彙　　報

第22巻第8號　昭和11年8月

片持梁の曲げモーメントの簡易算定法

准員　增　田　三　次*

1. 公式誘導

圖-1 に示せる樣に，片持梁に作用する荷重が，各格點間に於ては，直線的に變化せるものと假定して以下本文を進めて行く。**圖-1** より分る如く，梁を十等分し，梁方向を x 軸，之に直角方向を y 軸とし，各縱距を $y_0, y_1, \cdots\cdots y_{10}$, とし，各縱距の間隔を h とする。

圖-1.

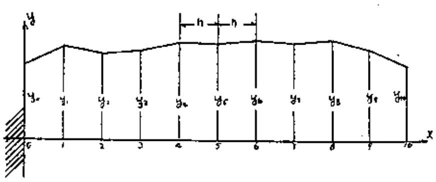
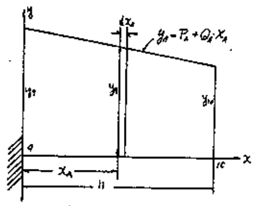


圖-2.



扨て，格點 9 に對する曲げモーメントを求む。今之を M_9 で表す (**圖-2** 參照)。荷重が y_9 より y_{10} に變化する時は，前にも述べた樣に，直線的に變化するものなる故，此の直線を $y_A=P_A+Q_A\cdot x_A$ で表す。

$$x_A=0 \text{ の時 } y_A=y_9 \qquad \therefore\ y_9=P_A \cdots\cdots(1)$$

$$x_A=h \text{ の時 } y_A=y_{10} \qquad \therefore\ y_{10}=P_A+Q_A\cdot h \cdots\cdots(2)$$

$$(1) \text{ と } (2) \text{ より} \qquad Q_A=(y_{10}-y_9)\frac{1}{h} \cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\ y_A=y_9+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)\cdot x_A \cdots\cdots(4)$$

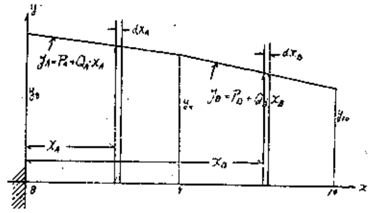
故に
$$M_9=\int_0^h x_A\cdot y_A dx_A=\int_0^h\left\{y_9\cdot x_A+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)x_A^2\right\}dx_A$$

$$=y_9\cdot\left[\frac{x_A^2}{2}\right]_0^h+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)\left[\frac{1}{3}x_A^3\right]_0^h$$

$$=\frac{1}{6}h^2[y_9+2y_{10}] \cdots\cdots(a)$$

圖-3 を參照して格點 8 の曲げモーメントを求む。今格點 8 より格點 9 までは $y_A=P_A+Q_A\cdot x_A$ の變化をなし，格點 9 より格點 10 までは，$y_B=P_B+Q_B\cdot x_B$ の變化をなすものとすれば，

圖-3.



$$y_A=y_8+\frac{1}{h}(y_9-y_8)x_A$$

$$y_B=(2y_9-y_{10})+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)x_B$$

---

* 川崎造船所經理部營繕課勤務

となる。

$$\therefore\quad M_8=\int_0^h y_A\cdot x_A\cdot dx_A+\int_h^{2h} y_B\cdot x_B\cdot dx_B$$

$$=\int_0^h\left\{y_8\cdot x_A+\frac{1}{h}(y_9-y_8)x_A^2\right\}dx_A+\int_h^{2h}\left\{(2y_9-y_{10})x_B+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)x_B^2\right\}dx_B$$

$$=y_8\left[\frac{1}{2}x_A^2\right]_0^h+\frac{1}{h}(y_9-y_8)\left[\frac{1}{3}x_A^3\right]_0^h+(2y_9-y_{10})\left[\frac{1}{2}x_B^2\right]_h^{2h}+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)\left[\frac{1}{3}x_B^3\right]_h^{2h}$$

$$=h^2\left(\frac{1}{6}y_8+y_9+\frac{5}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

