

## 参 考 資 料

第 21 卷 第 5 號 昭和 10 年 5 月

### 支柱から力を傳へられる弾性床上

#### (所謂) の鐵板の撓み

J. Vint and W. N. Elgood. "The Deformation of a Bloom Plate resting on an Elastic Base when a Load is transmitted to the Plate by means of a Stanchion" Phil. Mag. Jan. 1935.

弾性床上にあつて柱に依つて力を傳へられる板の問題は多くアメリカで研究された。

#### 1. 對稱な荷重の下の弾性床上の圓形のうす板

基礎式は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\omega}{dr} \right) \right\} \right] = Z'/D \dots (1)$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}, \quad Z' = f(r) - R\omega.$$

茲に  $\omega$  は撓み,  $2h$  は板の厚さ。

曲げモーメントは切線の方では

$$G_t = -D \left( \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\omega}{dr} \right)$$

半徑の方では

$$G_r = -\sigma D \frac{d^2\omega}{dr^2} - D \left( \sigma \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \right)$$

半徑  $r$  の境界の剪断應力は

$$N_t = -D \left( \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \right)$$

$$\omega(m, r) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^{m+4s}, \quad (a_0 = 1)$$

として (1) 式の complementary equation に入れば

$$m^2(m-2)^2 = 0$$

故に (1) 式の complementary function は

$$\psi_1 = [\omega(m, r)]_{m=0}, \quad \psi_2 = \left[ \frac{\partial}{\partial m} \{\omega(m, r)\} \right]_{m=0}$$

$$\psi_3 = [\omega(m, r)]_{m=2}, \quad \psi_4 = \left[ \frac{\partial}{\partial m} \{\omega(m, r)\} \right]_{m=2}$$

之を計算して求めれば次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \psi_1 = & 1 - \frac{v^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{v^8 r^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \dots \\ & + (-1)^s \frac{v^{4s} r^{4s}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (4s-2)^2 (4s)^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\psi_2 = \psi_1 \log r + \sum_{s=1}^{\infty} \left[ (-1)^{s+1} c_s v^{4s} r^{4s} \right]$$

$$c_s = \frac{2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (4s-2)^2 (4s)^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4s} \right]$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & r^2 \left[ 1 - \frac{v^4 r^4}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{v^8 r^8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^s \frac{v^{4s} r^{4s}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (4s)^2 (4s+2)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\psi_4 = \psi_3 \log r + r^2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[ (-1)^{s+1} d_s v^{4s} r^{4s} \right]$$

$$d_s = \frac{2}{4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (4s)^2 (4s+2)^2} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4s+2} \right]$$

$r_1 (r_1 < r_2)$ , ( $r_2$  は圓板の半徑) の圓の上に等布的荷重をかけた場合:

$$(2) \text{ の完全解は } \omega_1 = \frac{p}{R} + E_1 \psi_1 + E_3 \psi_3 \quad (r < r_1)$$

そして  $\omega$  は原点で有限である。又  $r_1 < r < r_2$  の處では

$$\omega_2 = F_1 \psi_1 + F_2 \psi_2 + F_3 \psi_3 + F_4 \psi_4,$$

$r = r_1$  に於ては  $\omega$  とか  $d\omega/dr$  は連続であるから  $E, F$  の常数はきまる。

#### 2. 上述の荷重をうける水平床上の薄矩形板の撓み

1.  $(0, x, y, z)$  のデカルト座標を用ひ OZ を垂直下方にとり, xoy 平面を荷重なき時の中立面に一致せしむ。

撓みに依るポテンシャル・エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned}$$

外力に依る仕事は單位面について

$$\left[ f(x, y) - R\omega \right] \delta\omega = \delta \left[ f(x, y)\omega - \frac{1}{2} R\omega^2 \right]$$

故に板に荷重のかかつた時のこの仕事のこの項は

$$\iint \left[ f(x, y)\omega - \frac{1}{2} R\omega^2 \right] dx dy$$

これを加へ合せて全體の仕事は

$$V = \iint \left\{ \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} - \left[ f(x, y) v - \frac{1}{2} R \omega^2 \right] dx dy \dots \dots \dots (3)$$

今  $\omega' = \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s A_{mn} \psi_m(x) \psi_n(y)$

とおき (3) の  $\omega$  の中にこの  $\omega'$  を入れる。そしてそれを  $V'$  とすると  $V'$  は  $A_{mn}$  の 2 次式である。そこで

$$\frac{\partial V'}{\partial A_{mn}} = 0$$

これで  $A_{mn}$  を求めて  $\omega'$  に入れて  $r$  と  $s$  とを無限大まで擴張すれば解が得られる。

2. 今矩形が  $x = \pm a, y = \pm b$  で限られてゐるとする。Ritz の方法に依る。直交函数として板の自由振動の研究に用ひられる函数を用ひる。これ等の函数は自由な一様な直線棒の撓み振動をきめる時に出て来るので次の方程式で決定される。

即ち  $\frac{d^4 u}{d\xi^4} = km u$   
 $u_0 = 1/\sqrt{2}$

$$u_m(\xi) = \frac{\cosh km \cos km\xi + \cos km \cosh km\xi}{\sqrt{(\cosh^2 km + \cos^2 km)}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (m \text{ 偶数})$$

茲に  $\tanh km + \tan km = 0$

及び  $u_1(\xi) = \xi\sqrt{3}/\sqrt{2}$

$$u_m(\xi) = \frac{\sinh km \sin km\xi + \sin km \sinh km\xi}{\sqrt{(\sinh^2 km - \sin^2 km)}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (m \text{ 奇数})$$

茲に  $\tan km - \tanh km = 0$

$km$  の値は大體

$$k_0 = 0, k_1 = 0, k_2 = 2.3650, k_3 = 3.9266$$

$$k_4 = 7\pi/4, \dots, km = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \dots$$

これ等の函数は  $m$  が偶数が奇数かに従つて偶函数か奇函数であつて直交函数である。即ち

$$\int_{-1}^{+1} u_m(\xi) u_n(\xi) d\xi = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-1}^{+1} u_m^2(\xi) d\xi = 1$$

又その上  $d^2 u_m / d\xi^2$  及び  $d^2 u_m / d\xi^2$  は  $\xi = \pm 1$  で 0

になる。出て来る積分の計算を簡単にするために

$$u_m'(\xi) = km \frac{[-\cosh km \sin km\xi + \cos km \sinh km\xi]}{\sqrt{(\cosh^2 km + \cos^2 km)}} \quad (m \text{ 偶数})$$

又は  $u_m(x/a)$

$$= km \frac{[-\cosh km \sin (kmx/a) + \cos km \sinh (kmx/a)]}{\sqrt{(\cosh^2 km + \cos^2 km)}} \quad (m \text{ 偶数})$$

そして  $\int_{-a}^a u_m(x/a) u_n(x/a) dx = 0 \quad (m \neq n)$

$$\int_{-a}^a u_m^2(x/a) dx = a$$

3.  $\omega_1 = \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s A_{mn} u_m(x/a) u_n(y/b)$

として  $\frac{\partial J_2}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial J_1}{\partial A_{mn}} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, s)$

茲に  $J_1 = \frac{2}{D} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \omega_1 f(x, y) dx dy$

$$J_2 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda \omega_1^2 \right] dx dy, \quad \lambda = R/D$$

$J_1$  は  $A_{mn}$  の 1 次式であるから

$$J_1 = 2 \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s \delta_{mn} \delta_{mn}$$

の形にかける。

$$\delta_{mn} = \frac{1}{D} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) u_m(x/a) u_n(y/b) dx dy$$

$J_2$  は  $A_{mn}$  の同次 2 次方程式であるから今  $A_{mn}^2$  の係数を  $\gamma_{mn, mm}, A_{mn} A_{pq}$  の係数を  $\gamma_{mn, pq}$  とすれば  $A_{mn}$  等をきめる式は

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{00,10} A_{00} + \gamma_{01,00} A_{01} + \gamma_{10,00} A_{10} + \dots \\ \quad + \gamma_{ss,00} A_{ss} = \delta_{00} \\ \gamma_{00,01} A_{00} + \gamma_{01,01} A_{01} + \gamma_{10,01} A_{10} + \dots \\ \quad + \gamma_{ss,01} A_{ss} = \delta_{01} \\ \dots \dots \dots \\ \gamma_{00,ss} A_{00} + \gamma_{01,ss} A_{01} + \gamma_{10,ss} A_{10} + \dots \\ \quad + \gamma_{ss,ss} A_{ss} = \delta_{ss} \end{array} \right\} (4)$$

4.  $\gamma_{mm, mn} = \frac{b}{a^2} \beta_{mn} + \frac{a}{b^2} \beta_{nn} + \frac{2\sigma}{ab} \omega_{mm} \omega_{nn}$

$$+ \frac{2(1-\sigma)}{ab} \alpha_{mn} \alpha_{nn} + \lambda ab$$

$$\begin{aligned} \gamma_{mn,pq} &= \frac{b}{a^3} \beta_{mp} \int_{-1}^1 u_n(\xi) u_q(\xi) d\xi \\ &+ \frac{a}{b^3} \beta_{nq} \int_{-1}^1 u_m(\xi) u_p(\xi) d\xi \\ &+ \frac{\sigma}{ab} (\omega_{mp} \omega_{qn} + \omega_{pm} \omega_{qn}) + \frac{2(1-\sigma)}{ab} \alpha_{mp} \alpha_{nq} \\ \alpha_{mn} &= \alpha_{nm} = \int_{-1}^1 u_m'(\xi) u_n'(\xi) d\xi \\ \beta_{mn} &= \beta_{nm} = \int_{-1}^1 u_m''(\xi) u_n''(\xi) d\xi \\ \omega_{mn} &= \int_{-1}^1 u_m'(\xi) u_n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

