

# 論 說 報 告

第 21 卷 第 5 號 昭 和 10 年 5 月

## 端部に於て變斷面を有する長柱の安定問題

會 員 工 學 士 樋 浦 大 三\*

On the Stability of Long Columns with Variable  
Sections at both Ends

By Daizō Hiura, C. E., Member.

### 内 容 梗 概

本論は端部に於て變斷面を有する長柱の安定問題を取扱つたもので、截頭對稱 6 邊形柱、對稱 6 邊形柱其の他數種の尖頭柱の限界荷重を與へる條件式を求め、種々の場合に於ける限界荷重を算出せるものである。

### 目 次

目 次	頁
1. 緒 論 .....	1
2. 柱の形状 .....	3
3. 彈性曲線 .....	3
4. 限界荷重を決定すべき條件式 .....	4
5. 截頭對稱 6 邊形柱の限界荷重 .....	6
6. 尖頭柱の限界荷重 .....	7

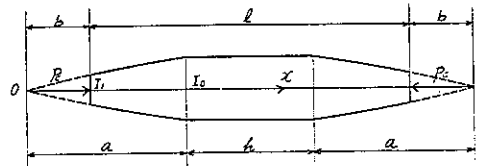
### 1. 緒 論

斷面一様ならざる長柱の限界荷重の算出にあつて之を靜力學上の問題として取扱つた文獻は極めて多い。我が國に於ても故愛知敬一氏<sup>1)</sup>、小野鑑正氏<sup>2)</sup>、田中豊氏<sup>3)</sup>等の諸博士に依り夫々有益なる論文が公表せられてゐる。而して之等の諸論文は何れも斷面が一定の單純なる法則に従つて連續的に變化する場合か又は柱の形状が柱の中點に對し左右對稱にして左右各部の斷面が夫々連續的に變化する場合に限られてゐる。

然し我々は實際問題として柱の中央部は一定の斷面を有し端部に於て斷面が變化するが如き長柱をしばしば見受けるものである。本文は此の種の長柱の安定問題を取扱はんとするものである。

端部に於て變斷面を有する長柱に關する文獻は餘り見られないものであるが Timoshenko 氏の著書<sup>4)</sup>に此の問題に關す

第 1 圖



\* 北海道廳技師，北海道廳土木部道路課勤務

1) 愛知敬一，“Section が一様ならぬ Long strut が支へ得る Load を與ふる公式” 機械學會誌第 22 卷第 56 號，1919.

2) 小野鑑正，“On the Stability of Long Struts of Variable Section” Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University, Vol. I, No. 5, 1919.

3) 田中 豊，“On Strength of Columns with Variable Cross Sections” 土木學會誌第 15 卷第 3 號，昭和 4 年 3 月

4) Timoshenko, Strength of Materials, Part II, p. 590-591.

る一節があるから引用することとする。即ち第 1 圖に於て柱の長さを  $l$ 、斷面一定せる中央部の長さを  $h$ 、其の慣性率を  $I_0$ 、柱端に於ける慣性率を  $I_1$  とし變斷面を有する端部の慣性率  $I$  は次の式により表されるものとする。

$$I = I_0 \left( \frac{x}{a} \right)^m \text{ 従つて } x=b \text{ とすれば}$$

$$I_1 = I_0 \left( \frac{b}{a} \right)^m$$

となる。今柱の兩端を鉸とし、其の彈性率を  $E$ 、限界荷重を  $P_0$  とせば

$$P_0 = k \frac{EI_0}{l^2}$$

上式に於て  $k$  は係數にして  $m$  及び  $I_1/I_0$  の諸々の値に對し  $h/l$  を變化せしむる時は第 1 表に示すが如き値となる。