図-4 を參照の上，格點 7 の曲げモーメントを求む。

$$y_A=y_7+\frac{1}{h}(y_8-y_7)x_A,\qquad y_B=(2y_8-y_9)+\frac{1}{h}(y_9-y_8)x_B,\qquad y_C=(3y_9-2y_{10})+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)x_C$$

$$\therefore\quad M_7=\int_0^h y_A\cdot x_A\cdot dx_A+\int_h^{2h} y_B\cdot x_B\cdot dx_B+\int_{2h}^{3h} y_C\cdot x_C\cdot dx_C$$

$$=\int_0^h\left\{y_7\cdot x_A+\frac{1}{h}(y_8-y_7)x_A^2\right\}dx_A+\int_h^{2h}\left\{(2y_8-y_9)x_B+\frac{1}{h}(y_9-y_8)x_B^2\right\}dx_B$$

$$+\int_{2h}^{3h}\left\{(3y_9-2y_{10})x_C+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)x_C^2\right\}dx_C$$

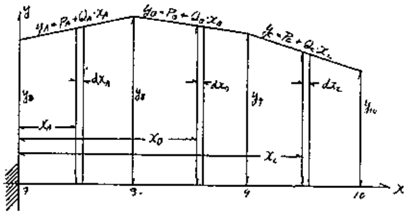
$$=y_7\left[\frac{1}{2}x_A^2\right]_0^h+\frac{1}{h}(y_8-y_7)\left[\frac{1}{3}x_A^3\right]_0^h+(2y_8-y_9)\left[\frac{1}{2}x_B^2\right]_h^{2h}+\frac{1}{h}(y_9-y_8)\left[\frac{1}{3}x_B^3\right]_h^{2h}$$

$$+(3y_9-2y_{10})\left[\frac{1}{2}x_C^2\right]_{2h}^{3h}+\frac{1}{h}(y_{10}-y_9)\left[\frac{1}{3}x_C^3\right]_{2h}^{3h}$$

$$=h^2\left(\frac{1}{6}y_7+y_8+2y_9+\frac{8}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

以下同様の操作に依り，格點 6, 5, ‥‥, 2, 1, 0 の曲げモーメントは求め得られる故に図面は省略し，結果のみを示す。格點 6, 5, ‥‥, 2,1, 0 の曲げモーメントを $M_6, M_5, \cdots, M_2, M_1, M_0$ とすれば之等は次の如く表はす事を得。

図-4.



即ち

$$M_6=h^2\left(\frac{1}{6}y_6+y_7+2y_8+3y_9+\frac{11}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(d)$$

$$M_5=h^2\left(\frac{1}{6}y_5+y_6+2y_7+3y_8+4y_9+\frac{14}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(e)$$

$$M_4=h^2\left(\frac{1}{6}y_4+y_5+2y_6+3y_7+4y_8+5y_9+\frac{17}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(f)$$

$$M_3=h^2\left(\frac{1}{6}y_3+y_4+2y_5+3y_6+4y_7+5y_8+6y_9+\frac{20}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(g)$$

$$M_2=h^2\left(\frac{1}{6}y_2+y_3+2y_4+3y_5+4y_6+5y_7+6y_8+7y_9+\frac{23}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(h)$$

$$M_1=h^2\left(\frac{1}{6}y_1+y_2+2y_3+3y_4+4y_5+5y_6+6y_7+7y_8+8y_9+\frac{26}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(i)$$

$$M_0=h^2\left(\frac{1}{6}y_0+y_1+2y_2+3y_3+4y_4+5y_5+6y_6+7y_7+8y_8+9y_9+\frac{29}{6}y_{10}\right)\cdots\cdots(j)$$

(j)−(i) より　$$\varDelta M_0=M_0-M_1=h^2\left[\frac{1}{6}(y_0-y_1)+\sum_{r=1}^{9}y_r+\frac{3}{6}y_{10}\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

(i)−(h) より　$$\varDelta M_1=M_1-M_2=h^2\left[\frac{1}{6}(y_1-y_2)+\sum_{r=2}^{9}y_r+\frac{3}{6}y_{10}\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

