。試みに  $(a-b)/l$  が 3/100, 5/100, 10/100 なる際に就て、誤差  $(\sigma_m)_{\tan \theta = 0.03} - (\sigma_m)_{\tan \theta = 0}$  の  $(\sigma_m)_{\tan \theta = 0}$  に対する比を計算せば夫々 0.04%, 0.12%, 0.5% にして、従て又誤差  $(p)_{\tan \theta = 0.03} - (p)_{\tan \theta = 0}$  の  $(p)_{\tan \theta = 0}$  に対する比は夫々 0.1%, 0.25%, 0.5% である。而して斯の如き微小の誤差では図-5 が、それに因る変化を明示し得ないのである。依つて  $\sigma_m$  及  $p$  はその偏心量の差  $(a-b)$  より殆ど影響を受けず。本節の場合には図-5 で明なる通り、柱軸の曲り  $ch/l^2$  によつてのみ著しき変化を受ける。

### C<sub>2</sub>. 柱軸の曲り量が微小なる場合に於ける弾性破損

前節では、當初に於ける柱軸の曲り量を必ずしも、微小ならずとして柱の弾性破損を論じたが本節では曲り  $ch/l^2$  が微小と考へらるゝ際と同破損を特に論じて見やう。

(i)  $p \neq \pi$  又は  $\sin \frac{1}{2} p \neq 0$  なる場合: (II) 式より、

$$\sigma_m \cong \sigma_t \dots \dots \dots (II_{ii})$$

但し詳しくは (II) 式を以つて表はすべきである。

(ii)  $p \cong \pi$  なる場合: 従て  $\sin \frac{1}{2} p \cong 0$  なる際には、

$$p = \pi - \Delta p, \text{ 但し } \Delta p \cong 0$$

と置いて、

$$\begin{aligned} \left( \pi - p / \sin \frac{1}{2} p \right) \{ \pi / (\pi^2 - p^2) \} &\cong \left\{ \pi - (\pi - \Delta p) / \left( \cos \frac{1}{2} \Delta p \right) \right\} \{ \pi / (\pi^2 - \pi^2 + 2 \Delta p) \} \\ &\cong \frac{1}{2 \Delta p} \cdot \Delta p = 1/2 \end{aligned}$$

従て (II) 式から、

$$\sigma_m \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{ch}{l^2} \right) \cong \sigma_t \dots \dots \dots (II_{iii})$$

となりて、 $c \cong 0$  の際には、 $\sigma_m \cong \sigma$  となる。

(iii)  $\sin \frac{1}{2} p \cong 0$  なる場合: この際には、

$$\frac{1}{2} p = \pi - \Delta p, \text{ 但し } \Delta p \cong 0$$

と置いて

$$\begin{aligned} \left( \pi - p / \sin \frac{1}{2} p \right) \{ \pi / (\pi^2 - p^2) \} &\cong \{ \pi - (2\pi - 2\Delta p) / \Delta p \} \{ \pi / (\pi^2 - 4\pi^2 + 8\pi \Delta p) \} \\ &= \{ 2\pi - (2 + \pi) \Delta p \} / \{ (3\pi - 8\Delta p) \Delta p \} \\ &\cong \{ 2\pi + (10/3 - \pi) \Delta p \} / (3\pi \Delta p). \end{aligned}$$



故に (11) 式より,

$$\sigma_m [1 + (ch/l)^2 \{2\pi + (10/3 - \pi)Ap\} / (3\pi Ap)] \cong \sigma_l$$

従て, 
$$Ap \cong \frac{2}{3} / \{(\xi - 1)(l^2/ch) - (10/\pi - 3)/9\}$$

但し 
$$\xi = \sigma_l / \sigma_m = (p_l/p)^2 \neq 1$$
 とする。尚  $p_l = l\sqrt{c/l}$

然らば,

$$p = 2\pi - 2Ap \cong 2\pi - \frac{4}{3} / \{(\xi - 1)(l^2/ch) - (10/\pi - 3)/9\} \dots\dots\dots (11'iv)$$