第 1 表

$I_1/I_0$	$h/l$						
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
0.1	$m=1$	6.48	7.58	8.68	9.46	9.82	$\pi^2$
	$m=2$	5.40	6.67	8.08	9.25	9.79	"
	$m=3$	5.01	6.32	7.84	9.14	9.77	"
	$m=4$	4.81	6.11	7.68	9.08	9.77	"
0.2	$m=1$	7.01	7.99	8.91	9.63	9.82	"
	$m=2$	6.37	7.49	8.61	9.44	9.81	"
	$m=3$	6.14	7.31	8.49	9.39	9.81	"
	$m=4$	6.02	7.20	8.42	9.38	9.80	"
0.4	$m=1$	7.87	8.60	9.19	9.70	9.84	"
	$m=2$	7.61	8.42	9.15	9.63	9.84	"
	$m=3$	7.52	8.38	9.10	9.63	9.84	"
	$m=4$	7.48	8.33	9.10	9.62	9.84	"
0.6	$m=1$	8.60	9.12	9.55	9.74	9.85	"
	$m=2$	8.51	9.03	9.48	9.74	9.85	"
	$m=3$	8.50	9.02	9.47	9.74	9.85	"
	$m=4$	8.47	9.01	9.45	9.74	9.85	"
0.8	$m=1$	9.27	9.54	9.69	9.83	9.86	"
	$m=2$	9.24	9.50	9.69	9.82	9.86	"
	$m=3$	9.23	9.50	9.69	9.81	9.86	"
	$m=4$	9.23	9.49	9.69	9.81	9.86	"
1	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	"	

上記の  $k$  の値は Timoshenko 氏の脚註によれば A. Dinik 氏の論文<sup>5)</sup>より引用されたものである。著者は不幸にして同氏の論文を一読するの機會なく、氏が如何なる方法により限界荷重を求めたか知り得ないが、著者の計算の結果は必ずしも同氏の求めたる値に一致しないものがある。

<sup>5)</sup> A. Dinik, Bulletins of Engineers (Westnik Ingenerov), 1927

以下の解法はオイラーの公式を誘導せる場合と全く同様に

1. 柱の軸は直線なること,
2. 材質は各部均一なること
3. 荷重は偏心を有せざること,
4. 柱の長さは充分長きこと
5. 柱の自重は考慮の外に置く

等の諸假定より出發せるものである。

### 2. 柱の形状

數學上の取扱ひを單純ならしむるため柱の形状を次の第 2 圖に示せるが如く、中央に對し左右對稱として中央部斷面一定せる部分の長さを  $2h$ 、全長を  $2L$  とす。中央部の慣性率を  $I_c$ 、端に於ける慣性率を  $I_E$  と定め端部 ( $L-h$ ) の間即ち AB 間は變斷面を有するものと約束する。

此の變斷面を有する部分の慣性率を  $I_x$  で表し、 $x$  軸を柱の重心線に選び、柱の中央より測りて  $l$  なる點を原點 0 とし、此の原點よりの距離の  $n$  乗に比例するものとする。

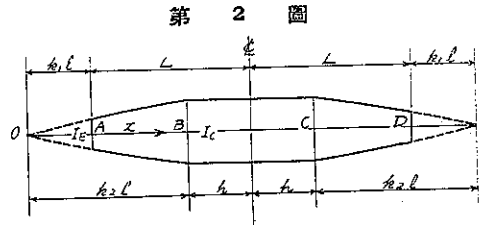
即ち第 2 圖に於て  $OB = k_2 l$  とすれば

$$I_x = I_c \left( \frac{x}{k_2 l} \right)^n = \frac{I_c}{k_2^n l^n} x^n$$

従つて  $OB = k_1 l$  とすれば

$$I_E = \frac{k_1^n}{k_2^n} I_c$$

となる。



第 2 圖

### 3. 彈性曲線

第 3 圖に示す如く兩端部變斷面を有する長柱が  $P_c$  なる限界荷重を受け彎曲を起し ABCD なる曲線となつたものとする。 $y$  を以て  $x$  なる點に於ける彈性變位を示すものとする。彈性曲線の微分方程式は

$$EI_x \frac{d^2 y}{dx^2} + P_c y = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$E$ : 柱の材料の彈性率,  $I_x$ : 慣性率,  $P_c$ : 限界荷重