(h)−(g) より　$$\varDelta M_2=M_2-M_3=h^2\left[\frac{1}{6}(y_2-y_3)+\sum_{r=3}^{9}y_r+\frac{3}{6}y_{10}\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{C})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(b)−(a) より　$$\varDelta M_8=M_8-M_9=h^2\left[\frac{1}{6}(y_8-y_9)+\sum_{r=9}^{9}y_r+\frac{3}{6}y_{10}\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$\varDelta M_9=M_9=h^2\left[\frac{1}{6}(y_9-y_{10})+\frac{3}{6}y_{10}\right]=h^2\left[\frac{1}{6}y_9+\frac{1}{3}y_{10}\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{J})$$

(A)−(B) より　$$\varDelta M_0'=\varDelta M_0-\varDelta M_1=h^2\left[\frac{1}{6}(y_0-2y_1+y_2)+y_1\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{A})'$$

(B)−(C) より　$$\varDelta M_1'=\varDelta M_1-\varDelta M_2=h^2\left[\frac{1}{6}(y_1-2y_2+y_3)+y_2\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{B})'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(I)−(J) より　$$\varDelta M_8'=\varDelta M_8-\varDelta M_9=h^2\left[\frac{1}{6}(y_8-2y_9+y_{10})+y_9\right]\quad\cdots\cdots(\mathrm{I})'$$

上記の各式を整頓すれば次の如くなる。即ち

$$M_9=\varDelta M_9=h^2\left[\frac{1}{6}y_9+\frac{1}{3}y_{10}\right]$$

$$M_8=M_9+\varDelta M_8,\quad \varDelta M_8=\varDelta M_9+\varDelta M_8'$$

$$\cdots\cdots\cdots,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_0=M_1+\varDelta M_0,\quad \varDelta M_0=\varDelta M_1+\varDelta M_0'$$

故に之等より **表-1** の如き公式が生ず。

表-1. M's Formula

y_r	$(y_{r+1}-2y_r+y_{r-1})=\varDelta_r$	$\frac{1}{6}\varDelta_r$	$\frac{1}{6}\varDelta_r+y_r=\varDelta_r'$	$m_r=\varDelta_{r+1}'+2m_{r+1}-m_{r+2}$	$m_r\times h^2$	M_r
y_{10}				m_9	m_9h^2	M_9
y_9	$y_{10}-2y_9+y_8$	$\frac{1}{6}\varDelta_9$	$\frac{1}{6}\varDelta_9+y_9=\varDelta_9'$	$m_8=\varDelta_9'+2m_9$	m_8h^2	M_8
y_8	$y_9-2y_8+y_7$	$\frac{1}{6}\varDelta_8$	$\frac{1}{6}\varDelta_8+y_8=\varDelta_8'$	$m_7=\varDelta_8'+2m_8-m_9$	m_7h^2	M_7
y_7	$y_8-2y_7+y_6$	$\frac{1}{6}\varDelta_7$	$\frac{1}{6}\varDelta_7+y_7$	$m_6=\varDelta_7'+2m_7-m_8$	m_6h^2	M_6
y_6	$y_7-2y_6+y_5$	$\frac{1}{6}\varDelta_6$	$\frac{1}{6}\varDelta_6+y_6$	$m_5=\varDelta_6'+2m_6-m_7$	m_5h^2	M_5
y_5	$y_6-2y_5+y_4$	$\frac{1}{6}\varDelta_5$	$\frac{1}{6}\varDelta_5+y_5$	$m_4=\varDelta_5'+2m_5-m_6$	m_4h^2	M_4
y_4	$y_5-2y_4+y_3$	$\frac{1}{6}\varDelta_4$	$\frac{1}{6}\varDelta_4+y_4$	$m_3=\varDelta_4'+2m_4-m_5$	m_3h^2	M_3
y_3	$y_4-2y_3+y_2$	$\frac{1}{6}\varDelta_3$	$\frac{1}{6}\varDelta_3+y_3$	$m_2=\varDelta_3'+2m_3-m_4$	m_2h^2	M_2
y_2	$y_3-2y_2+y_1$	$\frac{1}{6}\varDelta_2$	$\frac{1}{6}\varDelta_2+y_2$	$m_1=\varDelta_2'+2m_2-m_3$	m_1h^2	M_1
y_1	$y_2-2y_1+y_0$	$\frac{1}{6}\varDelta_1$	$\frac{1}{6}\varDelta_1+y_1$	$m_0=\varDelta_1'+2m_1-m_2$	m_0h^2	M_0
y_0						