従て,

$$e_m \cong (j/l)^2 \left[ 4\pi^2 - \frac{16}{9}\pi / \{(\xi - 1)(l^2/ch) - (10/\pi - 3)/9\} \right] \left. \vphantom{e_m} \right\} \dots\dots\dots (11iv)$$

$$\cong (2\pi/l)^2$$

但し 
$$\xi = \sigma_l / \sigma_m = (p_l/p)^2 \neq 1$$

こゝに除外した  $\xi \cong 1$  なる場合は  $p \cong 2\pi$  であり、一方今の場合は  $p \cong 2\pi$  従てこの除外の場合は  $p \cong p_l$  即ち  $\sigma_m \cong \sigma_l$  となる場合である。

(11iv) 式は曲り量  $c$  が零に極めて接近する際、オイラー提唱の式に一致する。然れども  $l^2/h$  は普通の場合有限量であるが、 $p_l$  が  $2\pi$  に近い値である場合は、 $\xi - 1$  が微小数であつて (11iv) 式よりの  $\sigma_m/l^2 \cong (2\pi/l)^2$  及  $\sigma_m \cong \sigma_l$  なる近似値が大なる誤差を含むであらうことが想像される。この想像の當否は上記の近似式によりては判定しかねるが近似式によらざる図-5 でその是なることが明示されて居る。即ち同図に於て  $ch/l^2 = 0$  なる點の  $\sigma_m/\sigma_l$  の諸値は何れもオイラー提唱値である。尚 (11'iv) 及 (11iv) 式より、 $c \cong 0$  の時には  $p \cong 2\pi$  にして、 $c \neq 0$  なる時は常に  $p < 2\pi$  である。即ち  $p > 2\pi$  なる  $p$  は弾性限以内の  $p$  としては實現し得ない。図-5 でもそれを明示してゐる。

### C. 柱軸の曲り量が零の場合に於ける弾性破損

茲には柱軸の曲り量  $c$  が絶対零である長柱 ( $p_l > 2\pi$ ) がオイラー現象を起すことに關して考察を試みよう。

扱て (11iv) 式も図-5 も、共に長柱 ( $p_l > 2\pi$ ) は柱軸の曲り量  $c$  が零の時にオイラー現象が起ることを告げてゐる。然し眞直柱がたとへ偏心荷重を受けても、今の場合その両端が固定されてゐるを以つて、結果に於ては、柱は柱軸に關して凡ての條件が對稱であると考へ得べく、然らば、この場合、柱が或る一方に曲がる、即ちオイラー現象が起るとすることは不合理である。即ちオイラー説は推理上矛盾を含む譯であるが、この矛盾は、兩端自由支持の眞直柱に零に近き偏心にて荷重の作用せる時にオイラー現象が起るとするを考察した<sup>(1)</sup>ると全く同じく下記で解決される。

(1) 先づ本論文の場合、曲り量  $c$  は之を [a] 絶対零、[b] 近似零なる二つの場合に於て考へる。然れば

(2) 場合 [a] では單純壓縮のみが起り、場合 [b] ではオイラー現象が起る。

(3) 然し場合 [a] は實在性をもたないから實際的には場合 [b] だけが考へられ、従て常にオイラー現象が起り得ることになる。尚  $c$  を絶対零と考ふる時には、

(i)  $p = \pi$  又は  $\sin \frac{1}{2}p = 0$  でない限りは (11) 式から  $p = p_l$  (即ち  $\sigma_m = \sigma_l$ ) 即ち單純壓縮で弾性破損が起る。

(ii)  $p$  が  $\pi$  に絶對的に相等しき時に就ては  $p$  を  $\pi$  以下から  $\pi$  以上にまで、漸次増し行く場合を考へて見る。この際  $p = \pi$  となる時間は絶対零である。  $\sin \frac{1}{2}p$  に就ても、それが零となるべき時間は絶対零である。故に  $c$

量を絶対零とする場合には  $p$  の値の如何に拘らず単純圧縮のみが起ることになる。

以上要するに當初に於ける柱軸の曲り量を [a] 絶対零とする場合と, [b] 近似零とする場合とでは柱が受くべき弾性破損が相違することになるが, 實際的には, 場合 [b] だけが實在可能であり, 従て長柱 ( $p_l > 2\pi$ ) は常にオイラー現象によりて弾性破損を受けることが決論される。

