論　説　報　告

第22巻第11號　昭和11年11月

道路面流水の理論

會員　工学博士　久野重一郎*

Flow of Water on the Road Surface

By Jyuitirô Kuno, Dr. Eng., Member.

要　　旨

直線横断形及曲線横断形の路面に於て，路頂部へ降つた雨が，路端まで達する際の流下時間，並に雨水流線の形状と長さを，縦勾配あるときとないときについて，数理的に調べたものである。そのうち，流下時間に關しては，既に工藤君の理論が發表されてゐるけれども，本文は，それとは違つた前提に立つた。

第1章　緒　　言

1. 目　　的

道路縦勾配の路面排水に及ぼす效果について，本誌昭和 11 年 1 月號に，工藤久夫君の論説があつた。同君は，「定性的に縦勾配の效果を求める」目的で執筆されたとのことであつた。その限りに於て，誠に出色なものであつたと共に，同君の目的は十分に達せられて居つたといつていゝであらう。

次に，同君には眞に御迷惑であらうと思はれるが，こゝで同論説を，定量的，數学的に眺めることを許して頂くなら，そこに多くの餘地が，殘されてあつた。

i. **流量一定の矛盾**　「雨量一定ならば，流向單位幅の流量は，縦勾配あるときと，ないときとが，相等しい」といふことを，最も大切な前提とされて居つた。1 降水箇所の雨水を抽出するといふ考へ方に立つとき，雨量一定ならば，（後に記す證明から見られるやうに）流向單位幅の流量は縦勾配のあるなしによつて，違ふのである。「雨量一定」と，「流向單位幅の流量一定」とは，相容れない現象である。この點に於て，同論説は，前提自体に内部矛盾があつた。これは，金子　柾君も，その討議に於て，指摘されたところであつたが，その回答を見るに，工藤君は，尙，見解を異にされてゐるやうであつた（本誌，昭和 11 年 7 月，630 頁）。

勿論，こゝで，工藤君のいはれる「1 點」といふことの意義が，また問題にならうかも知れぬ。幾何学的な 1 點（位置のみあつて廣さのないもの）をとるならば，嚴密には，そこの降水量といふものも考へられないことである。底面の廣さがない以上その上の体積は考へられないからである。この意味に於て，「1 點の降水量」といふ言葉には，概念の不明瞭なところがあるのである。1 點の降水量といふ考へ方自体に，既に不備があることである。降水量を豫想する以上，必ず，いくらかの廣がりが考へられて居る筈である。どんなに微小にせよ，降水の幅が，暗默のうちに想定されてゐると見るべきであらう。工藤君のいはゆる任意 1 點は，任意 1 箇所といふ意味に解釋してよからうと思ふのであるが，これは，同君の御意見を一度伺つて見ないと，はつきりしないことである。

ii. **水深一定の矛盾**　「任意 1 點の降水量一定の場合には，縦勾配ないときの水深は一定である」といふ考へ

*　九州帝國大学助教授

が，全編を一貫して居つた。直線横断形では，その通りであらう。曲線横断形だと，縦勾配ない場合と雖も，路面横勾配が，路端へ近づくほど増す。その平方根に比例する流速も，從つて路端へ近づくほど増大する。そこへ，水深一定の假定を入れると，流量も，路端へ近づくほど大きくなる。「降水量一定」と相容れないことである。卽ち假定自体の內部矛盾が，こゝにも，あつたのである。

iii. **雨量一定の疑義**　「任意 1 點にのみ均一强度の降水量ある場合を扱ふ」と記されながら，その事柄自体は，數式中へ組込まれてゐなかつた。といふのは，雨量一定と相容れないところの流量一定，水深一定の條件を，解式中へ組込んで了はれたからである。縱勾配あるときと，ないときの流下時間の比を計算されたけれども，それが果して，同一雨量に對する流下時間の比であるかどうかに，疑義があつた。救ふことのできない弱所であつた。

以上は，工藤君の意志に反してなしたであらうところの定量的批判である。定性的には，「縱勾配あれば，雨水の流下時間が長びく」といふ性質を，近似的にせよ，示し得てゐる點に於て，價値を認めなければならぬ。

こゝで筆者は，工藤君の殘された定量的領域へ，一歩を進めて見たいと思ふのである。內部矛盾を含まない假定に立つて，流下時間，並に雨水流線の解式を，或る程度まで嚴密に求めることが，目的である。

2. 問題の範圍

雨は，路面全体へ一樣に降ること勿論であるが，ここでは，數学的解法を單純にする目的から，雨水の一部分だけを引離して考へよう。卽ち，路頂の線（一般には路の中心線）上，微小幅へ降りつづく雨だけを抽出し，この雨水の中，片方の側溝へ流下する量を對象として考へる。この路頂雨水が，どういふ經路をとつて，路端へ達するか（雨水流線)。また，路端へ達するまでの時間が，縱勾配のあるなしによつて，どれだけ影響されるか（流下時間の問題)。それらを，數学的に解いてみようといふのである。

路頂以外へ降つた雨水は，路頂雨水に比べて，流下距離が短くなる。しかし，流れ方自体についていへば，路頂雨水流下經路の末部だけを考へたものに，大体，一致するわけである。從つて，流線及流下時間に關する限り，路頂雨水を考へるのが，一等一般的だといつてよいのである。