$m_9=\frac{1}{6}(y_9+2y_{10})$;　$m_{10}=0$

2. 例　題

今荷重曲線として，**図-5** に示す通り $y=0.2x^2-0.3x+10$ で荷重曲線が與へられたものとする。此の場合各格點の縦距 $y_0, y_1, \cdots, y_9, y_{10}$ は**図-5** に記入せる値を取る。各縦距間隔を單位長の 1 にとる。即ち前記の $h=1$ なる場合である。此の場合の各格點に對する曲げモーメント $M_0, M_1, \cdots, M_9$, を先づ第一に**表-1** に依り求むれば**表-2** に示せる値を取る。

次ぎにこれ等各曲げモーメントを積分により求む。

$$M_0=\int_0^{10}yx\cdot dx=\int_0^{10}(0.2x^3-0.3x^2+10x)dx=0.2\frac{1}{4}\Big[x^4\Big]_0^{10}-0.3\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_0^{10}+10\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_0^{10}$$

$$=500-100+500=900$$

以下同様にして $M_1\cdots M_9$ を求め之等の値を總括して**表-3** を得る。

3. 結　語

前記の例題より明かなる如く，本公式は精密度の上より論ずれば，價値少き公式ではあるけれども，手數簡單にして而も大略正値に近い値を得らるゝ點から興味ある問題と考へ，此處に發表した次第である。勿論上記の例題に

図-5.

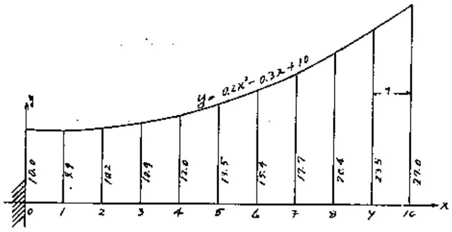


表-2.

y_{10}	27.0				12.917	M_9
y_9	23.5	0.4	0.067	23.567	49.401	M_8
y_8	20.4	〃	〃	20.467	106.352	M_7
y_7	17.7	〃	〃	17.767	181.370	M_6
y_6	15.4	〃	〃	15.467	271.855	M_5
y_5	13.5	〃	〃	13.567	375.907	M_4
y_4	12.0	〃	〃	12.067	492.026	M_3
y_3	10.9	〃	〃	10.967	619.112	M_2
y_2	10.2	0.4	0.067	10.267	756.465	M_1
y_1	9.9	0.4	0.067	9.967	903.785	M_0
y_0	10.0					

$M_9=\frac{1}{6}(23.5+2\times27.0)=12.917$

$h=1$

於ては，荷重曲線が積分可能なる場合であるから正確値が算出せられたが，若し同曲線が積分不可能の場合には，正確値が算出せられない故に誤差の大小を云々する事は不可能である。故にかゝる場合は問題外とする。而し乍ら此處に一言し得る事は，荷重曲線が積分可，不可の如何を問はず，曲線が下に凸の場合には，本公式に依りて得られる曲げモーメントの値は，眞の値よりも大となり，之れに反して，上に凸の場合には小となる事は，最初に荷重曲線が直線的變化をなすと云ふ假定より明かなるは論を俟たず。故に，與へられたる荷重曲線が下に凸と推定される時に，本公式に依り求められたる値を利用して梁の断面を決定すれば不經濟断面になるが安全なる断面と爲し得る。要するに本公式は，手數が簡にて眞値に近い値が得られる所から，實用向きの公式ではないかと考へる。

表-3.

