

論 說 報 告

第 20 卷 第 7 號 昭 和 9 年 7 月

不 等 速 定 流 に 關 する 2, 3 の 問 題

准 員 工 學 士 本 間 仁*

Some Problems on the Non-uniform Steady Flow

By Masashi Homma, C. E., Assoc. Member.

内 容 梗 概

不等速定流の中にて現在未だ充分なる解法の存在せぬ様な 2, 3 の問題を、運動及び連続の微分方程式より直接にその性質を推測せんとせるものであつて、更にこれを実際の設計及び計算に當つての参考資料たらしめんと試みた。

1. 運動及び連続方程式

中心線が直線状の開水路に於ける流水の問題を取り扱ふ爲の基本方程式として、J. Boussinesq が諸量の漸變の假定の下に Euler の運動方程式より導入したものは¹⁾²⁾

$$I = \frac{\Gamma^2}{C^2} \frac{w}{A} + \frac{1}{g} \left[\frac{(v^2)_m'}{V} - v_m' \right] \dots \dots \dots (1)$$

茲に用ひた記號は

- I: 水面勾配
- V: 任意断面中の x 方向の平均流速
- C: Chézy の常数, w: 断面の潤邊長, A: 断面積
- v: 断面内の任意の點に於ける x 方向の流速

' を附せるは t に関する微分係数を表はし、尾字 m は断面全體の平均値を表はす。即ち $(v^2)_m'$ はある断面内にて v^2 の値を平均せるものを t にて微分したるもの、 v_m' はその断面にて v の値を平均せるものを t にて微分したるものである。

Boussinesq は (1) 式を變形する爲に

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(\Gamma A)}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

の形の連続方程式を用ひたが、茲には水路壁に沿つて流入又は流出のある場合をも含む様な基本式を導入する爲に水路に直角方向に單位體積當り q' の流入量があるものとして、Boussinesq の用ひた方法に従ひ x, y, z 及び t の連続函数 Φ を考へれば、連続方程式は

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - q' = 0 \dots \dots \dots (3)$$

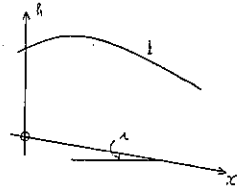
であるから (但し v_x, v_y, v_z は臨時に用ふる記號であつて一つの水分子の x, y, z 方向の分速度を表はす)。

* 内務省土木試験所勤務

¹⁾ J. Boussinesq; "Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux dans les lits rectilignes à grande section" 2^e Partie この内容は次の本に出ている。

²⁾ A. Boulanger; "Hydraulique Générale" Tome Premier p. 300 の (11) 式

第 1 圖



$$\frac{D\Phi}{Dt} = \Phi' = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z\Phi) - q'\Phi \dots\dots\dots (4)$$

開水路の問題に於ては $v_x = v$ となり、流れがほぼ2次元的に考へられる時は v_y 及び v_z は v に比して微小であるから (4) 式を断面全體に亘つて積分すれば

$$\int_A \Phi' dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \Phi dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A v\Phi dA - \int_A q'\Phi dA \dots\dots\dots (5)$$

他の項は總て省略し得る。次に順次に $\Phi = 1, v, v^2$ と置き且 $Aq' = q$ と書けば

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial x} - q = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$Av_m' = \frac{\partial(VA)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_A v^2 dA - qV \dots\dots\dots (7)$$

$$A(v^2)_m' = \frac{\partial}{\partial t} \int_A v^3 dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A v^3 dA - q \int_A \frac{v^2 dA}{A} \dots\dots\dots (8)$$

(6) 式はこの問題に對する連続方程式であつて q は水路の單位長當りの流入量を示す。茲に

$$1 + \eta = \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 \frac{dA}{A}, \quad \alpha = \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 \frac{dA}{A}$$

と置けば η 及び α は定つた断面形に對して常數と見做し得るものである。従つて (7) 及び (8) 式は

$$v_m' = \frac{\partial V}{\partial t} - \eta \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{(1+\eta)}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \eta \frac{qV}{A} \dots\dots\dots (9)$$

$$(v^2)_m' = \frac{\partial}{\partial t} (1+\eta)V^2 + V \frac{\partial(\alpha V^2)}{\partial x} - (\alpha-1-\eta) \frac{V^2}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + (\alpha-1-\eta) \frac{qV^2}{A} \dots\dots\dots (10)$$

(9) 及び (10) 式を (1) 式に代入すれば開水路内の水流に對する基本方程式を得る。即ち

$$I = \frac{V^2}{C^2} \frac{w}{A} + \frac{1}{g} \left[(2\alpha-1-\eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (2\eta+1) \frac{\partial V}{\partial t} - (\alpha-1-2\eta) \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + (\alpha-1-2\eta) \frac{qV}{A} \right] \dots\dots\dots (11)$$