路面全体へ降りつづく全雨水を同時に考へて，流量や水深が，場所により，どう変るかといふやうな事柄は，ここで取扱はないのである。路頂雨水だけを抽出するといふ方法は，嚴密にいふと，現實との間に，間隙を生ずるであらう。全雨水を同時に考へてその流線及流下時間が，解けるのであれば，それが一等いゝ。これは，今後の問題として，篤学の士の御硏究に待つことである。

3. 解法上の前提

1. 路頂部へ降つた雨だけを抽出して考へる。
2. 路頂部へ同一降水量あるものとして，種々の路面條件の流水現象を比較する。
3. 平均流速の公式を $v=C\sqrt{HS}$ とし，係數 C は，路面の性質だけによると假定。
4. 鉛直方向の要素は，影響少いときには，これを省略する。

工藤君の前提と違ふ點は，流向單位幅の流量を一定としないことゝ，流速公式の形の違ひとである。

第 2 章　一般解式

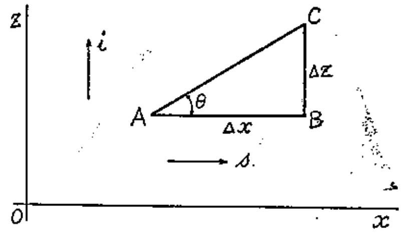
1. 最急勾配 S

i: 路の縱勾配，s_0: 普通にいはゆる橫勾配，s: 路面橫勾配，h: 路頂高，l: 路頂と路端の距離（一般には道幅

の半分）としよう，すると，$s_0=h/l$，直線横断形では $s=s_0$，曲線横断形では，s は點毎に値が違ふ。

路頂線（一般には路の中心線）を z 軸にとり，その上の 1 點を原點として，横方向へ x 軸をとらう（図-1）。横へ Δx，縦へ Δz 離れて 3 點 ABC をとり，B は A よりも $s\Delta x$ だけ低く，C は B よりも $i\Delta z$ だけ低いとしよう。鉛直方向の要素を省略するとき，AC 線の長さは $(\Delta x^2+\Delta z^2)^{1/2}$ になる。從つて AC 線の勾配は，

図-1.



$$S_1=\frac{s\Delta x+i\Delta z}{(\Delta x^2+\Delta z^2)^{1/2}}=\frac{s+\lambda i}{(1+\lambda^2)^{1/2}}$$

ここで $\lambda=\Delta z/\Delta x$。$S_1$ が最大になる條件を調べるため，$dS_1/d\lambda=0$ とおけば，$\lambda=i/s$ を得る。これを前式へ代入。最急勾配 S は次のやうになる。

$$S=(s^2+i^2)^{1/2}=s(1+\lambda^2)^{1/2}\quad\cdots\cdots(1)$$

路面横勾配と縦勾配との vector sum が，その點の最急勾配になることを示す。最急勾配の條件を，微分の形で書くと，

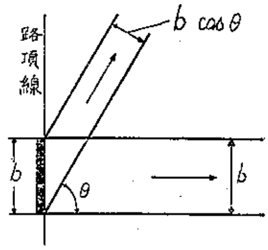
$$\lambda=\frac{dz}{dx}=\frac{i}{s}\quad\cdots\cdots(2)$$

これは，一般には，各點毎に相違する値である。

2. 流水幅員 b

路頂線に沿ふて b なる長さの部分へ降る雨は，縦勾配なれば，横へ b の幅で流れる。縦勾配があつて，流線が θ だけ傾くときは，流水幅が $b\cos\theta$ に狭まるのである。これより廣い幅をとつては，隣りの部分の雨水が流れることに，差支へるわけである（図-2）。曲線横断形の場合には，上の關係が，各點毎に存在すると考へる。鉛直方向の要素を省略すれば 図-1 から，次のことがわかる。

図-2.



$$\cos\theta=\frac{\Delta x}{(\Delta x^2+\Delta z^2)^{1/2}}=\frac{1}{(1+\lambda^2)^{1/2}}$$

路頂線上，b なる長さ（降水幅微小）へ，或る降水量があり，他の點の雨水を除外して考へると，次の關係がある（右表參照）。但し直線横断形で，路の片側へ流れる雨水だけをとつてゞある。

	縦勾配ない場合	縦勾配ある場合
路頂部降水量	Q_1	Q_2
流水幅員	b	$b\cos\theta$
流向單位幅の流量	$q=Q_1/b$	$q'=Q_2/b\cos\theta$

いま，降水量一定と考へれば，$Q_1=Q_2$ 從て

$$q=q'\cos\theta \quad 或は \quad q<q'$$

流向單位幅の流量は，縦勾配あるときの方が大きい。これは，金子征君の述べられた通りである。もし，こゝで，流向單位幅の流量一定，$q=q'$ とするならば，

$$Q_1\cos\theta=Q_2 \quad 或は \quad Q_1>Q_2$$

降水量の違ふ場合をとつて，流下時間を比較するといふ結果になる。筆者が，緒言に於て指摘したのは，この點である。

3. 径　　深 (hydraulic mean depth)

雨水が，路面上を，幅 b，深さ H で流れるとしよう。流水横断面 bH，潤邊 $b+2H$

$$\text{徑深}=bH/(b+2H)=H/(1+2H/b)$$

路面流水では，H が，數 mm 程度であつて，b はかなり大きくとり得る。從て比 (H/b) は，1 に對して微小と考へることができる。で，この項を省略すると，徑深が H になる。水深自体になるのである。路面では，周壁との摩擦が，水底だけで起るわけだから，その方からいつても，H を徑深と見ることに，大して不都合はないであらう。かうした理由から，流速公式の徑深には，その點の水深をとることにしよう。