これ等の値は

$$\alpha_{m0} = \alpha_{0m} = 0, \quad \alpha_{1n} = 0 \quad (n \text{ 偶数})$$

$$\alpha_{1n} = 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)} u_n(1) \quad (n \text{ 奇数})$$

$$\alpha_{mn} = 0 \quad \{m \text{ 偶数 } n \text{ 奇数 又は } m \text{ 奇数 } n \text{ 偶数}\}$$

$$= 2 \frac{k_m^4 u_n(1) u_m'(1) - k_n^4 u_m'(1) u_n(1)}{k_m^4 - k_n^4}$$

( $m$  及び  $n$  共に奇数又は偶数)

$\alpha_{mm}$

$$= \frac{k_m^2 (\cosh^2 k_m - \cos^2 k_m) + 6k_m \cos^2 k_m \sinh k_m \cosh k_m}{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m} \quad (m \text{ 偶数})$$

$$= \frac{k_m^2 (\sinh^2 k_m + \sin^2 k_m) + 6k_m \sin^2 k_m \sinh k_m \cos k_m}{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m} \quad (m \text{ 奇数})$$

$$\beta_{mn} = 0 \quad (m \neq n); \quad \beta_{mm} = k_m^4, \quad \omega_{0n} = \omega_{1n} = 0$$

$$\omega_{m0} = \sqrt{2} k_m \frac{(-\cosh k_m \sin k_m + \cos k_m \sinh k_m)}{\sqrt{(\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m)}} \quad (m \text{ 偶数})$$

$$= 0 \quad (m \text{ 奇数})$$

$$\omega_{mm} = 0 \quad \{m \text{ 偶 } n \text{ 奇 又は } m \text{ 奇 } n \text{ 偶}\}$$

$$= 2k_m^4 \frac{u_m'(1) u_m(1) - u_m(1) u_m'(1)}{k_m^4 - k_n^4}$$

( $m$  及び  $n$  が共に偶又は奇,  $m \neq n$ )

$\alpha_{mm}$

$$= \frac{-k_m^2 (\cosh^2 k_m - \cos^2 k_m) + 2k_m \cos^2 k_m \sinh k_m \cosh k_m}{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m} \quad (m \text{ 偶数})$$

$$= \frac{-k_m^2 (\sinh^2 k_m + \sin^2 k_m) + 2k_m \sin^2 k_m \sinh k_m \cosh k_m}{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m} \quad (m \text{ 奇数})$$

又 (i)  $\gamma_{mn,pq} = \gamma_{pq,mn} = \gamma_{nm,qp} = \gamma_{ip,nn}$

(ii)  $m, n, p, q$  の中三つが 0 ならば  $\gamma_{mn, q=0}$

(iii)  $m \neq 0, n \neq 0$  なら  $\gamma_{00, mn} = 0$

(iv)  $m \neq 0, n \neq 0$  で  $m \neq n$  ならば  $\gamma_{m0, n0} = 0$

(v)  $m \neq 0, n \neq 0$  ならば  $\gamma_{m0, 0n} = (\sigma/ab) \omega_{m0} \omega_{0n}$

(vi)  $m, n, p, q$  の中の唯一つが 0 ならば

$$\gamma_{mn,pq} = (\sigma/ab) (\omega_{mp} \omega_{qn} + \omega_{pm} \omega_{qn})$$

$m$  が 3 より大きい時  $k_m$  の値は殆ど  $(m-2)\pi/2$  になるから次の如く近似的に書いて (4) 式の計算を簡単にする事が出来る。

$$u_m(\xi) = \cos\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi\xi}{2} + (-1)^{m/2} \frac{\cosh\left(m - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\pi\xi}{2}}{\sqrt{2} \cosh\left(m - \frac{1}{2}\right) \pi/2} \quad (m \text{ 偶数})$$

$$= \sin\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi\xi}{2} + (-1)^{(m-1)/2} \frac{\sinh\left(m - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\pi\xi}{2}}{\sqrt{2} \sinh\left(m - \frac{1}{2}\right) \pi/2} \quad (m \text{ 奇数})$$

$$\alpha_{1n} = (-1)^{(n-1)/2} 2\sqrt{3} \quad (n \text{ 奇数})$$

$$\alpha_{mn} = (-1)^{(m+n)/2} 4k_m k_n \frac{k_m^3 - k_n^3}{k_m^4 - k_n^4} \quad (m, n \text{ 共に偶数})$$

$$= (-1)^{(m+n+2)/2} 4k_m k_n \frac{k_m^3 - k_n^3}{k_m^4 - k_n^4} \quad (m, n \text{ 共に奇数})$$

$$\alpha_{mm} = k_m^2 + 3k_m \quad (m \text{ 偶数 又は 奇数})$$

$$\omega_{m0} = (-1)^{m/2} 2k_m \quad (m \text{ 偶数})$$

$$\omega_{m1} = (-1)^{(m-1)/2} 2(k_m - 1) \quad (m \text{ 奇数})$$

$$\omega_{mn} = (-1)^{(m+n)/2} 4k_m^4 \frac{k_m - k_n}{k_m^4 - k_n^4} \quad (m, n \text{ 共に偶数})$$

$$= (-1)^{(m+n+2)/2} 4k_m^4 \frac{k_m - k_n}{k_m^4 - k_n^4} \quad (m, n \text{ 共に奇数})$$

$$\omega_{mm} = -k_m^2 + k_m$$

これ等を用ひて (4) 式を解くのに逐次近似法を用ひた。そして板をスプリングの臺の上ののせて上から荷重をかけて實驗した結果計算値と實驗値は相當に良く合つた。(最上武雄 抄譯)

隅角に丸味を有するラーメンの解法

(Dr. techn. Franz Urwalek, "Berechnung von Behaltern mit abgerundeten Ecken" Beton u. Eisen, 33 Jahrgang, Heft 24, 20 Dezember 1934.)

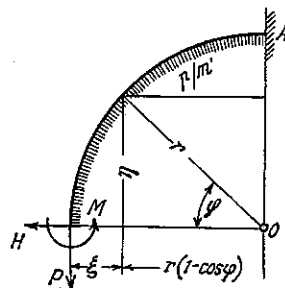
隅角が直角で四邊に  $p$  なる等布荷重を受けるラーメンの隅角の曲げモーメントは既に明かにされてある所であつて、その値は角の扭れから

$$M = -\frac{pl_1^3}{12} \frac{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \frac{J_1}{J_2}}{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \frac{J_1}{J_2}}$$

である。ラーメンが正方形である場合には、中間モーメント(徑間モーメント)の2倍の大きさを有する。若し隅角が丸味を帯びて居る場合には特に隅角モーメントに於て中間モーメントも共に其の値が減少する。即ち斯様な場合、丸味の半徑を適當に取る事が出来、正及び負の曲げモーメントを等値に近からしめる事によつて、其れが材料構成の上に相當な利益を齎らす事は明かである。又更に之によつて、隅角に於ける曲げモーメント圖の突出を減少させて、正彎曲率より負彎曲率の變移を均等ならしめ構造上の見地から大なる長所を發揮せしめ得る。

次に述べる所のものは隅角の丸味に 1/4 圓を有するラーメンの解法及び其の特殊な場合の解である。其の形状及び荷重の位置は對稱であるから、長邊の中心で之を切斷し、角の扭れの無い邊  $a$  の中點に於て固定されたものと考へる。邊  $b$  の中點に於ける角の扭れと、内及び外力から此の點に現れる未知の曲げモーメント  $M$  の値が見出され、之から其の他の點のモーメントの變化の有様を知る事が出来る。最初に一端に於て固定され、1/4 圓を隅角に有する圓弧の角の扭れの量を見出す事が必要である。第1圖に示す如く此の場合

第 1 圖



に示す如く此の場合

曲げモーメント  $M$ , 直應力  $P$ , 水平力  $H$  及び等布荷重  $P$  が作用してゐる。

$$M \text{ により } \tau_m = \frac{Mr}{EJ} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{Mr\pi}{2EJ} \dots\dots\dots (1)$$

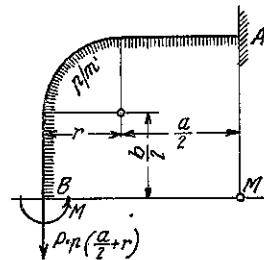
$$P \text{ により } M_p = P\xi = Pr(1 - \cos \varphi)$$

$$\tau_p = \int_0^{\pi/2} \frac{Pr(1 - \cos \varphi)}{EJ} r d\varphi = \frac{Pr^2}{EJ} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \dots\dots (2)$$

$$p \text{ により } M_p = \frac{p}{2} (\xi^2 + \eta^2) = pr^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$\tau_p = \int_0^{\pi/2} \frac{pr^2(1 - \cos \varphi)}{EJ} r d\varphi = \frac{pr^3}{EJ} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \dots\dots (3)$$