#### C. $ch/i^2 \sim \sigma_m$ 線図に就ての考察

図-5 は種々なる細長比 ( $l/i$ ) の柱に對して  $ch/i^2 \sim \sigma_m$  關係を  $c_1 = 1.077 \times 10^{-3}$  である場合 (軟鋼) について求めたものである。これらの諸図を見るに  $\sigma_m$  の値は  $ch/i^2 = 0$  に於ては  $p_l \leq 2\pi$  では  $\sigma_l$  であり,  $p_l > 2\pi$  では  $\sigma_l$  よりも小さく, 且つ細長比の大きくなる程小さくなる。而て  $ch/i^2$  が増すに従ひ  $\sigma_m$  の値は漸次降下する。この降下率は各曲線に於て  $ch/i^2$  が小さい程大きくなる。

#### 附 記

$ch/i^2$  (以下この量を  $c_1$  で示すことにする) の変化に伴ふ  $\sigma_m$  の変化率即ち  $d\sigma_m/dc_1$  は (12) 式によりて,

$$d\sigma_m/dc_1 = -\pi \left( \pi \sin \frac{1}{2} p - p \right) \sigma_m^2 \left[ \left( \sigma_l (\pi^2 - p^2) \sin \frac{1}{2} p + (\sigma_l - \sigma_m) \left\{ \frac{1}{2} (p^2 - \pi^2) \cos \frac{1}{2} p + 2p \sin \frac{1}{2} p \right\} \left( \frac{1}{2} p \right) + c_1 \pi \left( \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} p - 1 \right) \left( \frac{1}{2} p \sigma_m \right) \right] \right]$$

$c_1 \equiv 0$  の時は  $p (= l\sqrt{\sigma_m/E}i) = 2\pi$  であるから,

$$(d\sigma_m/dc_1)_{c_1 \rightarrow 0} \cong -(4/3) \sigma_m^2 / \pi (\sigma_l - \sigma_m) \\ = -(64/3) E \pi^3 (i/l)^4 / \{c_1 - (2\pi/l)^2\}$$

曲線の  $c_1 \equiv 0$  に於ける傾きは細長比 ( $l/i$ ) が小さい程大きい。而して  $p_l \cong 2\pi$  即ち  $c_1 \cong (2\pi/l)^2$  なる柱に於ては, 即ち,

$$(d\sigma_m/dc_1)_{c_1 \rightarrow 0, p_l = 2\pi} = -\infty$$

となる。

$c_1 = 0$  の附近に於て,  $\sigma_m$  が斯の如く急激なる降下を示すことは, 僅少の曲りを持つ柱に於ても, 柱の弾性限荷重はオイラー提唱の値, 或は単純圧縮の弾性限值より, 遙かに小なることがあり得べきことを意味してゐる。今これ等の誤差を, 直断面が円形で,  $c$  が柱長の  $1/10,000$  である場合に就き同図から求めて見るに,  $l/i = 200$  にありては, (この場合には  $ch/i^2 = 4/100$  となる), 誤差  $(\sigma_m)_{c=0} \sim (\sigma_m)_{0.01}$  の  $(\sigma_m)_{c=0}$  に對する割合は 10% である。同じく  $l/i = 100$  にありては, (この場合には  $ch/i^2 = 2/100$  となる), 誤差は 2% 程である。更に  $c$  が柱長の  $1/1,000$  である場合に就きて求めて見ると,  $l/i = 200$  にありては, 誤差  $(\sigma_m)_{c=0} \sim (\sigma_m)_{0.1}$  の  $(\sigma_m)_{c=0}$  に對する割合は 30% となる。同じく  $l/i = 100$  にありては 6% となる。

尙図から, 或は上述の例より上記意味の誤差は  $p_l = 2\pi$  なる時に最大でありて  $p_l$  と  $2\pi$  との差が大きくなる程小さくなるのである。