4. 平均流速 v

最急勾配線に沿ふて，雨水が流れるものと假定し，水深を徑深にとれば，Chezy 系の公式は $v=C\sqrt{HS}$ になる。これについて，記號を右表のやうに定めよう。

項目	縱勾配ない直線橫斷形	縱勾配ある場合
水深	H_0	H
最急勾配	s_0	S
平均流速	$v_0=C\sqrt{H_0 s_0}$	$v=C\sqrt{HS}$
水流橫斷面	$H_0 b$	$Hb\cos\theta$
流量	Q_1	Q_2

すると，流量は，次のやうになる。

$$Q_1=H_0 b v_0=bCH_0^{3/2}s_0^{1/2},$$

$$Q_2=Hb\cos\theta\, v=bCH^{3/2}S^{1/2}\cos\theta$$

降水量 Q を與へて，Q_1 と Q_2 がこれに等しいときを考へれば（雨量一定の條件），

$$Q=Q_1=Q_2$$

主として路面の粗度に關係する係數 C が，同質路面では一定であると假定すれば，次の關係がでる。

$$H^{3/2}S^{1/2}\cos\theta=H_0^{3/2}s_0^{1/2},\quad \text{或は}\quad H^{1/2}=H_0^{1/2}(\sec\theta)^{1/3}(s_0/S)^{1/6}$$

これを，v の式へ代入。更に v_0 を導入すれば，

$$v=C\sqrt{HS}=v_0(\sec\theta\, S/s_0)^{1/3}$$

前に出した S と $\cos\theta$ の値を代入。整理すれば，

$$v=v_0\,\{(s^2+i^2)/ss_0\}^{1/3}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

縱勾配ないときは　$i=0$ で，$v=v_0(s/s_0)^{1/3}$

更に直線橫斷形では　$s=s_0$ で，$v=v_0$

縱勾配ない場合でも，直線橫斷形と，曲線橫斷形とで，流速が違ふやうに仕組まれてゐる。v_0 は，縱勾配ない直線橫斷形の場合の流速で，他の基準になるわけだから，特に基準流速と名づけよう。縱勾配ない直線橫斷形の場合に，路頂部降水量 Q を指定すれば，

$$Q=bH_0C\sqrt{H_0 s_0}=bCH_0^{3/2}s_0^{1/2}$$

これから H を出し，それを v_0 の式へ代入すると，

$$v_0=\left\{C^2 s_0\left(\frac{Q}{b}\right)\right\}^{1/3}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

こゝで，s_0 は，橫勾配だからすぐわかる。Q/b は，路頂部單位長さの流量で，例へば次のやうにして求められる。路面へ 10 分間に 1.5 cm (15 mm) の降雨あるとき，路頂部で長さ b，幅 1 cm の部分の流量を考へると，

$$\frac{Q}{b}=\frac{1.5\times b\times 1}{b}\,\frac{1}{10}=0.15\ \mathrm{cm^3/min\text{-}cm}$$

C は實驗から決めねばならぬ。或は，他の流速公式から，極く大ざつぱには，推定できよう。とにかく，この基準流速 v_0 は，路面橫勾配 s や縱勾配 i には直接の關係ないもので，從つて，橫座標 x の函數ではない。

5. 流下時間 T

図-1 に於て，AC の部分を流下するに要する時間は，距離 AC を，その部の平均流速 v で割れば，出る筈である。それを $\varDelta T$ とすれば，

$$\varDelta T=\frac{AC}{v}=\frac{(s^2+i^2)^{1/6}s_0^{1/3}\varDelta x}{v_0 s^{2/3}}$$

路頂から路端まで流下するに要する時間は，

$$T=\frac{s_0^{1/3}}{v_0}\int_0^l\frac{(s^2+i^2)^{1/6}}{s^{2/3}}dx$$

縦勾配ない場合は　$i=0,\quad T=\int_0^l\left(\frac{s_0}{s}\right)^{1/3}\frac{dx}{v_0}$

更に直線横断形では　$s=s_0,\quad T=\int_0^l\frac{dx}{v_0}=\frac{l}{v_0}$

便宜上，$l/v_0=t$ とおかう。t は，縦勾配ない直線横断形で，横勾配 s_0 の場合に，路頂から路端まで流下するに要する時間であつて，他の基準とするに便だから，これを基準流下時間と名づけよう。これを入れると，

$$T=\frac{t\,s_0^{1/3}}{l}\int_0^l\frac{(s^2+i^2)^{1/6}dx}{s^{2/3}}$$

$$\frac{T}{t}=\frac{s_0^{1/3}}{l}\int_0^l s^{-2/3}(s^2+i^2)^{1/6}dx \cdots\cdots(5)$$

この式によつて，一定降水量に對する一般流下時間と基準流下時間との比が，與へられることになる。

6. 雨水流線

最急勾配の條件式 (2) 式を書替へると，

$$z=\int_0^x(i/s)dx \cdots\cdots(6)$$

これは，xz 平面に於て，最急勾配線の位置を示すものである。從て，雨水流線の方程式になることである。但し，鉛直方向の要素を省略してゐるから，それだけ近似的である。眞の流線を，水平面へ投射したものが與へられるのである。吾々の目的には，それで十分であらう。