#### (1) 變斷面部分に對する彈性曲線

$$I_x = I_c \left( \frac{x}{k_2 l} \right)^n \text{ なるを以て (1) 式は } \frac{EI_c}{k_2^n l^n} x^n \frac{d^2 y_{AB}}{dx^2} + P_c y_{AB} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

今  $\frac{EI_c}{P_c k_2^n l^n} = \alpha^{n-2}$ ,  $\xi = \alpha \frac{x}{k_2 l}$  とすれば  $\frac{1}{dx} = \frac{\alpha}{k_2 l} \frac{1}{d\xi}$  にして (2) 式は

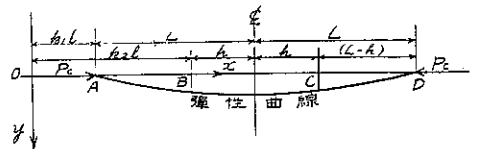
$$\xi^n \frac{d^2 y_{AB}}{d\xi^2} + y_{AB} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

此の (3) 式は標準型の微分方程式にして其の解は  $n \neq 2$  とすれば

$$y_{AB} = \xi^{\frac{1}{2-n}} \left[ C_1 J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) + C_2 Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] \dots\dots\dots (4)$$

なる型にて表される。茲に  $J_{\frac{1}{2-n}}$  は第 1 種ベッセル函数,  $Y_{\frac{1}{2-n}}$  は第 2 種ベッセル函数を表すものである。

$C_1$  及び  $C_2$  は積分常数にして終端條件  $x = k_1 l$ , 即ち  $\xi = \alpha \left( \frac{k_1}{k_2} \right)$  にて  $y_{AB} = 0$  よりして



第 3 圖

$$C_2 = -C_1 \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}$$

従つて (4) 式は  $y_{AB} = C_1 \xi^{\frac{1}{2}} \left[ J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) - \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] \dots\dots\dots (5)$

若し又  $k_1=0$  の場合、即ち原点 0 が柱の端 A と一致する場合には  $x=0$ 、即ち  $\xi=0$  にて  $y_{AB}=0$  なるべく  $J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) = 0$  なるも  $Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) = \infty$  となるを以て  $C_2=0$  なるを要し

$$y_{AB} = C_1 \xi^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) \dots\dots\dots (6)$$

(2) 定數面部分に對する彈性曲線

$$I_x = I_0 \text{ なるを以て (1) 式は } \frac{EI_0 d^2 y_{BD}}{P_c dx^2} + y_{BD} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

此の微分方程式の解は  $C_1'$  及  $C_2'$  を積分常數とすれば

$$y_{BD} = C_1' \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} x \right\} + C_2' \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} x \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$x=l$  にて  $\frac{dy_{BD}}{dx} = 0$  なる條件よりして  $C_2' = C_1' \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} l \right\}$  となる。従つて (8) 式は

$$y_{BD} = C_1' \left[ \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} l \right\} \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} x \right\} + \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} x \right\} \right] \dots\dots\dots (9)$$

4. 限界荷重を決定すべき條件式

B 點に於て、即ち  $x=k_2 l$  に於て

$$(i) (y_{AB})_{x=k_2 l} = (y_{BD})_{x=k_2 l}, \quad (ii) \left( \frac{dy_{AB}}{dx} \right)_{x=k_2 l} = \left( \frac{dy_{BD}}{dx} \right)_{x=k_2 l}$$