	I. M's Formula	II Integration	Diff.	$100\times\frac{I-II}{II}$
M_9	12.917	12.900	0.017	0.13
M_8	49.401	49.333	0.068	0.14
M_7	106.352	106.200	0.152	0.14
M_6	181.370	180.800	0.570	0.32
M_5	271.855	270.833	1.022	0.38
M_4	375.907	374.400	1.507	0.40
M_3	492.026	490.000	2.026	0.41
M_2	619.112	616.533	2.579	0.42
M_1	756.465	753.300	3.165	0.42
M_0	903.785	900.000	3.785	0.42
			Average	0.36

最後に今一つの本公式の利用の道は，固定拱を解くに當り，一般に Müller-Breslau の方法が能率的と考へられるが，此の場合，$M_0=\left[\int_x^{\frac{l}{2}}\frac{I_0}{I}\sec\varphi(x'-x)\,dx\Big/\int_0^l\frac{I_0}{I}\sec\varphi\,dx\right]\cdot P$ 即ち垂直荷重 P による彈性原點 O の曲げモーメントを求める際，此の分子を本公式に依り求めれば，大いなる時間と勞力の省略を期待し得らる事と信ずる。

4. 附　錄

此處では，吟味の意味にて，曲線（荷重の）が $y=a+bx+cx^2$ で與へられたる場合には，各格點の曲げモーメントは表-4 に示す値を取る。同表に記載して居るが，各格點に對する M's-Formula に依る値を (I) とし，積分に依る値を (II) とせる時，(I)−(II)/II を $\overline{M}_n$ にて表すとすれば，これが値は次の式にて表はす事を得。

即ち　　$\overline{M}_n=[n^2+(2b'+20)n+(6a'+40b'+300)]^{-1}$

茲に　n：格點の番號，但し梁の長さを十等分し $0,1,2,\cdots,9$, までの數を代表す。

$a'=a/c,\qquad b'=b/c,\qquad$ 又　$h=1$　なり。

$\overline{M}_n$ が最大値を取る可き條件と $0\geqq n\geqq 9$ なる關係より $\overline{M}_n$ を図表に表せば図-6 の通りとなる。

図-6. の用ひ方例

b' の數値の $-10,-11,\cdots,-19$ は n の $0,1,2\cdots,9$ に對応す。故に今 $a'=100$ なる時

$b'=-12\cdots\cdots$ 格點 2 の $\overline{M}_2$ の最大値は $400^{-1}>\overline{M}_2>600^{-1}$ なる事を示す。

$b'=-18\cdots\cdots$ 格點 8 の $\overline{M}_8$ の最大値は $50^{-1}>\overline{M}_8>200^{-1}$ なる事を示す。

図-6.

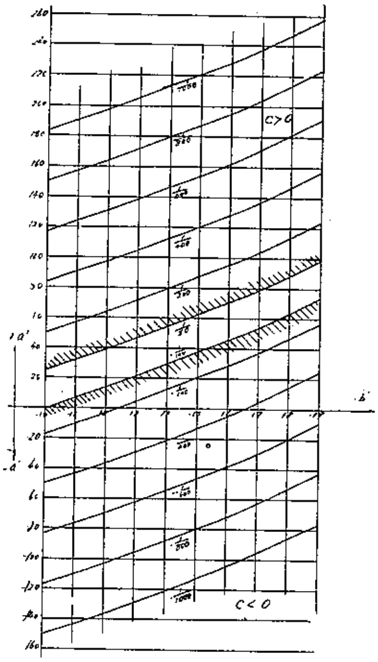


表-4.