雨水流線の切線が x 軸となす角を θ とすれば，

$$\tan\theta=\frac{dz}{dx}=\frac{i}{s}$$

これを用ひて，雨水流線の全長を求めると，

$$L=\int_0^l(1+i^2/s^2)^{1/2}dx$$

或は　$$L=\int_0^l s^{-1}(s^2+i^2)^{1/2}dx \cdots\cdots(7)$$

雨水流線の全長といふのは，雨滴の流下距離に外ならない。縱勾配がない場合は，$i=0$，$L=l$ 卽ち，路頂から路端までの距離が，流線全長になることを示し，これは，當然なことである。

第 3 章　直線横断形

1. 流下時間

への字形の横断形，または直線勾配の步道を考へよう。路面横勾配 s は，横勾配 s_0 に等しくなり，x の函數でないことになる。從て，(5) 式の積分は，甚だ簡單である。

$$\frac{T}{t}=\left(1+\frac{i^2}{s_0^2}\right)^{1/6} \cdots\cdots (8)$$

この値は，必ず1より大きい。縦勾配あれば，同一雨量に對する流下時間が，長びくのである。その増し方は勾配比によつて決まり，各勾配の絶對値には，直接支配されない。例へば，$i=1\%$ $s_0=2\%$ の場合と，$i=2\%$ $s_0=4\%$ の場合とは，T/t の値が等しくなる。

例 1. $i=1\%$，$s_0=2\%$ の場合。

$$T/t=(1+0.5^2)^{1/6}=1.038$$

約 4% 長びくことになり。t 自体は，(4) 式を用ひて $t=l/v_0$ として出さねばならぬ。t が知れると T も出る。

例 2. $i=3\%$，$s_0=3\%$ の場合。

$$T/t=(1+1)^{1/6}=1.123$$

約 12% 長びくといふことになる。

$i=s_0$ に對する工藤君の解法では，$T/t=1.30$ になつてゐた。いま，上の場合の降水量を Q とし，$Q_1=Q\sec\theta$ なる量が，縦勾配ない路面へ流れたとしよう。$i=s_0$ のとき（次節に示す理由から）$\theta=45°$，$Q_1=1.414\,Q$ これを (4) 式の v_0 の式へ代入。

$$v_0'=v_0(1.414)^{1/3}=1.122\,v_0,\quad t'=l/v_0'=t/1.122$$

$$T/t'=1.122(T/t)=1.122\times1.123=1.26$$

これは，工藤君の値に，かなり近い。縦勾配ない場合に對し，暗默裡に，大きい流量が考へられてあつたゝめ，その流速が増し，t が減り，T/t が増大したのであらう。とにかく，同君の解式は，降水量の違ふ場合について，流下時間の比較をされたことが，これでも分るのである。

2. 雨水流線

直線横断形では，s が x に無關係であるから，流線の微分方程式 (6) 式は，次のやうになる。

$$z=(i/s_0)x \cdots\cdots (9)$$

これは，xz 平面に投射した場合に，流線形状が直線であることを示すのである。横勾配と縦勾配が相等しい場合には，$z=x$ になる。45° の方向をもつ直線であつて，雨水は 45° の向きに流れる。常識的に考へても，さうあるべきことが想像されることである。

$i=0.5\,s_0$ の場合の流線は，

$$z=0.5\,x \quad 或は \quad z=\tan 26°34'\,x$$

雨水は，26°34′ あたりへ向つて流れるといふことになる。次に，雨水流線の全長，即ち雨水の流下距離は，(7) 式から

$$L=l(1+i^2/s_0^2)^{1/2} \cdots\cdots (10)$$

これは，鉛直方向を省略してゐるから，實際とは，僅か違ふことである。$i=s_0$ の場合には，$L=1.41\,l$ である。$i=0.5\,s_0$ の場合は，$L=1.12\,l$ こゝで l は，路幅の半分。

第 4 章 指數曲線横断形

1. 横断面の式

路面横断形が，指數公式

$$y=h(x/l)^{1.5}$$

で與へられる場合を考へよう。數式を簡單にする目的から,「路端に於ける路面横勾配」を α で示し, これを路端傾斜と略稱しよう。すると, 上の指數曲線の場合には,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{路端傾斜} & \alpha=1.5\,s_0=1.5\left(\dfrac{h}{l}\right)\\ \text{路面横勾配} & s=\dfrac{dy}{dx}=\alpha\left(\dfrac{x}{l}\right)^{1/2}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(11)$$

これから次の關係が導かれる。

$$x=l\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2,\quad dx=\frac{2ls}{\alpha^2}ds\quad\cdots\cdots(12)$$

必要ある場合には, この (12) 式によつて, 積分變數を x から s へ變へることが,できる。その際, 積分限界については,

$$\left.\begin{array}{lll}x=0 & \text{に對し} & s=0\\ x=l & \text{に對し} & s=\alpha\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(13)$$

即ち, 横座標に沿ふて積分する代りに, 路面横勾配に沿ふて積分することが, できるわけである。曲線横斷形の流下時間を求めるには, s を使ふ方が, 便利であつた。