第 2 圖



$$H \text{ により } M_H = H\eta = Hr \cdot \sin \varphi$$

$$\tau_H = \int_0^{\pi/2} \frac{Hr \cdot \sin \varphi}{EJ} r d\varphi = Hr^2 \dots\dots\dots (4)$$

第 2 圖の B 點の位置にあつては

$EJ=1$  とすれば

$$M \text{ により } \tau_M = \frac{M}{2} (a+b+r\pi) \dots\dots\dots (5)$$

$$P = p \left( \frac{a}{2} + r \right) \text{ により}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_p &= p \left( \frac{a}{2} + r \right) r^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + p \left( \frac{a}{2} + r \right) \frac{a^2}{8} \\ &\quad + p \left( \frac{a}{2} + r \right) r \cdot \frac{a}{2} \\ &= p \frac{ar^2\pi}{4} + pr^3 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{pa^3}{16} + \frac{3pa^2r}{8} \end{aligned} \right\} (6)$$

$p$  により

$$\tau_p = \frac{pb^3}{48} + \frac{pa^3}{48} + pr^3 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{pb^2}{8} \frac{r\pi}{2}$$

$$+ \left[ \frac{p}{2} \left( \frac{b}{2} + r \right)^2 + \frac{pr^2}{2} \right] \frac{a}{2} + \frac{pr^2b}{2} + \frac{pra^2}{8} \dots (7)$$

$r_x + r_P = r_v$  より

$$\frac{pb^3}{24} - \frac{pa^3}{12} + pr^2(a+b) + pr \frac{ab}{2} + p \frac{r\pi+a}{2} \left( \frac{b^2}{4} - ar \right) = Mb(a+b+r\pi).$$

之より邊  $b$  の中點のモーメントは

$$Mb = \frac{p}{24(a+b+r\pi)} \left[ b^3 - 2a^3 + 24r^2(a+b) + 12rab + 12(r\pi+a) \left( \frac{b^2}{4} - ar \right) \right] \dots (I)$$

$M_a$  は式 (I) 中の  $a$  及び  $b$  を交互に置き換へれば求められ、 $r=0$  とする時は隅角に丸味なき直角なるラメンの  $M_b$  及び  $M_a$  を與へる。即ち

$$M_b = \frac{p}{24(a+b)} (b^3 - 2a^3 + 3ab^2).$$

$M_b$  又は  $M_a$  によつて他の部分のモーメントが計算出來て、これより  $M$  の變化する模様を表はすことが出来る。

圓周を外れた點にあつては

$$\left. \begin{aligned} M_{eb} &= M_b - \frac{pb^2}{8} = -\frac{p}{12(a+b+r\pi)} \left[ a^3 + b^3 + 6ar(r\pi+a-b) - 12r^2(a+b) \right] \\ M_{ea} &= M_a - \frac{pa^2}{8} = -\frac{p}{12(a+b+r\pi)} \left[ a^3 + b^3 + 6br(r\pi+b-a) - 12r^2(b+a) \right] \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

圓周上の任意の點では

$$\left. \begin{aligned} M &= M_{eb} + \frac{par}{2} (1 - \cos \varphi) - \frac{pbr}{2} \sin \varphi. \\ \max M. & \text{は } \tan \varphi = \frac{b}{a} \text{ で起る。} \end{aligned} \right\} \dots (III)$$

圓周の中點では

$$M_m = M_{eb} + \frac{par}{2} - pr \frac{\sqrt{2}}{4} (a+b) \dots (IV)$$

特別なる場合

a) 隅角に丸味を有する正方形のラメン 曲げモーメントは式 (1) 乃至 (IV) 式から  $a=b$  として得られる。

$$M_a = \frac{pa}{24(2a+r\pi)} \left[ 2a^3 + 3r(a\pi - 4r\pi + 16r) \right] \dots (V)$$

$$M_a = -\frac{pa}{6(2a+r\pi)} (a^2 + 3r^2\pi - 12r^2) \dots (VI)$$

$$\left. \begin{aligned} M(\text{圓周の内側}) &= M_e + \frac{par}{2} - \frac{par}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi) \\ M_m &= M_e - \frac{par}{2} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned} \right\} \dots (VII)$$

構架材料の按配其の他の關係上、此の場合

$M_a = -M_m$  である事が望ましい。この關係は

$$r^2 - 0.105ar - 0.4a^2 = 0, \quad r = 0.687a$$

$$M_a = -M_m = 0.1335pa^2 \quad M_e = +0.0084pa^2.$$

更に  $M_e = 0$  ならしめる  $\frac{a}{r}$  の比を求めて見ると、

$$a^2 - 3r^2\pi - 12r^2 = 0, \quad a = r\sqrt{12 - 3\pi} = 1.605r.$$

$\frac{a}{r} \cong 1.605$  なるに従ひ、 $M_e$  は各々負及び正の値を

取る。  $r = \frac{a}{1.605}$  を選べば  $r = 0.623a$

$M_m = -0.129pa^2$ 、及び  $M_a = 0.125pa^2$  となる。

b) 桶狀のラメンの場合 今  $a$  又は  $b$  の何れかを零とすると、その形は桶狀となる。假りに  $b=0$  とすれば

$$M_a = \frac{ra}{24(a+r\pi)} (a^2 + 24r^2 + 3r\pi a) \dots (VIII)$$

$$M_e = \frac{pa}{12(a+r\pi)} (a^2 - 12r^2) \dots (IX)$$

$$\left. \begin{aligned} M(\text{隅圓の内側}) &= M_a - \frac{pa}{4} (a + 2r \sin \varphi) \\ M_m &= -\frac{pa}{24(a+r\pi)} \left[ 5a^2 + 12r^2(\pi - 2) + 3ra(4 + \pi) \right] \end{aligned} \right\} \dots (X)$$

$M_a = -M_m$  なるためには

$$a^2 + 24r^2 + 3r\pi a = 5a^2 + 12r^2(\pi - 2) + 3ra(\pi + 4)$$

$$r = 1.434a$$

$$M_a = -M_m = 0.484pa^2$$

モーメントの零なる點は式 (X) から

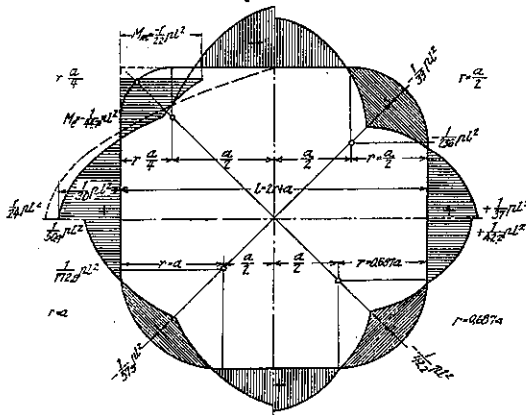
$$0.484pa^2 - \frac{pa^2}{4} - \frac{pa^2}{2} \times 1.434 \sin \varphi = 0$$

之より  $\varphi \cong 19^\circ 10'$   $M_e = 0$  とすれば式 (X) から

$$r = \frac{a}{\sqrt{12}} \cong 0.289a$$

となり  $\frac{a}{r} \cong 3.46$  なるにつれて  $M_e$  は負又は正となる。

第 3 圖



特に  $a=r$  なる場合にはこれ等の関係は簡単になり

$$M_a = \frac{pa^2}{24(\pi+1)}(3\pi+25) = 0.347pa^2$$

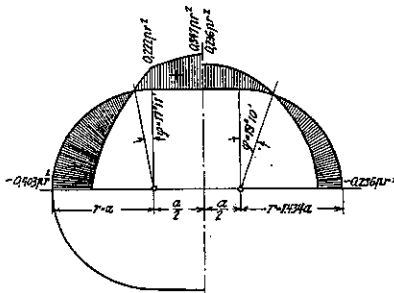
$$M_e = \frac{p11a^2}{12(\pi+1)} = 0.222pa^2$$

$$M_m = -\frac{pa^2}{24(\pi+1)}(15\pi-7) = -0.403pa^2$$

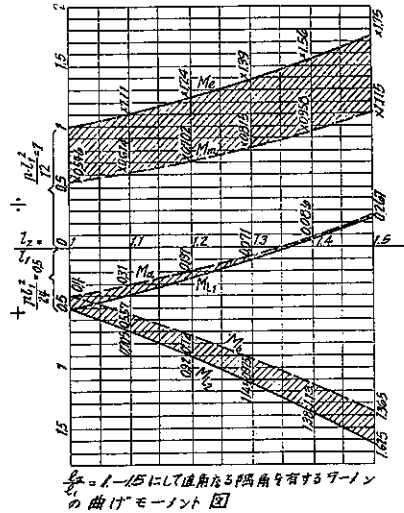
$M$  は  $\varphi = 11^\circ 11'$  に對して零となる。

第 3 圖及び第 4 圖は一つの  $\frac{r}{a}$  の値に對する正方形及び桶状ラーメンのモーメント圖を示すものである。又第 5 圖及び第 6 圖は式 (I) 乃至 (III) 式によるモーメントを短邊  $l_1 = a + 2r$  に對して換算したもので、その用法は圖に明かである。