	II Integration	I M's formula	I−II
M_9	$\frac{1}{2}ah^2+\frac{29}{6}bh^3+\frac{187}{4}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{281}{6}ch^4$	$\frac{1}{12}ch^4$
M_8	$2ah^2+\frac{56}{3}bh^3+\frac{524}{3}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{525}{3}ch^4$	$\frac{1}{3}ch^4$
M_7	$\frac{9}{2}ah^2+\frac{81}{2}bh^3+\frac{1467}{4}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{735}{2}ch^4$	$\frac{3}{4}ch^4$
M_6	$8ah^2+\frac{208}{3}bh^3+608ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{1828}{3}ch^4$	$\frac{4}{3}ch^4$
M_5	$\frac{25}{2}ah^2+\frac{625}{6}bh^3+\frac{10625}{12}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{5325}{6}ch^4$	$\frac{25}{12}ch^4$
M_4	$18ah^2+144bh^3+1188ch^4$	〃 + 〃 + $1191ch^4$	$3ch^4$
M_3	$\frac{49}{2}ah^2+\frac{1129}{6}bh^3+\frac{6029}{4}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{9065}{6}ch^4$	$\frac{49}{12}$ 〃
M_2	$32ah^2+\frac{704}{3}bh^3+\frac{5504}{3}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{5520}{3}ch^4$	$\frac{16}{3}ch^4$
M_1	$\frac{81}{2}ah^2+\frac{567}{2}bh^3+\frac{8667}{4}ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{4347}{2}ch^4$	$\frac{27}{4}ch^4$
M_0	$50ah^2+\frac{1000}{3}bh^3+2500ch^4$	〃 + 〃 + $\frac{7525}{3}ch^4$	$\frac{25}{3}ch^4$
	I−II/II		
$\bar{M}_9$	$ch^2/(6a+58bh+561ch^2)$	$(6a'+58b'+561)^{-1}$	
$\bar{M}_8$	$ch^2/(6a+56bh+524ch^2)$	$(6a'+56b'+524)^{-1}$	
$\bar{M}_7$	$ch^2/(6a+54bh+489ch^2)$	$(6a'+54b'+489)^{-1}$	
$\bar{M}_6$	$ch^2/(6a+52bh+456ch^2)$	$(6a'+52b'+456)^{-1}$	
$\bar{M}_5$	$ch^2/(6a+50bh+425ch^2)$	$(6a'+50b'+425)^{-1}$	
$\bar{M}_4$	$ch^2/(6a+48bh+396ch^2)$	$(6a'+48b'+396)^{-1}$	
$\bar{M}_3$	$ch^2/(6a+46bh+369ch^2)$	$(6a'+46b'+369)^{-1}$	
$\bar{M}_2$	$ch^2/(6a+44bh+344ch^2)$	$(6a'+44b'+344)^{-1}$	
$\bar{M}_1$	$ch^2/(6a+42bh+321ch^2)$	$(6a'+42b'+321)^{-1}$	
$\bar{M}_0$	$ch^2/(6a+40bh+300ch^2)$	$(6a'+40b'+300)^{-1}$	

次ぎに同じく荷重曲線が $y=a+bx+cx^2+dx^3$ なる x に關して三次式で表はされる場合には，表-5 を利用して $\bar{M}_n$ を式にて表はせば次の通りとなる。

$$\bar{M}_n=[5ch^2+(998-50n-5n^2)dh^3/(10-n)]\ [30a+(200+10n)bh+(1\,500+100n+5n^2)ch^2+\{111n(n+1)/2+3n(n+1)(2n+1)/2\}\,dh^3]$$

今 $h=1$ と假定せば

$$\bar{M}_n=[(100c'+1\,996)-(10c'+100)n-10n^2]/[(600a'+4\,000b'+30\,000c'+240\,000)-(60a'+200b'+1\,000c'+6\,000)n-(20b'+100c'+600)n^2-(10c'+60)n^3-6n^4]$$

茲に $\bar{M}_n$: 前と同意味のものを表す

n: 前と同様 0, 1, ‥, 9 までの數を代表

$a'=a/d,\quad b'=b/d\quad c'=c/d$

表-5.