なる 2 條件を満足しなければならぬ。之より限界荷重を算定すべき條件式が誘導せられる。

(5) 式及び (9) 式より  $\frac{dy}{dx}$  を求むれば

$$\frac{dy_{AB}}{dx} = C_1 \frac{\alpha}{k_2 l} \xi^{\frac{1-n}{2}} \left[ J_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) - \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} Y_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \xi^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] \dots\dots (10)$$

$$\frac{dy_{BD}}{dx} = C_1' \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} \left[ \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} l \right\} \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} x \right\} - \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} x \right\} \right] \dots\dots\dots (11)$$

(i) 及び (ii) の條件を夫々 (5) 式と (9) 式及び (10) 式と (11) 式より求むれば (12) 式及び (13) 式となる。

$$C_1 \alpha^{\frac{1}{2}} \left[ J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right) - \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] - C_1' \left[ \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} l \right\} \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} k_2 l \right\} + \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_0}} k_2 l \right\} \right] = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$C_1 \frac{\alpha}{k_2 l} \alpha^{\frac{1-n}{2}} \left[ \frac{J_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right)}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right)} - \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} Y_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right) \right]$$

$$- C_1' \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} \left[ \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} l \right\} \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l \right\} - \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l \right\} \right] = 0 \dots (13)$$

(12) 及び (13) 兩式より  $C_1$  及び  $C_1'$  を消去すれば

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right)}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} - \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} Y_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] \\ \frac{\alpha}{k_2 l} \alpha^{\frac{1-n}{2}} \left[ \frac{J_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right)}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} - \frac{J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \left( \alpha \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} Y_{\frac{n-1}{2-n}} \left( \frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} \right) \right] \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} l \right\} \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l \right\} \\ + \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l \right\} \end{array} \right] = 0$$

$$- \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} \left[ \begin{array}{l} \tan \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} l \right\} \cos \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l \right\} \\ - \sin \left\{ \sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l \right\} \end{array} \right]$$

之を整理し  $\sqrt{\frac{P_c}{EI_c}} k_2 l = \alpha^{\frac{2-n}{2}} \dots (14)$

を代入し  $\frac{2}{2-n} \alpha^{\frac{2-n}{2}} = \zeta \dots (15)$

とすれば  $\frac{J_{\frac{n-1}{2-n}}(\zeta) Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \zeta \right\} - J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \zeta \right\} Y_{\frac{n-1}{2-n}}(\zeta)}{Y_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \zeta \right\} - J_{\frac{1}{2-n}} \left\{ \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{2-n}{2}} \zeta \right\} Y_{\frac{n-1}{2-n}}(\zeta)} = \tan \left\{ \frac{(1-k_2)(2-n)}{2k_2} \zeta \right\} \dots (16)$

此の (16) 式が限界荷重を決定すべき条件式である。(16) 式の最小根を  $\zeta_0$  とすれば (14) 及び (15) 式よりして

$$P_c = \zeta_0^2 \frac{(2-n)^2}{4} \frac{EI_c}{k_2^2 l^2} \dots (17)$$

然るに  $L = l - k_1 l = (1 - k_1)l$  なるを以て

$$P_c = \zeta_0^2 (2-n)^2 \frac{(1-k_1)^2}{k_2^2} \frac{EI_c}{(2L)^2} \dots (18)$$

若し A が原点に一致する場合には前同様にして  $P_c$  を決定すべき条件式は

$$\frac{J_{\frac{n-1}{2-n}}(\zeta)}{Y_{\frac{1}{2-n}}(\zeta)} = \tan \left\{ \frac{(1-k_2)(2-n)}{2k_2} \zeta \right\} \dots (19)$$

(19) 式の最小根を  $\xi_0$  とすれば

$$P_c = \xi_0^2 (2-n)^2 \frac{1}{k_2^2} \frac{EI_c}{(2L)^2} \dots\dots\dots (20)$$