第 4 圖



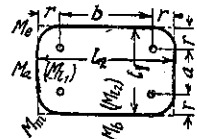
第 5 圖の 1



$\frac{\phi}{2} = 0.1-1.5$  にして適角なる隅角を有するラーメンの曲げモーメント圖

— は直角なる隅角を有する  
ラーメンのモーメント。  
--- は 1/4 圓を隅角に有する  
矩形ラーメンのモーメント。

第 5 圖の 2



$$r = \frac{a}{4} = \frac{l_1}{6}$$

$M_e$  = 隅角のモーメント。

$M_a = M_{l_1}$  = 短邊の中點に於けるモーメント。

$M_b = M_{l_2}$  = 長邊の中點に於けるモーメント。

$M_m$  = 圓弧上の最大のモーメント。

第 6 圖



丸みの半径  $r = 0.15a$  なる正方形ラーメンの曲げモーメント圖

$$l_1 = a + 2r, \quad l_2 = b + 2r.$$

$M_m$  = 圓弧の中點の曲げモーメント。

$M_a = a$  邊の中點のモーメント。

$$l = a + 2r.$$

結語 以上の如き説明及び第 5, 第 6 圖に示す如き例によつて隅角に丸味を有せしめる事の有利な事は明かである。例へば  $r = \frac{a}{4} = \frac{l_1}{6}$  の場合には隅角部の負

の曲げモーメントの減少は、丸味なき直角なる場合に比して 45~36% の低下を示してゐる。

丸味の半径に關しては、その値は相當なるモーメントの減少を得るためには  $a/6 \sim a/3$  (又は  $r = \frac{l_1}{8} \sim \frac{l_1}{5}$ ) の間にある事が望ましい。この場合有效なる斷面積を著しく減少する事のない様にすべき事は勿論であつて、半径の選擇が正鵠を得てゐるならば大體 1.3~3.4% の範圍内である。これを要するに構造學的見地から又靜力學的にも水槽、炭庫の如き構造物に在つては鋭い隅角は須らく之を緩和し、且適當なる半径による丸味を附する事が好ましい。

(糸川一郎 抄譯)

### 1934 年中に於けるドイツ國有鐵道の橋梁工事

(G. Schaper, „Der Brückenbau und der Ingenieurhochbau der Deutschen Reichsbahn im Jahre 1934,“ Die Bautechnik, 1935, Jan.-4, -18, Feb.-8.)

1934 年にはドイツ國有鐵道内橋梁及び建造物工事に可なり興味深き問題が提供された。それは構造物の大きさに就ては大した事もないが、何れも特殊のものであり、鋼構造方面にも新しく進歩的である點より見てこれら諸問題の解決方法は甚だ注目し得るものである。橋梁の保守方法の改善には最も留意し、橋梁其他建造物工事の現行示方書類の改訂或は増訂も行ひ其の他の諸示方書も尙改訂中である。試験研究方面も懸命にその促進を圖り、實施せる試験の内、大問題で重要なるものは完了する事を得た。又鋼構造物の防錆研究にも大いに注意を拂つた。

銲接耐久強度試験の結果が良好だつたので銲接鋼桁の支間限界を引上げ、支間 52 m の鋼桁を全銲接で製作するに至つた。(後述参照) 又詳細な試験を経て鋼桁の腹板接合は添接板を當てず銲接により接合する事になつた。但し此の際腹板の接合は突縁板の接合の無い位置に置く。

銲接と鉚接の協働作用確認試験は靜力學的にも動力學的にも行つたが、銲接と鉚接は良く協働し、鋼構造物の如く豫め載荷して銲接と鉚接が銲接により補強される様な場合には殊に良く協働する事を示して居る。

### 1934 年中着手、進捗又は竣工せる主要なる橋梁工事

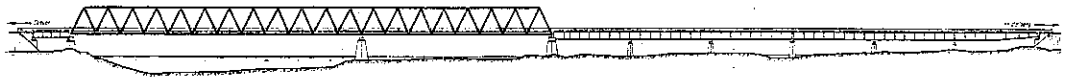
(1) Maxau のライン河道路複線鐵道橋, Karlsruhe 鐵道局管内(第 7 圖) 上部構造は鐵道と道路用に別れ、2 徑間連続ワーレン型直弦鋼構桁で、支間 175.20+116.80 m。基礎工事は既に進捗し、鋼構造は設計完了した。

(2) Speyer のライン河道路・單線鐵道橋, Ludwigshafen 管内(第 8 圖) 上部構造は鐵道と道路に共用し、水流部は支間 163.20+108.80 m の 2 徑間連続ワーレン型直弦鋼構桁、堤外地は支間 6×44.65 m の 3 徑間連続上路鋼板桁。下部構造は水流部中央橋脚迄完成し、鋼桁は工場製作を終り、構桁は設計中である。

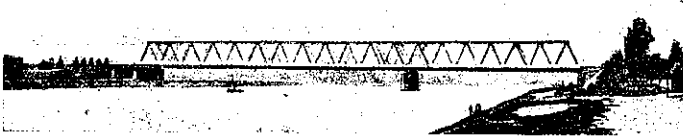
(3) Rügen 堰堤に至る單線鐵道・道路橋, Stettin 管内。上部構造は鐵道と道路用に分離されてゐる。

a) Stralsund・Dänholm 島間 Ziegelgraben 橋梁(第 9 圖): 支間 52 m 鋼板桁 2 列の固定徑間 2 連と鐵道及び道路に 1 連宛支間 29 m 鋼板桁の跳開橋式可動徑間より成り、下部構造は竣工し固定徑間の架設中である。このうち鐵道橋用の桁は特色を有し、全銲接で支間 52 m なるに至つては恐らく世界最大の鐵道橋用銲接桁であらう。腹板接合は前述の如く單に銲合銲接に依り添接板を用ひない。又腹板に直接銲接せる突縁板は長さ 53 m に渡り連續して繼目無く、ドイツの優秀なる軋壓技術を示してゐる。桁は全部工場で銲接し、それには是を軌道上を廻轉する 4 枚の圓板に架渡して(第 10 圖) 常に水平位置で銲接し得る様桁の廻轉を容易ならしめ、銲接終れる桁は 1 枚宛特殊の車(第 11, 12 圖) に積み、鐵道を特殊運轉して Dortmund から Stralsund に運び、この港で 2 艘の船に乗るクレーン 2 臺(第 13 圖)により一方の船に取

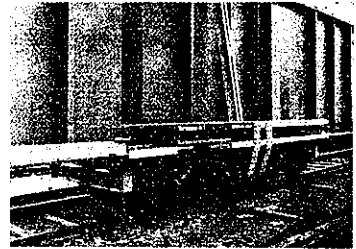
第 8 圖 Speyer のライン河橋梁



第 7 圖 Maxau のライン河橋梁



第 12 圖 桁輸送用特殊車

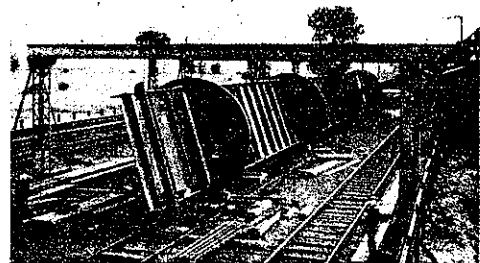
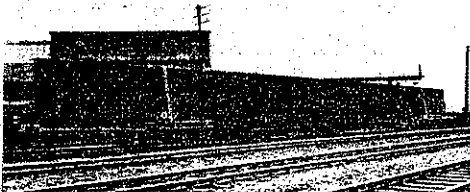


第 9 圖 Ziegelgraben 橋梁

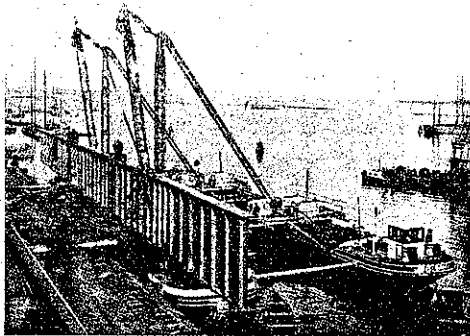


第 10 圖 桁の工場鋸接

第 11 圖 特殊車 2 輛に積載せる鋸接済の桁



第 13 圖 クレーン 2 臺による桁の輸送船積取



第 14 圖 桁の据付



第 15 圖 Strela 海 峽 橋



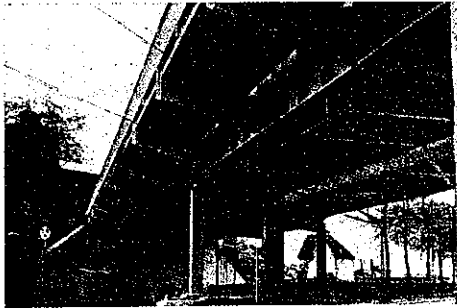
つて現場へ曳船し、再びクレーンによつて是を橋脚と橋臺上に卸した(第14圖)。

b) Dänholm 島・Rügen 間 Strela 海峽橋(第15圖): 10 徑間へ 5 徑間宛連続の鋼板桁を架けたもので、中央橋脚上方で伸縮接合があり、橋脚中の 2 基

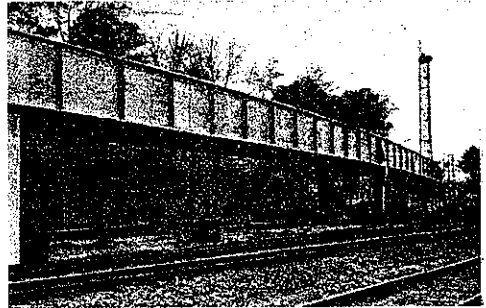
をマッシュヴに築き上げて固定支承を据える(第15圖参照)。其の他の橋脚は低くして其の間に兩端鉸の鋼短柱を入れ上部構造を支へ、橋臺上には普通の可動支承がある。上部構造は古都 Stralsund の秀麗なる風景と海上の美観を考慮して簡單素朴を旨とした。目下