2. 流線の形狀

雨水流線の微分方程式 (6) 式へ, (11) 式の s を代入すると,

$$z=\frac{il^{1/2}}{\alpha}\int_0^x\frac{1}{x^{1/2}}dx$$

これから, 次の式がでる。

$$z=2i(lx)^{1/2}/\alpha,\quad \text{或は}\quad z^2=4i^2lx/\alpha^2\quad\cdots\cdots(14)$$

例へば,
$i=\alpha=1.5\,s_0$ ならば $z^2=4lx$
$i=0.5\alpha=0.75\,s_0$ ならば $z^2=lx$
$i=0$ ならば $z=0$ (x 軸)

縱勾配ないときは, 直線になるが, その他の場合は, いづれも, 路頂線に接する拋物線である。路頂附近は, 雨水が縱方向へ流れる傾向あることを示してゐる。路面横勾配が小さく, 縱勾配がそれより大きいから, 雨水が, 縱方向へ引かれるわけである。それが, 路端へ近づくと, 路面横勾配が大きくなるため, 雨水も, ぐつと横へ向く。といつたやうな性質を, 上の流線の方程式が示してゐることである。

流線の切線が x 軸となす角を θ とすれば,

$$\tan\theta=\frac{dz}{dx}=\frac{i}{\alpha}\left(\frac{l}{x}\right)^{1/2}$$

路頂 $x=0,\quad \tan\theta_1=\infty,\quad \theta_1=90^\circ$
路端 $x=l,\quad \tan\theta_2=i/\alpha$
例へば $i=\alpha$ ならば, $\theta_2=45^\circ$
$i=0.5\alpha$ ならば, $\theta_2=26^\circ34'$

この θ_2 は流線が路端線を切る角度である。

3. 流線の長さ

いま, $\xi=\sqrt{x/l}$ とおけば, 次の關係がある。

$$x=l\xi^2,\quad dx=2l\xi d\xi,\quad s=\alpha\xi$$

これを，流線の長さを與へる方程式 (7) 式へ代入すると，

$$L=\int_0^l \frac{(s^2+i^2)^{1/2}dx}{s}=2l\int_0^1(\xi^2+i^2/\alpha^2)^{1/2}d\xi$$

ここで，簡單のため

$$\beta=\frac{i}{\alpha}=\frac{2}{3}\frac{i}{s_0} \quad \cdots\cdots(15)$$

とおけば $L=2l\int_0^1(\xi^2+\beta^2)^{1/2}d\xi$

この積分は，次の 3 種の形で書ける。

$$L=l\left[\sqrt{1+\beta^2}+\beta^2\log_e(1+\sqrt{1+\beta^2})-\beta^2\log_e\beta\right] \quad \cdots\cdots(16)$$

$$L=l\left[\sqrt{1+\beta^2}+\beta^2\log_e\frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\right] \quad \cdots\cdots(16a)$$

$$L=l\left[\sqrt{1+\beta^2}+2.30\beta^2\log_{10}\frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\right] \quad \cdots\cdots(16b)$$

例 1. 縱勾配ない場合 $i=0,\quad \beta=0,$

(16) 式から $L=l[1+0-0]=l$

流線の長さが l になるは，當然なことである。この計算中，第 3 項は，$0\cdot(-\infty)$ の形になるが，次のやうにして，0 である。

$$\frac{f(0)}{F(0)}=\frac{\log\beta}{\beta^{-2}}\Big]_{\beta=0}=\frac{-\infty}{\infty} \qquad \text{不定}$$

$$\frac{f'(0)}{F'(0)}=\frac{\beta^{-1}}{-2\beta^{-3}}=-\frac{\beta^2}{2}\Big]_{\beta=0}=0 \qquad \text{確定値}$$

例 2. $i=0.5\alpha$ の場合。 $\beta=0.5,\quad L=1.48\,l$

例 3. $i=\alpha$ の場合。 $\beta=1,\quad L=2.30\,l$

例 4. $i=2\alpha$ の場合。 $\beta=2,\quad L=4.16\,l$

例 5. $i=s_0$ の場合。 $\beta=2/3.,\quad L=1.73\,l$

4. 流下時間

流下時間の一般式 (5) 式へ，指數曲線横斷形の (12) 式を代入すると，

$$\frac{T}{t}=\frac{s_0^{1/3}}{l}\int_0^l\frac{(s^2+i^2)^{1/6}dx}{s^{2/3}}=\frac{2s_0^{1/3}}{\alpha^2}\int_0^\alpha s^{1/3}(s^2+i^2)^{1/6}ds \quad \cdots\cdots(17)$$

この計算は，被積分函數を二項定理で展開，項別積分するよりほか，いゝ方法がない。展開の條件にもとづく制限から現象を三つの場合に分けて考へるが便である。

5. 縱勾配のない曲線横斷形 ($i=0$)

一般式 (17) 式へ $i=0$ とおいて，計算すれば，縱勾配ない曲線横斷形の値が出る。そのときの流下時間を T_0 としよう。

$$\frac{T_0}{t}=\frac{2s_0^{1/3}}{\alpha^2}\int_0^\alpha s^{2/3}ds=\frac{6}{5}\left(\frac{s_0}{\alpha}\right)^{1/3}$$

$\alpha=1.5\,s_0$ であるから，結局次のやうになる。

$$\frac{T_0}{t}=1.048 \qquad (18)$$

これは，縦勾配のない道で，横勾配 s_0，降水量，路面の性質，道幅などすべて同一とした場合に於て，曲線横断形の流下時間 T_0 と，直線横断形の流下時間 t の比が，約 1.05 であることを示す。曲線横断形の場合の方が，約 5% だけ，長びくといふことになつたのである。