より限界荷重を求めることが出来る。

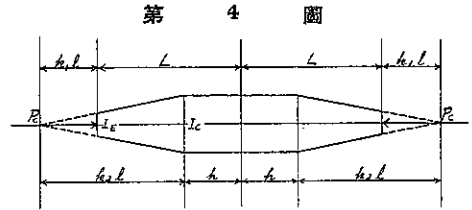
**5. 截頭對稱 6 邊形柱の限界荷重**

(16) 式に  $n=1$  とおけば第 4 圖に示すが如き截頭對稱 6 邊形柱の限界荷重を與ふる條件式が得られる。

$$\frac{J_0(\xi)Y_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\} - J_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\}Y_0(\xi)}{J_{\frac{3}{2}}(\xi)Y_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\} - J_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\}Y_{\frac{3}{2}}(\xi)} = \tan\left\{\frac{1-k_2}{2k_2}\xi\right\} \dots\dots\dots (21)$$

$k_1, k_2$  は柱の形状に依つて定まる常數なるを以て上式を解いて  $\xi$  を求めることが出来る。然し (21) 式は兩邊共に超越函數なるを以つて種々の  $\xi$  に対する兩邊の値を算出し兩邊の丁度等値となるが如き  $\xi$  を求めねばならぬ。之には

$$f(\xi) = \frac{J_0(\xi)Y_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\} - J_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\}Y_0(\xi)}{J_{\frac{3}{2}}(\xi)Y_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\} - J_1\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right\}Y_{\frac{3}{2}}(\xi)}$$



とし、 $k_1/k_2$  の色々な値に対する  $f(\xi)$  をベセル函數表<sup>(6)</sup>により計算シグラフとして置くと便利である。

第 5 圖は  $k_1/k_2$  が 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 なる場合の  $f(\xi)$  を示せるものである。

$$\frac{I_E}{I_c} = \frac{k_1}{k_2}, \quad \frac{h}{L} = \frac{1-k_2}{1-k_1}$$

従つて  $I_E/I_c, h/L$  を與へる時は  $k_1, k_2$  は決定される。今  $k_2$  の種々の値に対する  $\xi_0$  を求むれば第 2 表の如し。

第 2 表

$k_2$	$\xi_0$				
	$k_1/k_2=0.1$	$k_1/k_2=0.2$	$k_1/k_2=0.4$	$k_1/k_2=0.6$	$k_1/k_2=0.8$
1.0	2.80	3.29	4.66	7.32	
0.8	2.40	2.70	3.50	4.70	7.00
0.6	1.90	2.05	2.45	2.90	3.60
0.4	1.30	1.30	1.50	1.60	1.85