	II Integration	I M's Formula	I−II
M_9	$\frac{1}{2}ah^2+\frac{29}{6}bh^3+\frac{187}{4}ch^4+\frac{9049}{20}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{281}{6}ch^4+\frac{2929}{6}dh^5$	$\frac{1}{12}ch^4+\frac{143}{60}dh^5$
M_8	$2ah^2+\frac{56}{3}bh^3+\frac{524}{3}ch^4+\frac{8192}{5}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{525}{3}ch^4+\frac{4962}{3}dh^5$	$\frac{1}{3}ch^4+\frac{139}{15}dh^5$
M_7	$\frac{9}{2}ah^2+\frac{81}{2}bh^3+\frac{1467}{4}ch^4+\frac{66807}{20}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{735}{2}ch^4+\frac{6721}{2}dh^5$	$\frac{3}{4}ch^4+\frac{403}{20}dh^5$
M_6	$8ah^2+\frac{208}{3}bh^3+608ch^4+\frac{26944}{5}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{1828}{3}ch^4+\frac{16270}{3}dh^5$	$\frac{4}{3}ch^4+\frac{518}{15}dh^5$
M_5	$\frac{25}{2}ah^2+\frac{625}{6}bh^3+\frac{10625}{12}ch^4+\frac{30625}{4}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{1775}{2}ch^4+\frac{46249}{6}dh^5$	$\frac{25}{12}ch^4+\frac{623}{12}dh^5$
M_4	$18ah^2+144bh^3+1188ch^4+\frac{50256}{5}dh^5$	〃 + 〃 + $1191ch^4+10123dh^5$	$3ch^4+\frac{359}{5}dh^5$
M_3	$\frac{49}{2}ah^2+\frac{1129}{6}bh^3+\frac{6029}{4}ch^4+\frac{250243}{20}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{9065}{6}ch^4+\frac{75635}{6}dh^5$	$\frac{49}{12}ch^4+\frac{5621}{60}dh^5$
M_2	$32ah^2+\frac{704}{3}bh^3+\frac{5504}{3}ch^4+\frac{75008}{5}dh^5$	〃 + 〃 + $1840ch^4+\frac{45356}{3}dh^5$	$\frac{16}{3}ch^4+\frac{1956}{15}dh^5$
M_1	$\frac{81}{2}ah^2+\frac{567}{2}bh^3+\frac{8667}{4}ch^4+\frac{350001}{20}dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{4347}{2}ch^4+\frac{35283}{2}dh^5$	$\frac{27}{4}ch^4+\frac{2829}{20}dh^5$
M_0	$50ah^2+\frac{1000}{3}bh^3+2500ch^4+20000dh^5$	〃 + 〃 + $\frac{7525}{3}ch^4+\frac{60499}{3}dh^5$	$\frac{25}{3}ch^4+\frac{499}{3}dh^5$
	I−II/II		
$\bar{M}_9$	$(5ch^4+\frac{143}{1}dh^5)/(30ah^2+290bh^3+2805ch^4+27147dh^5)$		
$\bar{M}_8$	$(5ch^4+\frac{278}{2}dh^5)/(30ah^2+280bh^3+2620ch^4+24576dh^5)$		
$\bar{M}_7$	$(5ch^4+\frac{403}{3}dh^5)/(30ah^2+270bh^3+2445ch^4+22269dh^5)$		
$\bar{M}_6$	$(5ch^4+\frac{518}{4}dh^5)/(30ah^2+260bh^3+2280ch^4+20208dh^5)$		
$\bar{M}_5$	$(5ch^4+\frac{623}{5}dh^5)/(30ah^2+250bh^3+2125ch^4+18375dh^5)$		
$\bar{M}_4$	$(5ch^4+\frac{718}{6}dh^5)/(30ah^2+240bh^3+1980ch^4+16752dh^5)$		
$\bar{M}_3$	$(5ch^4+\frac{803}{7}dh^5)/(30ah^2+230bh^3+1845ch^4+15321dh^5)$		
$\bar{M}_2$	$(5ch^4+\frac{878}{8}dh^5)/(30ah^2+220bh^3+1720ch^4+14064dh^5)$		
$\bar{M}_1$	$(5ch^4+\frac{943}{9}dh^5)/(30ah^2+210bh^3+1605ch^4+12963dh^5)$		
$\bar{M}_0$	$(5ch^4+\frac{998}{10}dh^5)/(30ah^2+200bh^3+1500ch^4+12000dh^5)$		