6. 縦勾配が路端傾斜より大きい場合 $(i>\alpha)$

一般式 (17) 式を次のやうに書かう。

$$\frac{T}{t}=\frac{2s_0{}^{1/3}i^{1/3}}{\alpha^2}\int_0^\alpha s^{1/3}\left(1+\frac{s^2}{i^2}\right)^{1/6}ds$$

これを計算すると，

$$\frac{T}{t}=1.310\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{1/3}\left\{1+0.067\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2-0.017\left(\frac{\alpha}{i}\right)^4+0.008\left(\frac{\alpha}{i}\right)^6-0.004\left(\frac{\alpha}{i}\right)^8\right\} \qquad (19)$$

これは，$i<\alpha$ に對して用ひてはならぬ。

例 上式を適用し得る最下限として $i=\alpha$ の場合を計算すると，

$T/t=1.310\times1.054=1.381$

これと (18) 式とから，t を消去すれば，

$T/T_0=1.318$

これは，横勾配 s_0 の曲線横断形に於て，縦勾配 $(i=\alpha)$ あるときと，ないときの流下時間の比である。約 32% 違ふわけである。$i=\alpha$ の場合，(16) 式の例 3 から流下距離は（縦勾配ないときの）2.3 倍になるが，流下時間の方は 1.3 倍ですむといふ計算である。最急勾配が，路面横勾配よりも，急であるためであらう。

7. 縦勾配が路端傾斜より小さい場合 $(i<\alpha)$

路面横勾配 s は，0〜α の範圍に変るから，s が縦勾配 i より小さい所と，i より大きい所とあるわけである。これは，分離して計算しなければ，ならぬことである。で，基本式 (17) 式を次のやうにする。

$$\frac{T}{t}=\frac{2s_0{}^{1/3}}{\alpha^2}\left\{\int_0^i s^{1/3}(s^2+i^2)^{1/6}ds+\int_i^\alpha s^{1/3}(s^2+i^2)^{1/6}ds\right\}=\frac{2s_0{}^{1/3}}{\alpha^2}\left\{i^{1/3}\int_0^i s^{1/3}\left(1+\frac{s^2}{i^2}\right)^{1/6}ds\right.$$
$$\left.+\int_i^\alpha s^{2/3}\left(1+\frac{i^2}{s^2}\right)^{1/6}ds\right\}$$

二項定理で展開，項別積分によつて，

$$\frac{T}{t}=1.269\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{5/3}+1.048\left\{1-0.833\left(\frac{i}{\alpha}\right)^2+0.050\left(\frac{i}{\alpha}\right)^4-0.016\left(\frac{i}{\alpha}\right)^6+0.008\left(\frac{i}{\alpha}\right)^8\right.$$
$$\left.-0.005\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{10}+0.003\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{12}\right\} \qquad (20)$$

この式は，$0<i<\alpha$ に適用。$i=\alpha$ の場合を除き，多くは 3 項くらゐとれば十分。

例 1. $i=\alpha$ の場合。

$T/t=1.269+1.048\times0.107=1.381$

これは，(19) 式と (20) 式が，円滑に接続してゐることを示すものである。

例 2. $i=0$ の場合。 $T/t=1.048$

これは，(18) 式に等しい。即ち (20) 式は，縦勾配ない場合とも，円滑に接続してゐる。計算に誤りはなかつたと考へていゝであらう。

例 3. $i=0.5\alpha$ の場合。

$$T/t=1.269(0.5)^{5/3}+1.048\{1-0.833(0.5)^2+0.050(0.5)^4\}=1.269\times0.315+1.048\times0.795=1.233$$

これと (18) 式から t を消去すれば，$T/T_0=1.177$

これに對する流下距離の比は，(16) 式の例 2 から $L/l=1.48$ 即ち流線の長さは，48% 違ふけれども，流下時間の方は，18% の違ひである。

例 4. $i=0.5\%$，$s_0=2\%$ の場合。

$$\alpha=1.5\,s_0=3\%,\quad i/\alpha=0.5\div3=0.167$$

これから，T/t を出し，それと (18) 式から t を消去すれば

$$T/T_0=1.04$$

即ち縦勾配 0.5% を設けたときと，設けないときの流下時間の違ひは，僅か 4% であるといふ計算になる。

第 5 章　抛物線路面

1. 流下時間の一般式

路面の横断形が，抛物線 $y=h(x/l)^2$ である場合には，

$$s=2\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{x}{l}\right)=\alpha\left(\frac{x}{l}\right),\quad dx=l\,ds/\alpha$$

これを (5) 式へ代入すれば，

$$\frac{T}{t}=\frac{s_0{}^{1/3}}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{(s^2+i^2)^{1/6}}{s^{2/3}}ds \qquad (21)$$

2. 縦勾配のない場合　($i=0$)

(21) 式へ $i=0$ とおいて計算すると，

$$\frac{T_0}{t}=\frac{s_0{}^{1/3}}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{ds}{s^{1/3}}=\frac{3}{2}\left(\frac{s_0}{\alpha}\right)^{1/3}$$