従つて (18) 式より  $P_c$  を求めることが出来る。

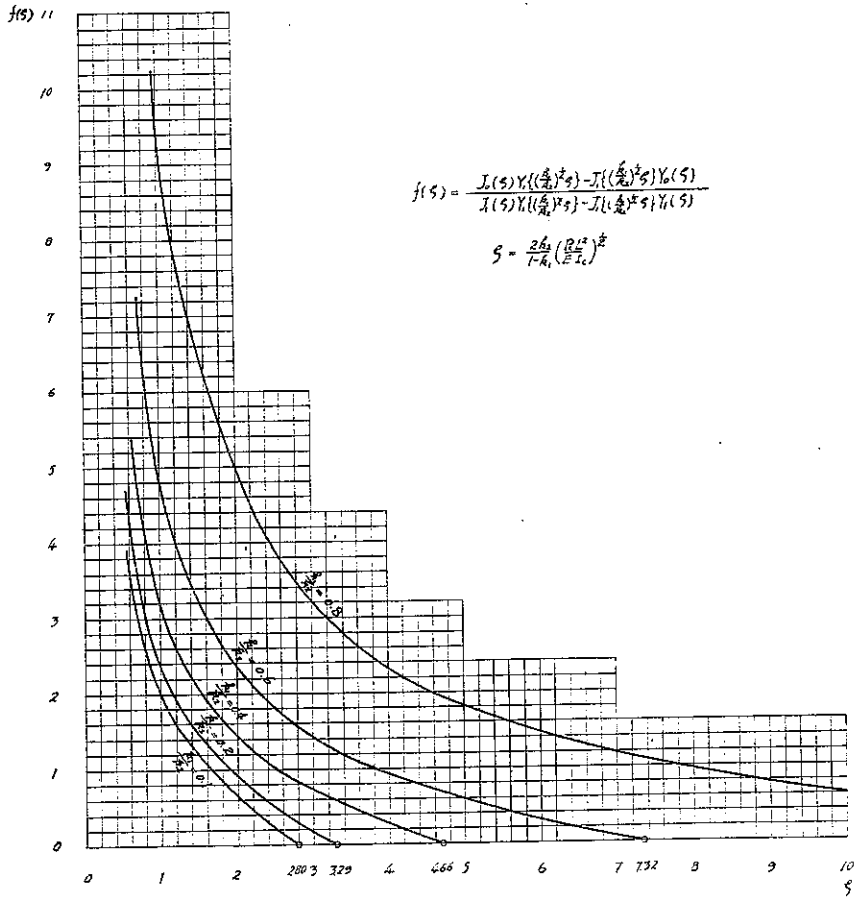
次に  $I_E/I_c=0.1, h/L=0.2$  とすれば  $\xi_0=2.47$  にして  $P_c=7.74 \frac{EI_c}{(2L)^2}$

又  $I_E/I_c=0.1, h/L=0.4$  とすれば  $\xi_0=1.96$  にして  $P_c=8.64 \frac{EI_c}{(2L)^2}$

となる。A. Dinik 氏の計算せる結果は前者に對しては  $P_c=7.58 \frac{EI_c}{(2L)^2}$

<sup>(6)</sup> Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 1928.

第 5 圖



後者に對しては  $P_0 = 8.68 \frac{EI_0}{(2L)^2}$

にして著者の計算の結果と比較すれば後者は殆んど等しきも前者は 2% 大である。

### 6. 尖頭柱の限界荷重

(19) 式に於ける  $n$  を變化せしむる時は種々の尖頭柱の限界荷重を與へる條件式が得られる。

(1)  $n=1$  の場合

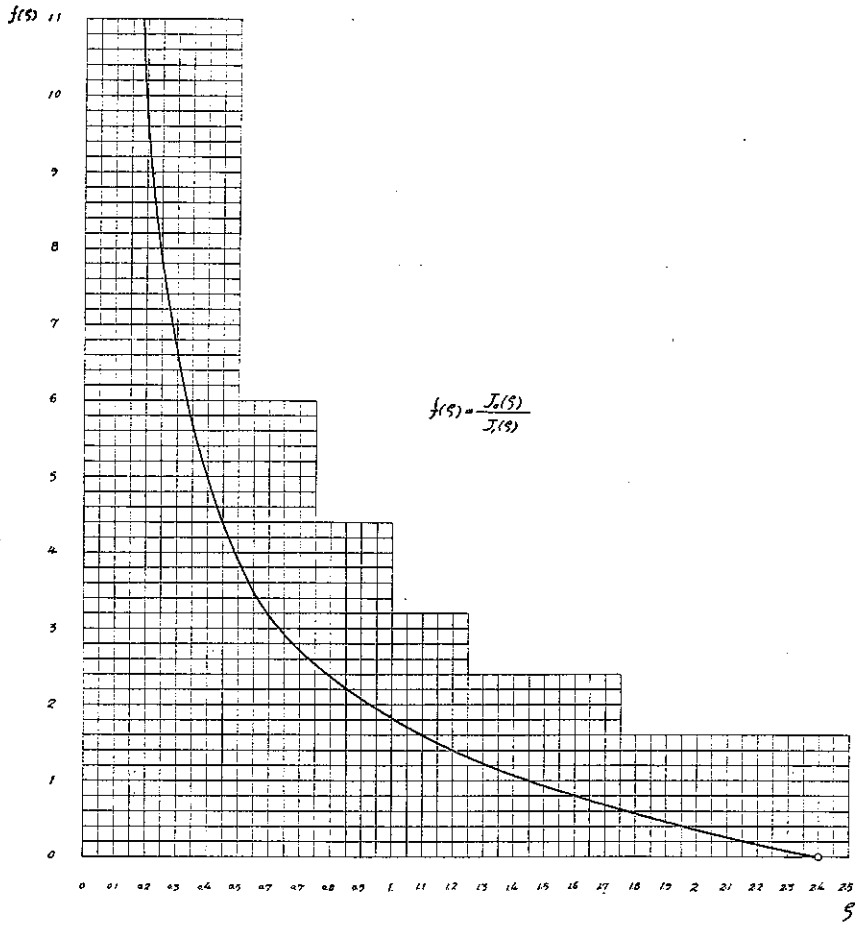
(19) 式に  $n=1$  と置けば對稱 8 邊形柱に對する條件式が得られる。即ち