故に一般には眞直であると思はれる場合でも, その弾性限の實際値は必ずや, オイラー値或は単純圧縮値よりも小さくして, 特に  $p_l$  の値の如何によりて, 遙かに小さくあり得べきことは茲に吾人が最も注意することである。

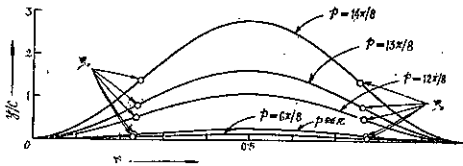
#### D. 柱の曲り

任意荷重に於ける柱中の曲り  $y$  は (6) 式で示される。而て  $y \sim \xi$  の關係は図-6 の如く  $\xi = 1/2$  の断面で,

即ち柱の中央断面で  $y_{1/2}$  が最大である。 $\xi_0$  の断面で反曲點を生じ、該断面で曲げモーメントが零である。反曲點を示す断面の位置  $\xi_0$  と  $p$  との関係は、下記式で示される。之を図で示せば、**図-7** の通りである。

$$\cot \frac{1}{2} p \cos p \xi_0 + \sin p \xi_0 - (\pi/p) \sin \pi \xi_0 = 0 \dots\dots\dots (13)$$

**図-6.**  $y \sim \xi$  の関係



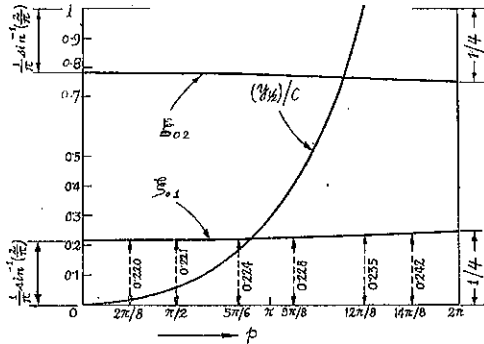
但し  $p=0$  の際は、即ち **A. a11** の場合で、(4'a i) 及 (4'a ii) 式より  $y=0, M_c=0$  であるから  $\xi_0$  なる断面位置は存在せず。然れども、 $p \neq 0$  では、上式より  $(\xi_0)_{p \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi} \sin^{-1}(2/\pi)$  となる。

柱の中央に於ける曲り  $y_{1/2}$  は (6) 式に  $\xi=1/2$  と置いて得たる下記 (14) 式より求まる。

$$y_{1/2} = cp \left( p - \pi \tan \frac{1}{4} p \right) / (\pi^2 - p^2) \dots\dots\dots (14)$$

**図-7** には、同式より  $y_{1/2}$  が  $p$  によりて変化する有様を示した。 $p$  が零から  $2\pi$  まで増す際、 $(y_{1/2})/c$  は零から漸次而も漸次急速に増し行き、 $p=2\pi$  なる極限で無限大となる。

**図-7.**  $\xi_0 \sim p$  及  $y_{1/2}/c \sim p$  の関係



**E. 弾性限點に於ける最大曲り**

弾性限點に於ける曲りの極大  $\eta_i$  は、前記 (14) 式に於て、 $p$  を弾性限値にとりて求まる。而して  $p$  の弾性限値

に就ては、(11) 式より求まる。この兩式に於て、 $p$  をパラメーターと考へる。然らば、弾性限點に於ける最大曲り  $y_{1/2}$  を  $h/2$  倍したる  $\eta_i$  が求まる。即ち  $p$  に種々なる値を與へることによりて、 $c$  の種々なる値に對應する  $y_{1/2}$  を  $h/2$  倍したる  $\eta_i$  なる値が正確然も簡単に計算し得るのである。これらの極大の  $c$  に対する關係を上述べの計算方法で求めたものが**図-8** である。この圖に就て見るに、 $\eta_i$  は (1)  $li \leq 2\pi/\sqrt{ei}$  なる柱では、 $c$  が零の時には零であり、 $c$  が増すにつれて、次第に増す。