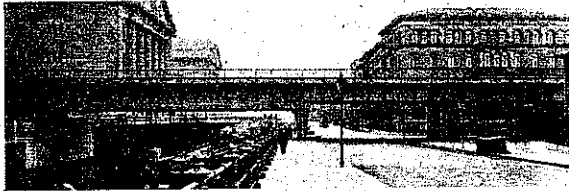
第 16 圖 Mainz-Süd 立體交叉



第 17 圖 Mainz-Worms 線の道路乗越橋梁



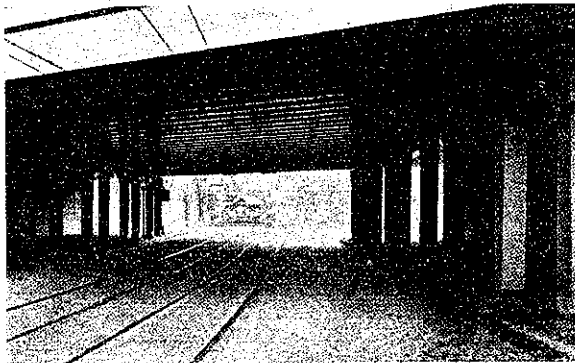
第 18 圖 ベルリン市街線 Kupfer 濠及び Kupfer 濠街乗越橋梁



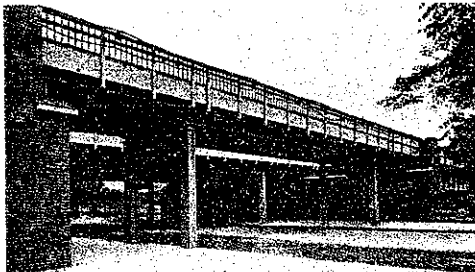
第 24 圖 Dresden の Werder-Beust 街下げ越し



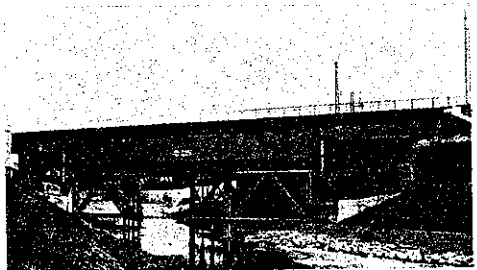
第 21 圖 Düsseldorf の Eller 街下げ越し



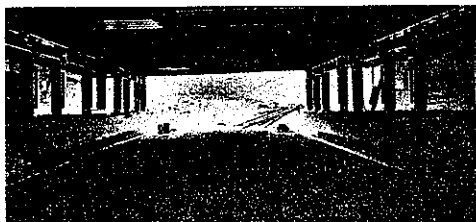
第 19 圖 ベルリン市街線 Wilhelmsufer 街架道橋



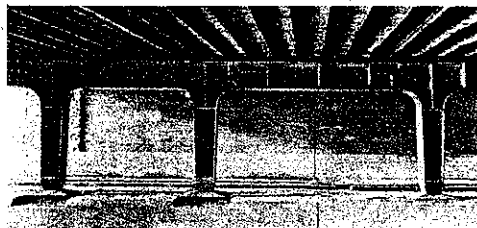
第 20 圖 Wertach 河橋梁



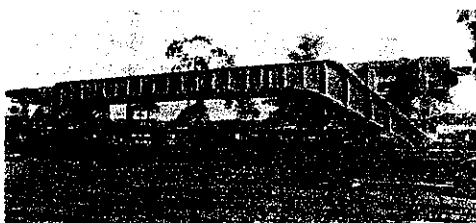
第 22 圖 Hannover の Sand 街下げ越し



第 23 圖 Sand 街下げ越しラーメン橋脚



第 25 圖 貨車積せる Erkrather 街下げ越し用ラーメン



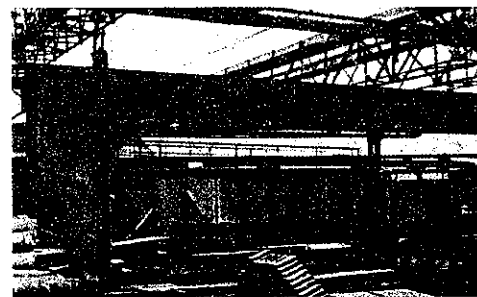
第 26 圖 Erkrather 街下げ越し



第 27 圖 Köln・Düsseldorf 間地方道下げ越し



第 28 圖 Duisburg 驛構内地下道用新鋸接ラーメン



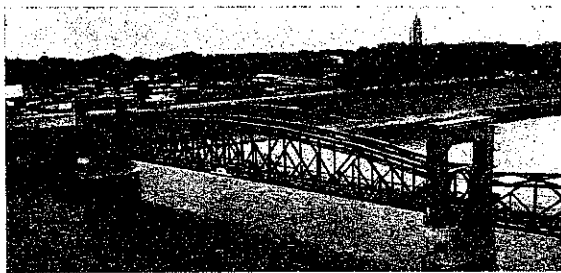
第 29 圖 Duisburg 驛構内地下道蓋鋸接ラーメン



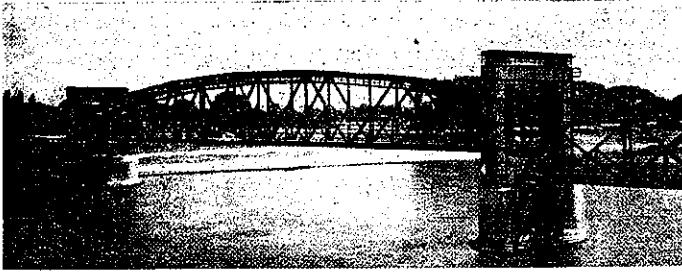
第 30 圖 Podejuch の Große Reglitz 河橋梁



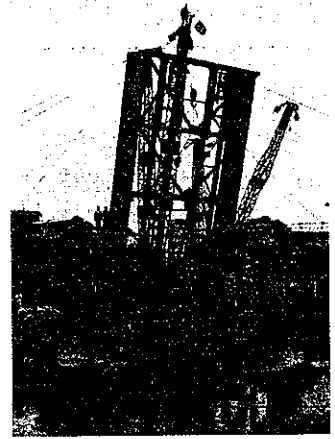
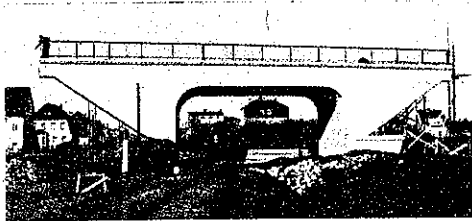
第 31 圖 Magdeburg 昇開橋（低下時）



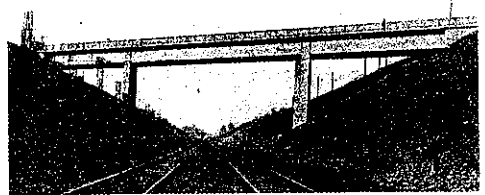
第 32 圖 Magdeburg 昇開橋 (上昇時)



第 33 圖 Spoy運河跳上橋

第 34 圖 Scheune-Altdamm 連絡線の地方  
鐵道乗越し

第 35 圖 Niederau の跨線道路橋



橋脚及び橋臺基礎は施工中、桁は設計済である。

(4) Bischofsheim—Mainz 線の Mainz-Süd 立體交叉, Mainz 管内 (第 16 圖): 上部構造は單線式全銲接 3 徑間連續銲桁で支間 19.39+33.24 m, 片側に突桁式公衆用歩道を附する。橋脚は兩端鉸の銲接・鋼柱である。

(5) Mainz—Worms 線の Worms·Mainz 路線乗越し橋梁, Mainz 管内 (第 17 圖): 上部構造は線路の曲線通り彎曲せる單線式銲接鋼銲桁で 3 徑間連續である。支間は 35.75+38.50+35.75 m に達し、橋脚は上下端鉸の銲接せる橋門構型である。

(6) ベルリン市街線の Kupfer 濠及び Kupfer 濠街乗越し橋梁, Berlin 管内 (第 18 圖): 上部構造は單線式鋼銲桁 4 列より成り、水上部主桁は支間 32 m, 其の街路端は橋門構型鋼脚と連續して歩道に乗り、街上部主桁は此の鋼脚上の鉸に依り一端を支へられ、他端は橋臺上に、中間では上下端鉸の橋門構型鋼脚に支へられ、此處に主桁にも鉸を挿入した。桁の形や下端の高さは支間と現場の條件から定められた。

(7) 市街線の Wilhelmsufer 街乗越し, Berlin 管内 (第 19 圖): 單線式鋼銲桁 4 列より成り、上下端

鉸の橋門構型橋脚 3 基を有し、側徑間には鉸が入つてゐる。支間は 5.7+16.0+5.7 m, ベルリンの新式架道橋の代表的タイプである。

(8) Augsburg の Wertach 川橋梁, Augsburg 管内 (第 20 圖): 7 線に支間 40 m の銲桁 7 連を架け、橋門構型橋脚と連續し、一脚は可動支承に乗る。側徑間の桁は支間 9.5~12.5 m で橋臺と前記橋脚に支持される。