$\alpha=2s_0$ であるから，

$$T_0/t=1.191 \qquad (22)$$

これは，縦勾配なくて，同じ横勾配をもつところの抛物線横断形と直線横断形とに於ける流下時間の比である。指數曲線横断形の場合には，$T_0/t=1.048$ であつた。抛物線横断形の方が，流下時間が，大きいといふ計算である。抛物線では，路面横勾配の小さい部分が，廣い範圍に亙るためであらう。排水時間だけの點についていへば，抛物線よりも，前の指數曲線の方がよいといふことになるであらう。

3. 縦勾配が路端傾斜より大きい場合　($i>\alpha$)

(21) 式を次のやうに變形しよう。

$$\frac{T}{t}=\frac{s_0{}^{1/3}i^{1/3}}{\alpha}\int_0^\alpha s^{-2/3}\left(1+\frac{s^2}{i^2}\right)^{1/6}ds$$

これを計算すると，次のやうになる。

$$\frac{T}{t}=2.381\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{1/3}\left\{1+0.024\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2-0.005\left(\frac{\alpha}{i}\right)^4+0.002\left(\frac{\alpha}{i}\right)^6-0.001\left(\frac{\alpha}{i}\right)^8\right\} \qquad (23)$$

例 $i=\alpha$ の場合。

$$T/t=2.381\times1.020=2.429$$

これと (22) 式から，T/T_0 を求めると，

$T/T_0=2.429\div1.191=2.039$

これは，$i=\alpha$ の抛物線横断形と，縦勾配ない抛物線横断形とに於ける流下時間の比である。前の指數曲線横断形では，これに相當する比が 1.3 であつた。抛物線路面の方が，道の中央部で，路面横勾配が小さく，從て，雨水が縦方向へ流れることも多くなるため，縦勾配あるときの流下時間が，著しく增すのであらう。この點からいふと，抛物線路面は，あまりいゝものと思はれない。

4. 縦勾配が路端傾斜より小さい場合 $(i<\alpha)$

(21) 式を次のやうに変形しよう。

$$\frac{T}{t}=\frac{s_0{}^{1/3}}{\alpha}\left\{i^{1/3}\int_0^i s^{-2/3}\left(1+\frac{s^2}{i^2}\right)^{1/6}ds+\int_i^\alpha s^{-1/3}\left(1+\frac{i^2}{s^2}\right)^{1/3}ds\right\}$$

これを，計算，整理すると，

$$\frac{T}{t}=1.324\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{2/3}+1.191\left\{1-0.083\left(\frac{i}{\alpha}\right)^2+0.014\left(\frac{i}{\alpha}\right)^4-0.005\left(\frac{i}{\alpha}\right)^6+0.003\left(\frac{i}{\alpha}\right)^8\right.$$
$$\left.-0.002\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{10}+0.001\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{12}\right\}\cdots\cdots(24)$$

例 1. $i=\alpha$ の場合。

$T/t=1.324+1.191\times0.928=1.324+1.105=2.429$

これは (23) 式の例題と一致する。從て，(24) 式は (23) 式と，円滑に接続してゐると考へられる。

例 2. $i=0$ の場合。$T/t=1.191$

これは，(22) 式と一致する。$0<i<\alpha$ に對して導いた (24) 式が，少くともその兩端に於て，誤りないことがわかつた。

例 3. $i=0.5\alpha$ の場合。

$$T/t=1.324(0.5)^{2/3}+1.191\{1-0.083(0.5)^2+0.014(0.5)^4\}=1.324\times0.630$$
$$+1.191\{1-0.021+0.001\}=2.001$$

これと (22) 式から t を消去すれば，

$T/T_0=1.680$

これに相當する指數曲線の場合には，$T/T_0=1.177$ であつた。抛物線路面の流下時間は，こゝでも指數曲線より大きいのである。

例 4. $i=0.5\%$, $s_0=2.5\%$ の場合。

$\alpha=2\times2.5=5\%$, $i/\alpha=0.5\div5=0.1$

これから $T/t=1.475$, $T/T_0=1.24$ 即ち縦勾配ないときよりも，24% だけ長びく。

例 5. $i=0.5\%$, $s_0=2\%$ の場合。

$i/\alpha=0.125$, $T/t=1.521$, $T/T_0=1.28$

これで見ると，0.5% の縦勾配あるときと，ないときの流下時間の違ひは，せいぜい 30% であることがわかる。

5. 雨 水 流 線

抛物線横断形に於ける路面横勾配は，

$$s=\frac{dy}{dx}=2s_0x/l$$

雨水流線上，任意點の切線が，x 軸となす角を θ とすれば，

$$\tan\theta=\frac{dz}{dx}=\frac{i}{2s_0}\frac{l}{x}$$

路頂　　$x=0,\quad \tan\theta_1=\infty,\quad \theta_1=90°$

路端　　$x=l,\quad \tan\theta_2=i/2s_0$

もし　　$i=s_0$　ならば，　$\theta_2=26°34'$

このやうに，流線が路端線を切る角度は，いつでも計算することができる。また，流下時間は，既に記したやうに，いつも，有限な値として，求められたのである，従て流線自体も，有限な長さをもつ曲線であることが，考へられる。にも拘らず，流線の方程式が，この場合求められないのである。いま，横断形の方程式を，一般に

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^n$$

としよう。路面横勾配は，

$$s=\frac{dy}{dx}=n\frac{h}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}=ns_0(x/l)^{n-1}$$