$$\frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi)} = \tan \left\{ \frac{1-k_2}{2k_2} \xi \right\}$$

上式を解くには前同様  $J_0(\xi)/J_1(\xi)$  をグラフにして置くと便利である。第 6 圖は  $J_0(\xi)/J_1(\xi)$  を  $f(\xi)$  とし水平に  $\xi$  をとり縦に  $f(\xi)$  を示せるものである。 $\xi$  の第 1 根を  $\xi_0$  とすれば

$$P_0 = \xi_0^2 \frac{1}{k_2^2} \frac{EI_0}{(2L)^2}$$

第 6 圖



$\xi_0$  を求むれば第 3 表の如し。従つて  $P_c$  を求むれば

$$k_2=1.0 \text{ の場合 } P_c=5.76 \frac{EI_0}{(2L)^2}$$

$$k_2=0.8 \text{ の場合 } P_c=7.02 \frac{EI_0}{(2L)^2}$$

$$k_2=0.6 \text{ の場合 } P_c=8.41 \frac{EI_0}{(2L)^2}$$

$$k_2=0.4 \text{ の場合 } P_c=9.30 \frac{EI_0}{(2L)^2}$$

(2)  $n = \frac{4}{3}$  の場合

(19) 式に於て  $n = \frac{4}{3}$  とせば

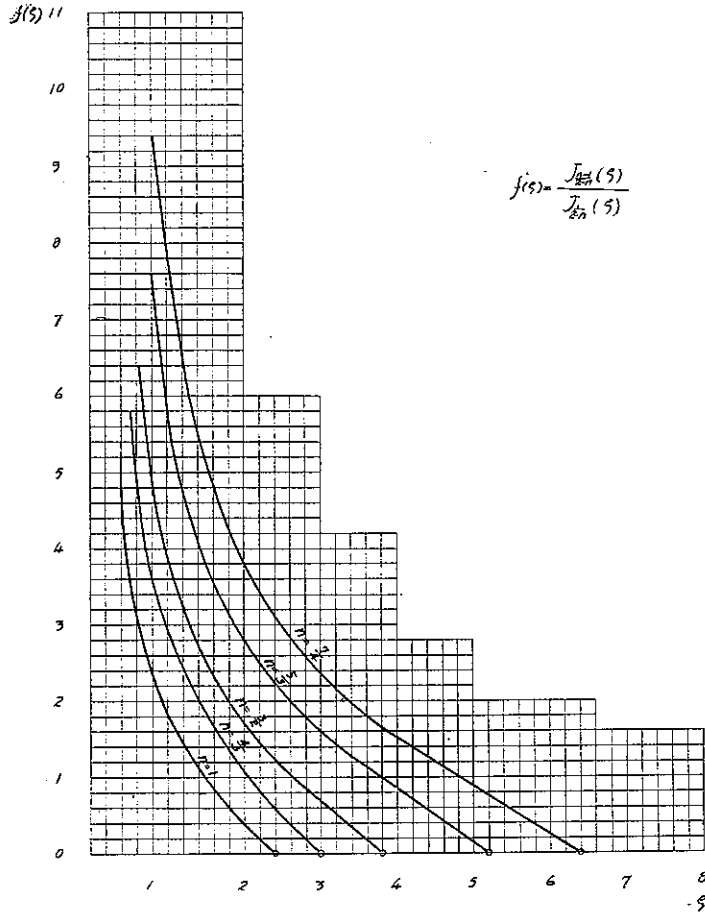
$$\frac{J_{\frac{1}{2}}(\xi)}{J_{\frac{3}{2}}(\xi)} = \tan \left\{ \frac{1-k_2}{2k_2} \xi \right\}$$