(9) Düsseldorf 驛構内 Eller 街下げ越し, Wuppertal 管内 (第 21 圖): 桁は支間 7.24+15.63+7.24 m なる 3 徑間連續とし銲接してコンクリートに埋込み、橋脚は銲接ラーメンである。突縁の下面はコンクリートで被覆せずペイント塗とした。上下端鉸のラーメンは形甚だ美しく此の立體交叉全體の感じも甚だ効果的である。

(10) Hannover の Sand 街下げ越し, Hannover 管内 (第 22, 23 圖): 支間 4.37+12.56+4.37 m にし

て(9)に記せると全く同様の構造物である。上下端鉸・鉸接ラーメンの構成は第23圖に見る如く、ラーメン1枚置きに繋ぎの桁を吊込み鉸状に支へる。

(11) DresdenのWerder-Beust街下げ越し、Dresden管内(第24圖): 密接せる3徑間連続鉸接鉸桁をコンクリートで被覆し、支間は5.71+12.48+5.71 m。新設部分の橋脚は鉸接せる両端鉸・支柱であるが、鑄鐵製の裝飾付舊支柱に比し其の美しく落付いた姿は注目す可きである。

(12) Düsseldorf・Duisburg間0.70 kmのEckrather街下げ越し、Wuppertal管内(第25, 26圖): 上部構造は支間21.20 m全鉸接2鉸ラーメンで、第25圖は工場鉸接を終り貨車積せるを示し、第26圖は竣工を示す。

(13) Köln・Düsseldorf間26.3 kmの地方道下げ越し、Wuppertal管内(第27圖): 支間37.80 m鉸接2鉸ラーメン、複線で且甚だしい斜角をなす。

(14) Duisburg驛構内地下道、Essen管内(第28, 29圖): 廣大なる地下道で支間18 m 2鉸ラーメンを架け、其の製作には長期間を要した。此の2鉸ラーメンを見ても現今如何に橋梁工事が大進歩したかと云ふことが判る。即ち舊部分の鉸接ラーメン(第28圖)1連の重量19.4 tonに對し新設部分の鉸接ラーメン(第29圖)は1連14.3 tonに過ぎず、従つて鉸接法を採用せる結果は25%の重量節約となり、工費に於ても殆んど同程度の節約を行つた。加之鉸接ラーメンの方は美的方面からみても一層優れてゐる。

(15) PodejuchのGroße Reglitz河橋梁、Stettin管内(第30圖): 新設せるは單線式鉸接直弦構桁3連(圖の前方のもの)で支間3×73.80 m。その背後に曲弦構桁の舊上部構造が見える。

(16) Elbbahnhof・Biederitz間MagdeburgのElbe河昇開橋、Hannover管内(第31, 32圖): 上部構造は支間90 m單線式截端型拋物線形構桁で昇程は2.80 m、平水位では昇開の要なく、洪水時に昇開して列車通過時のみ低下する。

(17) Cleve驛附近のSpoy運河跳上橋、Köln管内(第33圖): 單線式旋開橋2連が破損したので複線式跳上橋と換へた。支間14.25 mである。

(18) Seheune—Altdamm貨物連絡線新設區間(點176+27.1)に於ける複線式鐵筋コンクリート・ラーメン跨線鐵道橋、Stettin管内(第34圖): 支間13.20 m。

(19) Leipzig・Dresden間92.977 km, Niederauの跨線道路橋、Dresden管内(第35圖): 3徑間連続鐵筋コンクリート桁橋で橋脚は彈性的廻轉可能の鐵筋コンクリート柱である。支間は22.8+38.6+22.6 m。

鋼材使用量 1934年には鋼材St 37を橋梁に30 041 t、建造物に9 966 t, St 52を橋梁に3 582 tを使用した。

(小松政夫 抄譯)

### 圓孔を有する廣頂堰の溢流に就て

Dog.-Ing. S. A. Jegorow. Moskau, "Überfall über breite Wehrkrone mit kreisöffnung"  
Wasserkraft und Wasserwirtschaft  
1. Feb. 1935 S. 31—S. 34.

廣頂堰の溢流理論を應用すると、堰堤の流出孔、又は一般の鐵道、或ひは街路の下を通り、且つ自由水面を有する短い暗渠の流出關係を計算する事が出来る。斯くの如き流出口、特に鐵道の暗渠は多く圓形斷面を有し、規格化されたコンクリート又は鐵筋コンクリート管が一般に廣く利用されてゐるのである。

併し矩形斷面を有する者の流出關係は已に知られてゐるが圓形斷面を有するもの對しては流量、勾配に依つて管徑とか、管内水深を決定する如き理論的公式は未だ無く、又公式に必要な流速係數、損失係數も未知の状態である。(R. Weyrauch-A. Strobel. Hydraulisches. Rech. St. 1930 S. 25 und 185 參照) A. Staus氏の研究結果も銳縁圓孔の流出に就てであつて、是を廣頂堰圓孔の場合に適用する事は出来ない。故に著者の方法を次に述べんとするものである。

廣頂堰圓孔の不完全流出に就ては、一般にベルヌウイの定理に依り、誘導した次の公式で計算出来る。

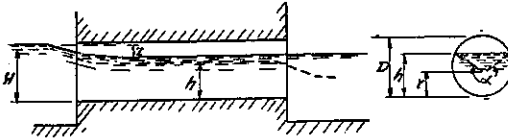
$$Q = \varphi \omega \sqrt{2gz}$$

式中  $\omega$  : 弓形面積なる水路断面  $= D^2(\alpha - \sin \alpha)/8$ .

$$\text{故に } Q = \varphi \frac{D^2}{8} (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{2gz} \dots\dots\dots (1)$$

$\varphi$  は流速係数, 他の記號は第 36 圖参照。

第 36 圖 廣頂堰圓孔の不完全溢流圖



次に述べる完全流出の場合と云ふのは流量も, 流水の形も一定で, 殊に下流水位からの堰上水深は一定の水深を保つて, 流れる場合で, 換言せばこの堰上水深は, 流出口を流れる流量が最大となる如き水深に等しかるべきである。

この水深を限界水深と云ふ。是は又勢力の最小の場合と云つてもよく, この限界は常流と射流との限界なのである。

さて, 上述の (1) 式を次の如く書き換へる。

$$Q = \varphi \frac{D^2}{8} (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{2g(H-h)}$$

式中  $h$  は堰上水深, 是は次の如く, 中心角  $\alpha$  の函数で表はせる。

$$h = \frac{D}{2} (1 - \cos \alpha) \dots\dots\dots (2)$$

こゝに於て (2) 式は中心角  $\alpha$  が  $0^\circ$  から  $360^\circ$ , 即ち  $2\pi$  迄變化する事に依り  $h < D/2$  から  $h > D/2$  となる。(2) 式を利用して, 流量  $Q$  を次の如く中心角の函数として表す。

$$Q = \varphi \frac{D^2}{8} (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{2g \left[ H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2}) \right]}$$

又は

$$Q = \left[ \varphi \frac{D^2}{8} \sqrt{2g} \right] \left[ (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})} \right]$$

式中  $\varphi, D, g$  は常数, 故に與へられたる水頭  $H$  に於ける最大流量  $Q$  を流す如き  $\alpha$  を求める爲に, 後の式の右邊第 2 番目の括弧内を  $\alpha$  に就き微分し是を零とす。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left[ (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})} \right] \\ &= (\alpha - \sin \alpha) \frac{d}{d\alpha} \sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})} \\ &+ \sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})} \frac{d}{d\alpha} (\alpha - \sin \alpha) \\ &= (\alpha - \sin \alpha) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})}} \\ &\times \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\sin \frac{\alpha}{2}) + \sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})} \\ &\times (1 - \cos \alpha) = 0 \end{aligned}$$

是を書き換へて

$$\begin{aligned} & \frac{D}{8} (\alpha - \sin \alpha) \frac{\sin \frac{D}{2}}{\sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})}} \\ &= (1 - \cos \alpha) \sqrt{H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2})}; \\ & H - \frac{D}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2}) = \frac{D}{8} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}; \\ & H = \frac{D}{2} (1 - \cos \alpha) + \frac{D}{8} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

是に (2) 式を代入する。

$$H = h + \frac{D}{8} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \dots\dots\dots (3)$$

従つて堰上限界水深は次の如くである。

$$h = H - \frac{D}{8} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \dots\dots\dots (4)$$

故に圓孔を有する廣頂堰の完全流出の場合の流量は,

$$\begin{aligned} Q &= \varphi \frac{D^2}{8} (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{2g} \\ &\times \left[ H - H + \frac{D}{8} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{16} \varphi D^{5/2} (\alpha - \sin \alpha) \sqrt{g \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

又は

$$Q = \frac{1}{16} \varphi D^{5/2} (\alpha - \sin \alpha)^{3/2} \sqrt{\frac{g \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha}} \dots\dots (5)$$

一方に於て (2), (3), (5) 式から, 管徑  $D$ , 流速係数  $\varphi$  を與へると中心角  $\alpha$  で表はせる圓孔の或水位の時の堰上水深  $h$ , 水頭  $H$ , 流量  $Q$  が計算出来る。