従て，流線の方程式は，

$$z=\frac{il^{n-1}}{ns_0}\int_0^x\frac{dx}{x^{n-1}}=\frac{il}{ns_0(2-n)}\left(\frac{l}{x}\right)^{n-2}$$

但しこれは $n\neq2$ としてである。$n=2$ の場合には，上式から見ても $z=\infty$ になる。正しくは

$$z=\frac{il}{2s_0}\int_0^x\frac{dx}{x}=\frac{il}{2s_0}=(\log x-\log 0)$$

いづれにせよ，有限な流線が，数式では求められない。

6. 解式無限大に就て

流下時間と，流線の傾きが既に求められてゐるのに，流線自体が有限にならぬといふことは，現象の性質とは考へられないことである。抛物線の式の指数 2 が，流線の微分方程式に對し，数学的に特異點を形成してゐるためであらうと思はれる。指数が 2 より僅か小さければ，積分は可能なのである。

流線の式がでない理由を，更に深く考へれば，これは，鉛直方向の要素を無視した微分方程式に立脚してゐるためであるかも知れない。或は他の理由かも知れない。

抛物線横断形に對する工藤君の解式では，路頂から路端までの流下時間が ∞ になつた。同君は，路頂から僅か離れた點を選び，そこから路端までの積分を行はれた。同君の解式が，路頂からの流下時間を無限大ならしめた理由は，同君の導かれた流下時間基本式が，指数 $n=2$ に對し，特異點をもつてゐたといふ数学的故障によるであらう。なぜさうなつたかの理由を，更に追求すれば，それは，流速公式を，$v=ch\sqrt{J}$ の形に選ばれたことに，原因があつた。

以上は，解式が無限大になることの外形的根據である。これを，内面的に考察すれば，現象を正確に数式中へ組込んでゐないことに，根本的な理由があると見るべきであらう。筆者の解で流線の出ないのも，現象と数式の間に何か隙があつたゝめであらう。決して，現象の性質として，∞ になるのではない。

工藤君の流下時間が ∞ になることについて，坂田時和氏は，次のやうに書いてゐた。「路頂部は，路面傾斜がないから，そこの水は，数学的には動けない。路頂から路端までの流下時間が無限大になるのは，そのためだ」と。この考へは，誤りであらう。それは，次の事實を説明できないからである。

1．筆者の解によれば，路頂から路端までの流下時間がいつも有限になつた。即ち路頂部の水は，数学的に確かに流れてゐるのである。

2. 路頂部へ雨水が無限の深さに停滞するといふことは，事實に於てあり得ないことである。或る深さに達すれば，必ず左右へ崩れる。縱勾配のあるなしに拘らず，流れを生ずることである。路頂に傾斜がないからといつて水面勾配が 0 に保たれるわけではないのである。

路面勾配と水面勾配とが，相違し得るものである以上，路頂部の水は，必ず流下するものである（勿論，穴や轍はないときのことである）。拋物線橫断形の流下時間や流線が ∞ になるのは，それは，求め方に不備があるためである。現象自体の性質として，さうなるものではない。

第 6 章　要　　結

1. 路頂部へ降つた雨水だけを考へ，それが路端へ達するまでの流下時間を，すべて有限な値として，數理的に求めることができた。縱勾配あれば，ないときよりも，流下時間が長くなる。その長くなり方は，直線橫断形よりも，指數曲線橫断形 ($n=1.5$) に於て著しく，更に拋物線橫断形では一層著しい。從つて，路頂部の降水を，路端へ早く流すといふことだけからいへば，直線橫断形が一番よく，拋物線橫断形は一等悪いといふことになる。指數曲線橫断形は，その中庸である。但し實用上の選擇は，交通の便否を考へねばならぬことである。

2. 雨水流線は，直線橫断形では直線，指數曲線橫断形では拋物線といふ結果になつた。拋物線橫断形の場合には，どういふわけか，筆者の解式では，流線の式が得られなかつた。

3. 最小縱勾配不要論の根據には，なりかねること。縱勾配があれば，流下時間は必ず長びく。これを根據として次のやうな主張があり得ることである。「雨水が路上に長く停留することは，不都合だから，縱勾配はないがいい。殊に，水平な土地へ坂路をつけるやうなとは，避けねばならぬ。即ち最小縱勾配は不要だ」と。

さて，水平な土地へ，0.5% 程度の縱勾配を附けたとして，そのために生ずる流下時間の伸びは，せいぜい 30 %である。縱勾配ないときに比べて，流下時間が 1.3 倍になるといふのが，最も悪い場合である。路頂の雨水が，例へば 3 分間で流下するか，4 分間かかるかといふ程度の違ひである。

一方，路へ雨が降るとき，その時間は，少くも 10 分，多ければ 1 時間，2 時間，それ以上のこともある。この降雨繼続時間中，路面はたえず濡れてゐるわけである。1 個の水滴が，數分間早く路外へ出てみても，その後，更に長い間，路面に水流がつゞくことである。從て，縱勾配あるなしによる流下時間の違ひは，降雨繼續時間に比べて，いはば無限小に近いことが多い。無視されてもいゝ程度の量でしかあり得ないのである。この故に，流下時間の理論から，最小縱勾配の不要を主張することは，實は，理由が甚だ弱いのである。

筆者は，以前から，最小縱勾配不要論者であるが，この主な理由は，工費の無駄と，交通の安易を害する點と，そして僅かな縱勾配では附けないのと餘り違はぬ，といふ 3 點にある。