第 3 表

$k_2$	$\xi_0$
1.0	2.40
0.8	2.12
0.6	1.74
0.4	1.22



第 7 圖



となる。  $J_{\frac{3}{2}}(\xi)/J_{\frac{3}{2}}'(\xi)$  をグラフとすれば第 7 圖の如くである。

$\xi_0$  を求めれば第 4 表に示す如し。

$$k_2=0.8 \text{ とせば } P_0=5.06 \frac{EI_c}{(2L)^2}$$

(3)  $n = \frac{3}{2}$  の場合

(19) 式に於て  $n = \frac{3}{2}$  と置けば  $\frac{J_3(\xi)}{J_3'(\xi)} = \tan\left\{\frac{1-k_2}{2k_2}\xi\right\}$  となる。

$J_3(\xi)/J_3'(\xi)$  をグラフとすれば第 7 圖の如し。 $\xi_0$  を求めれば第 5 表の如し。

$$\text{今 } k_2=0.8 \text{ とせば } P_0=4.25 \frac{EI_c}{(2L)^2}$$

(4)  $n = \frac{5}{3}$  の場合

(19) 式に  $n = \frac{5}{3}$  と置けば  $\frac{J_5(\xi)}{J_5'(\xi)} = \tan\left\{\frac{1-k_2}{2k_2}\xi\right\}$  となる。

第 7 圖に  $J_n(\xi)/J_n'(\xi)$  のグラフを示す。

第 4 表

$k_2$	$\xi_0$
1.0	3.00
0.8	2.70
0.6	2.15
0.4	1.45

第 5 表

$k_2$	$\xi_0$
1.0	3.83
0.8	3.30
0.6	2.50
0.4	1.55

$\zeta_0$  を求めれば第 6 表の如し。 $k_2=0.8$  とせば  $P_0=3.21 \frac{EI_0}{(2L)^2}$

(5)  $n = \frac{7}{4}$  の場合

(19) 式に  $n = \frac{7}{4}$  と置けば  $\frac{J_3(\zeta)}{J_4(\zeta)} = \tan \left\{ \frac{1-k_2 \zeta}{2k_2} \right\}$  となる。

$J_3(\zeta)/J_4(\zeta)$  の値は前同様第 7 圖にグラフとして示して置いた。

$\zeta_0$  を求めれば第 7 表の如し。

$k_2=0.8$  とせば  $P_0=2.49 \frac{EI_0}{(2L)^2}$

となる。

以上  $n$  が  $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}$  なる場合の限界荷重を與へる條件式並に  $k_2$  の各種の値に對する  $\zeta_0$  を求めたが第 8 圖は各種の  $n$  の値に對する尖頭柱の形狀を示すものである。

第 6 表

$k_2$	$\zeta_0$
1.0	5.14
0.8	4.30
0.6	3.00
0.4	1.70

第 7 表

$k_2$	$\zeta_0$
1.0	6.38
0.8	5.20
0.6	3.30
0.4	1.80

第 8 圖