式中注意を要するのは(3)式にて、流速係数  $\varphi$  が無い事である。従つて、この式で計算した  $H$  は流出水路に何等の抵抗なき時と一致するもので、実際には水頭  $H$  はそれより多少大きな値を與へる。第1表は(2), (3), (5)式を使ふ便宜の爲に表はしたもので、是は各種の中心角  $\alpha$  に對する  $h/D, H/D, Q/\varphi D^{3/2}$ , 即ち管徑 1m, 流速係数 1 に關する  $h, H, Q$  の値である。是の表は(2), (3), (5)式により計算したもので是を利用すると或管徑と或流速係数に相當する  $h, H, D$  を容易に算出出来る。第1表を圖で表はしたものが第37圖の曲線である。

次に(1), (2), (3), (5)式は夫々相當複雑であるから、簡単な近似的公式を考へて見る。上述の理論的公式の複雑さは、主に中心角  $\alpha$  の函数である、斷面積  $\omega$  及び水深に依るものであるから、式を簡單にする爲には式中より  $\alpha$  を追ひ出さねばならぬ。

従つて、弓形面積を次の如く、極く簡単な式で與へる。

$$\omega = \frac{\pi Dh}{4} \dots \dots \dots (6)$$

是の式で計算すると第2表の如き誤差を生ずる。然し、勾配の無い、圓形の堰堤流出孔、鐵道暗渠は  $0.5D$  より小さな場合の水位を計算する事は少い。従つて表で見る通り、 $\omega$  の計算誤差は  $h$  が  $0.5D$  から  $D$  の間では7%を越す事は無いし、又管内水面は波打つて正確なる水位測定は不可能であるから、斷面積計算の場合7~10%以上の正確さを望む事は意味無き事と考へる。又管内水深  $h$  を計算する時には近似式による計算誤差は  $h$  に對しては4~6%となり、

十分差支へ無いものと考へる。

(6)式を利用すると不完全流出の場合の流量は次の如く簡単な式で與へられる。

$$Q = \varphi \frac{\pi}{4} Dh \sqrt{2gz} \dots \dots \dots (7)$$

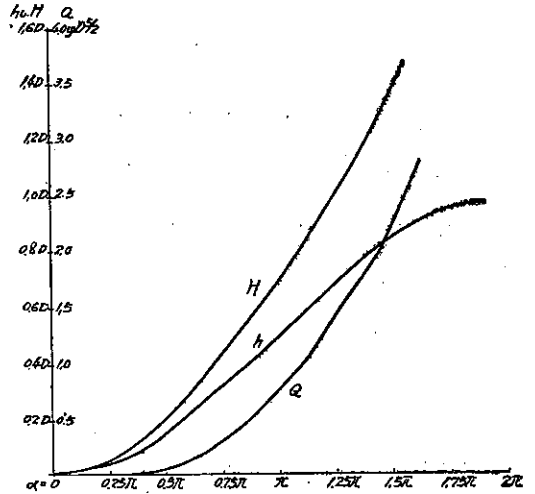
又完全流出の場合の計算も、前と同様に流量最大となる水深を求める事に依つて誘導出来る。即ち

$$Q = \varphi \frac{\pi}{4} Dh \sqrt{2g(H-h)} = \varphi \frac{\pi}{4} D \sqrt{2g} (H-h)^{\frac{1}{2}} h$$

第 1 表

度	$\alpha$		$\frac{h}{D}$	$\frac{H}{D}$	$\frac{Q}{\varphi D^{3/2}}$	Q-9式、 $\varphi=1, D=1m$ H-第4欄	h-8式、 $\varphi=1, D=1m$ H-第4欄
	$\pi-\alpha$	$\alpha$					
1	2	3	4	5	6	7	
22.5	0.125	0.019	0.022	0.0003	0.0065	0.016	
45.0	0.250	0.038	0.051	0.005	0.015	0.034	
67.5	0.375	0.085	0.114	0.024	0.050	0.076	
90.0	0.500	0.146	0.197	0.071	0.11	0.131	
112.5	0.625	0.222	0.300	0.16	0.22	0.200	
135.0	0.750	0.309	0.427	0.32	0.37	0.274	
157.5	0.875	0.402	0.555	0.51	0.56	0.370	
180.0	1.000	0.500	0.697	0.77	0.78	0.464	
202.5	1.125	0.598	0.867	1.08	1.05	0.564	
225.0	1.250	0.691	1.065	1.44	1.35	0.670	
247.5	1.375	0.778	1.173	1.82	1.71	0.782	
270.0	1.500	0.854	1.354	2.24	2.13	0.902	
292.5	1.625	0.915	1.594	2.76	2.70	1.052	
315.0	1.750	0.962	1.975	3.47	3.73	-	
337.5	1.875	0.981	2.993	4.94	6.94	-	
360.0	2.000	1.000	$1 + \frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	-	-	

第 37 圖 第 36 圖の場合の流出關係



第 2 表

$h/D$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6式による 斷面	0.314	0.629	0.944	1.257	1.571	1.885	2.700	2.514	2.850	3.142
實際の斷面	0.163	0.668	0.724	1.175	1.571	1.967	2.348	2.694	2.979	3.142
差	0.151	0.161	0.150	0.082	0	-0.082	-0.160	-0.180	-1.149	0
誤差%	32.7	24.4	19.9	7.0	0	4.2	6.3	6.7	5.0	0

$$\frac{dQ}{dh} = \varphi \frac{\pi}{4} D \sqrt{2g} \left[ \sqrt{H-h} - 1/2 h \frac{1}{H-h} \right] = 0$$

式中  $\varphi, D, g$  は常數で且零で無いから  $H-h=1/2 h$  となる。

即ち  $h = 2/3 H \dots\dots\dots(8)$

この場合の流量  $Q$  は次の如くなる。

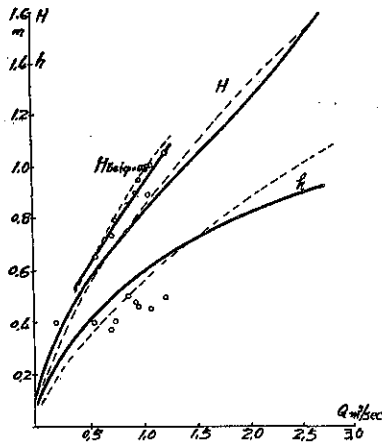
$Q = \varphi \frac{\pi}{4} D \frac{2}{3} H \sqrt{2g(H - 2/3 H)}$

又は

$Q = 0.385 \varphi \frac{\pi}{4} D H \sqrt{2gH} \dots\dots\dots(9)$

此の式は一般に知られてゐる矩形断面の流量公式と似てゐる。即ち  $Q = 0.385 \varphi b H \sqrt{2gH}$  と (8), (9) 式が、どの位正確であるかを確かめる爲に、夫れによる水深  $h$ , 流量  $Q$  を第 1 表に挙げた。是等は第 1 表の第 4 欄の  $H$  を用ひ、 $D=1m$ ,  $\varphi=1$  と假定して、(8), (9) 式によつて計算したものである。第 38 圖はこの計算結果から、 $H$  及び  $h$  を  $Q$  の函数として表はした曲線で、實線は第 1 表 3, 4, 5 欄を表はし、點線は近似式

第 38 圖  $HQ$  關係



(4), (6), (7) 式により計算したものである。

この曲線で見ると、 $Q$  と  $H$  の曲線は (5) 式と (9) 式と殆ど實質的に等しいが、 $Q$  と  $h$  との關係に就ては近似式 (8) と理論公式 (4) とでは相當の差違がある。著者は 1933 年の夏モスコウ土木試験所の水理實驗室にて鐵道線路下の圓形暗渠の水理實驗を行つた。暗渠の模型は徑 19 cm, 長さ 1.9 m, 勾配は 0.01, 水平、鉛直の場合、又水流の方向に直角な側壁を作り、管底は流入流出兩方面の底と等高にし、且つ實驗には最大 20 l/秒迄の流量の場合に就いて行つた。第 38 圖の

點は、この時の實驗結果を表はす。勿論此等の點はフラウド (Fraude 英) の相似率に依つて管徑 1 m, 長さ 10 m の場合に換算して挙げたものである。圖中  $h$  と  $Q$  との關係を表はす點は一部分では理論曲線に非常に近い、従つてこの部分では正しいと思はれるが、然し、一部では不規則になつてゐる。後者の状態は管内水面が波動して、従つて水深  $h$  が變化し易くなる事に原因するものである。

第 (4) 式に依る理論曲線は圖で示す様に、實驗値を包含するから管内の水位を計算する時は、この式を使用すれば、一般に信用すべき結果を得る。この場合近似式 (8) は略算を行ふ時に使用するのが良いと思ふ。

$H$  と  $Q$  との關係に關しては、實驗値はかなり規則正しく、理論公式を使つて、 $\varphi=1$  として計算した曲線と僅か高い位置にあるだけである。然し  $\varphi=0.8$  で計算すると (5) 式の理論公式を使用の場合も、(9) 式なる近似式を使用する場合も計算曲線と實驗値と非常に良く合致してゐる。故に兩式共實用計算に十分正しく應用出来ると思ふ。

流速係數  $\varphi$  に関しては、0.8 と云ふ値は、上の實驗の場合の、或るコンクリート管の場合であつて、その他の場合即ち、他の管徑、長さ、又は他の勾配、異つた管形、或ひは流入、流出方向の床より管底が違つてゐる場合等には決して使用してはいけないもので、長い管になると流速係數は非常に管の粗度に關係して來る、同様に不完全流出の場合の流速係數も他の値を持つ譯である。

従つて著者は、他の上に挙げた場合等の流速係數の決定には特別の水理實驗を行ふ事を希望して止まない次第である。 (中路誠三 抄譯)

### 水路の漏水

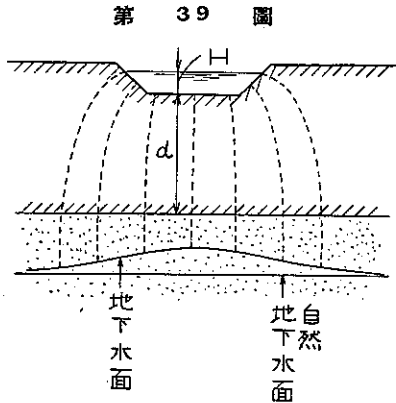
(V. V. Wedernikow; "Versickerungen aus Kanälen," Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1934, Juni-2, -16, Juli-2, S. 128-130, 137-140, 149-152.)