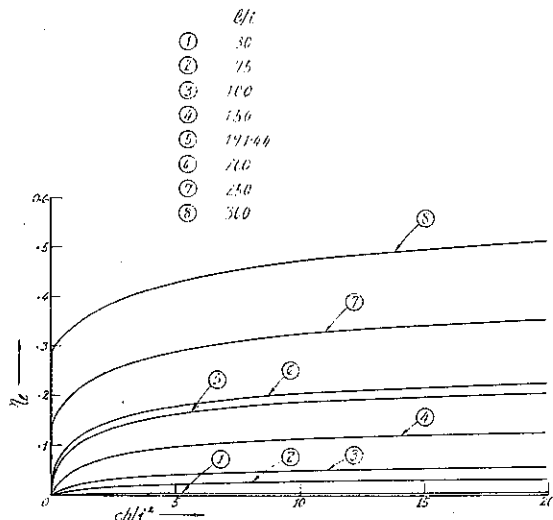
(2)  $li > 2\pi/\sqrt{ei}$  なる柱では、 $c$  が零の時には、一定値  $2\{(pi/2\pi)^2 - 1\}$  なる近似値をとる。詳しくは計算上より得たる**図-8** の如し。

その理由は、この場合、**C<sub>2</sub>** の記述から

$$p/2 = \pi - 4p, \text{ 但し } 4p \cong (2/3) / \{ (pi^2/4\pi^2 - 1)(l^2/ch) - (10/\pi - 3)/9 \}$$

又 (14) 式の右邊の一部は下記の如くであるから、

**図-8. 弾性限最大曲り**



$$p \left( p - \pi \tan \frac{1}{4} p \right) / (\pi^2 - p^2) \cong (4/3)(1/4p - 1 + 1/\pi)$$

従て

$$\begin{aligned} \eta_i &= p \left( p - \pi \tan \frac{1}{4} p \right) (ch/i^2) / (\pi^2 - p^2) \\ &\cong 2 \{ (pi^2/4\pi^2 - 1) - (2/3)(16/3\pi + 1)(ch/i^2) \} \end{aligned}$$

故に  $c=0$  の時には、 $\eta_i \cong 2(pi^2/4\pi^2 - 1)$  となり、即ち  $(\eta_i/\rho)_i$  は一定値  $2\{(pi/2\pi)^2 - 1\}(i^2/h)$  をとるからである。詳しくは上述の如くして (14), (11) 式より計算した図-8 の如くなる。同図で  $c$  が零から次第に増し行く際、 $\eta_i$  も亦次第に増すのである。

### 結 び

本論文では両端固定の鋼柱の柱軸が當初に曲りを持つ時に、その弾性限荷重、曲り(変位)、最大曲げモーメント等の大きさ及位置を論じ、それがオイラー値と何程の相違を生ずるかを、假りに1山の正弦形曲線を柱軸とする柱に對して試みたるものである。こゝに論究されたる主なる事項を述べれば、

1) 柱軸の當初に於ける曲り量が零なる場合には、これを絶対零と近似零とに分け、絶対零の時には  $p$  の値の如何に拘らず單純圧縮のみが起るべきであるが、絶対零の現象は實在性零にして、實際的には近似零だけが實在可能であり、従て長柱 ( $pi > 2\pi$ ) は常にオイラー現象によりて弾性破損を受けることを述べた。

2) 僅少の曲りを持つ柱に於て、柱の弾性限荷重は、オイラー値、或は單純圧縮の弾性限値より遙かに小なることがあり得べきことを示した。而してこの誤差は  $pi = 2\pi$  なる時に最大であつて、 $pi$  と  $2\pi$  との差が大きくなる程小さいのである。

3) 兩端の偏心量の相違は柱の弾性限荷重並に柱の曲りに微少の影響(實際的には零と見做され得る程度)を及ぼすが、各個の偏心量は、柱の曲り  $\eta$  及柱中に生ずる曲げモーメント  $M$  並に弾性限荷重には影響を及ぼさないことを述べた。

4) 柱中に生ずる最大曲り、特に弾性限荷重に於けるのに就ても論究を試みた。

(本論文は砂谷教授の御指導を受けたので茲に衷心から感謝の意を表す。)