第 39 圖の如く水路のある地盤の下方に滲透性の大

なる含水層の存する場合の上の地盤内に於ける地下水流の状態を考へる。地下水面が2つの層の境界面以下になる爲には大體次の條件を満足すればよい。

$$d \geq \frac{k_1}{k_2 - k_1} H$$

$k_1$  及び  $k_2$  はこの境界面上及び下の地層の滲透係数である。

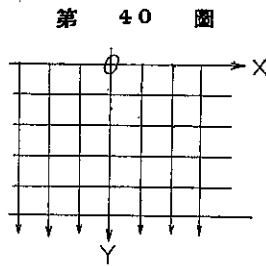


第 39 圖

先づ上の地盤の深さ  $d$  が無限大なる場合を考へれば、無限の深さに於ては速度は鉛直にて  $v=k$ 、壓力水頭は  $-y$  である。従つてその時の速度ポテンシャルを  $\phi = kY$ 、流函数を  $\psi = -kX$  にて表はせば

$$W = \phi + i\psi = k(Y - iX) \dots\dots\dots(1)$$

之は第40圖の如き鉛直下向きのポテンシャル流を表はすものであるが、一般の場合には之と他の或る函数の表はす流れを組み合わせたものと考へる事が出来る。従つて



第 40 圖

$$z - i \frac{W}{k} = \theta \dots\dots\dots(2)$$

と書けば  $\theta = \theta_1 + i\theta_2 = x - X + i(y - Y)$

一般の場合には更に常数を加へて

$$\theta_1 = x - X + a, \quad \theta_2 = y - Y + b \dots\dots\dots(3)$$

と書き境界条件より常数を決定して  $z$  面内の流れの状態を知るのである。

第1の例として三角形断面の水路よりの漏水を考へる。 $\theta$  面にては水路断面が半圓形にて之より放射状に滲透するものとすれば

$$\phi + i\psi = -c \ln \left( \frac{\theta_1 + i\theta_2}{c_1} \right) \dots\dots\dots(4)$$

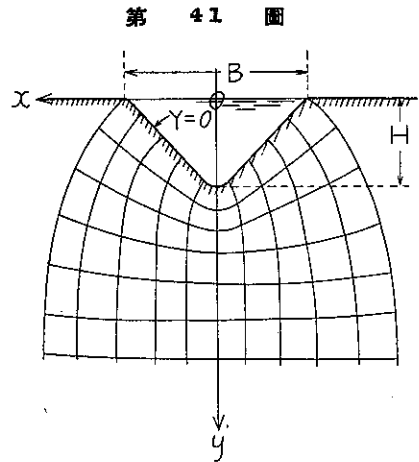
之に (3) 式を代入して實部と虚部に分ければ

$$\left. \begin{aligned} x - X + a &= c_1 e^{-\frac{k}{c} Y} \cos \frac{k}{c} X \\ y - Y + b &= c_1 e^{-\frac{k}{c} Y} \sin \frac{k}{c} X \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

次に自由水面にては  $\theta_2 = 0$  なる事及び断面全體よりの滲水量が  $Q = k(B + 2H)$  なる事 (Kozeny による) を條件として常数を定めれば

$$\left. \begin{aligned} x &= X + H e^{-\frac{\pi}{B+2H} Y} \cos \left( \frac{\pi}{B+2H} X \right) - \frac{B+2H}{2} \\ y &= Y + H e^{-\frac{\pi}{B+2H} Y} \sin \left( \frac{\pi}{B+2H} X \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

之は第41圖の如く  $Y=0$  の曲線が  $Z$  面上にてほぼ三角形に近くなるのであつて正確なる三角形断面の場合



第 41 圖

の解ではない。滲透速度は

$$v = \frac{d\phi}{ds} = k \frac{dY}{ds} = \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2}}$$

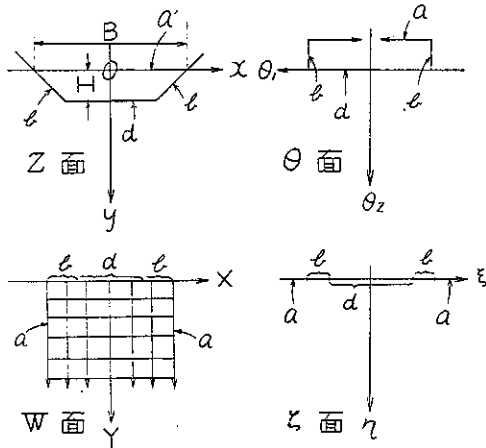
$$\therefore v = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi H}{B+2H}\right)^2 - \frac{2\pi H}{B+2H} \sin\left(\frac{\pi}{B+2H} X\right)}} \dots\dots\dots(7)$$



次に第2の例として梯形断面の水路を考へる。この場合兩斜面は  $x-X=\text{const.}$  であるから  $\theta$  面上には1つの矩形の断面を考へる。即ち

$$\theta_1 = x - X, \quad \theta_2 = y - Y - H$$

第 42 圖



漏水の總量を  $Q$ , 地盤の滲透係数を  $k_f$  (楕圓函數の moduli と區別する爲に  $f$  を附す) とすれば  $y=H$  の線分は  $\theta_1 = x - X = \frac{B}{2} - \frac{Q}{2k_f}$  より  $\theta_1 = x - X = -\left(\frac{B}{2} - \frac{Q}{2k_f}\right)$  までの間であつて  $\theta_2 = y - Y - H = 0$  である。之は兩斜面及び底面にて  $Y=0$  なる事より明かである。 $\theta$  面の矩形を Schwarz-Christoffel の定理によつて  $\zeta$  面の半面に寫像するのであるが矩形の4隅の點は

1.  $x = \pm \frac{B}{2}, y = 0; \theta_1 = \pm \left(\frac{B}{2} - \frac{Q}{2k_f}\right), \theta_2 = -H$   
 $\xi = \pm 1, \eta = 0$
2.  $x = \pm \frac{b}{2}, (b \text{ は底の幅}), y = H; \theta_1 = \pm \left(\frac{B}{2} - \frac{Q}{2k_f}\right), \theta_2 = 0; \xi = \pm k, \eta = 0$

従つて寫像函數は次の如き第1種楕圓函數となる。

$$x - X + i(y - Y - H) = A \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-k)(\zeta+1)(\zeta+k)}}$$

$$= A \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-k^2)}} \dots\dots\dots (8)$$

然し  $W$  面より  $\zeta$  面への寫像を考へれば  $\xi = \pm 1, \eta = 0$  の點は  $W$  面にては  $X = \pm \frac{Q}{2k_f}, Y = 0$  であり,  $\xi = \pm \infty, \eta = 0$  の點は  $X = \pm \frac{Q}{2k_f}, Y = +\infty$  であるから

$$X + iY = C \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi+1)}} = q \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = q \arcsin \xi \dots\dots\dots (9)$$

又は

$$\xi = \xi + i\eta = \sin \frac{X}{q} \cosh \frac{Y}{q} + i \cos \frac{X}{q} \sinh \frac{Y}{q} \dots\dots\dots (10)$$

但し  $q = Q/\pi k_f$  である。(8)式に於て  $z = \zeta/k$  とおけば

$$x - X + i(y - Y - H) = D \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\sqrt{1-k^2z^2}}} \dots\dots\dots (11)$$

$\xi = k$  の點は底面的一端であるから斜面の勾配を  $m$  とすれば  $x = \frac{b}{2} = \frac{B}{2} - mH$  である。従つてこの點 ( $\xi = k, \eta = 1$ ) に對して (10) 及び (11) 式を計算すれば

$$\frac{B}{2} - mH - \frac{Q}{\pi k_f} \arcsin k = DK \dots\dots\dots (12)$$

$K$  は第1種楕圓函數 (moduli  $k$ ) である。 $\xi = 1, \eta = 1/k$  の點に對しては (10) 及び (11) 式より

$$\frac{B}{2} - \frac{Q}{2k_f} - iH = DK + iDK_1 \dots\dots\dots (13)$$

$K_1$  は moduli  $k_1 = \sqrt{1-k^2}$  の第1種楕圓函數である。(13) 式より

$$D = -H/K_1, \quad Q = k_f \left( B + 2H \frac{K}{K_1} \right)$$

又は (12) 式より断面全體よりの漏水量  $Q$  と moduli  $k$  との関係式として次の形を得る。

$$Q = \frac{\pi m H k_f}{2 - \arcsin k} \dots\dots\dots (14)$$

(本間 仁 抄譯)