然るに水路の平均幅を b とすれば

$$I = \sin i - \frac{\cos i}{b} \frac{\partial A}{\partial x} \doteq \sin i - \frac{\partial h}{\partial x}$$

但し i は水路床の勾配; h は矩形断面と見做した時の水深

従つて基本方程式は $2\alpha-1-\eta = \alpha'$ と置けば

$$-\sin i + \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{C^2} \frac{w}{A} + \frac{1+2\eta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\alpha-1-2\eta}{g} \left(\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{qV}{A} \right) = 0 \dots\dots\dots \text{運動方程式} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AV)}{\partial x} - q = 0 \dots\dots\dots \text{連続方程式} \dots\dots\dots (13)$$

更に不等速定流に對する方程式は

$$-\sin i + \frac{dh}{dx} + \alpha' \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{C^2} \frac{w}{A} + \frac{\alpha-1-2\eta}{g} \frac{qV}{A} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{d(41')}{dx} - q = 0 \dots\dots\dots(15)$$

この場合は x 方向に於ける諸量の變化の小さいことを假定してゐるが Boussinesq は鉛直分速度を考慮した場合の式をも導いてゐる。¹⁾ これに對しても q の存在する時の形に改める事が出来る筈であるが茲にはその點にまで及ばぬ事とする。

以下に述べる問題に於て常に用ふる假定は斷面形がほぼ廣矩形なることであつてこの場合は

$$\alpha \doteq 1.058, \quad \eta \doteq 0.020$$

であるから $\alpha - 1 - 2\eta \doteq 0$ である。而して (12) 式又は (14) 式の最後の項にて $\alpha - 1 - 2\eta$ に乘すべき部分は他の諸項に比して特に大なる次數の値を持つものではないからこれ等の最後の項は何れも省略しても差支へない。即ち流入量 q の有無に拘らず同じ運動方程式が成立するものと考へてもよい。かくすれば (14) 式は

$$-i + \frac{dh}{dx} + \alpha' \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{C^2 h} = 0 \dots\dots\dots(15)$$

2. 幅の變化する開水路に於ける不等速定流 (その 1)

初めは $q=0$ の場合を考へ、尙一般に用ふる記號に従ひ平均流速 V を v と書くこととする。これまで v を以て表はされた事項は今後は現はれる事がない。

水路の形状として先づ次の如きものを考へる。

$$i = i_0 = \text{const.}, \quad b = b_0 + b_1 e^{pv} \quad (p > 0)$$

b の變り方は任意であるが便宜上先づ上流に向つて漸近的に一樣幅に近付く場合を考へる事とした。連續方程式は

$$\frac{1}{b} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

であるが更に一つの條件として

$$Q = hbv = \text{const.} \dots\dots\dots(17)$$

とし、この Q の値を與へる。これは一つの限界條件を與へた事と同じである。(16) 式を (15) 式に代入すれば

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_0 - \frac{v^2}{C^2 h} + \frac{\alpha' v^2}{gb} \frac{db}{dx}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{gh^3 b^2}} = \frac{i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{gh^2 b^3} \frac{db}{dx}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{gh^3 b^2}} \dots\dots\dots(18)$$

$\frac{db}{dx}$ は既知量であつてこの場合は $pb_1 e^{pv}$ である。(18) なる微分方程式は積分不能の形であるが、ある斷面に於ける h の値を知れば

$$\left. \begin{aligned} \Delta h &= \Delta x \frac{i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{gh^2 b^3} \frac{db}{dx}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{gh^3 b^2}} = \Delta x \cdot f(x, h) \\ \text{又は} \quad \Delta h &= \Delta x \frac{i_0 - \frac{v^2}{C^2 h} + \frac{\alpha' v^2}{gb} \frac{db}{dx}}{1 - \left(\frac{hv}{h} \right)^2} = \Delta x \cdot f(x, h, v) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

1). J. Boussinesq; "Essai sur la théorie des eaux courantes" p. 178 以下

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } v &= \frac{Q}{hb}, & h_c &= \sqrt[3]{\frac{\alpha' Q^2}{gb^2}} \end{aligned} \right\}$$

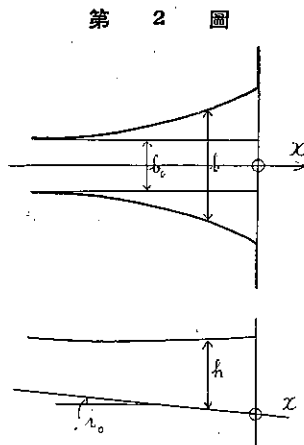
として dx に對する dh を計算し、 $x+dx$ に於ける h の値を $h+dh$ として順次に各斷面に於ける h を計算し得る。然し斷面の變化がやゝ甚しい場合には C の値もこれに相當して變化せしめる必要がある。計算には (19) 式を用ふるのであるが水面形の一般性質は (18) 式から知る事が出来る。従つて以下にこの式に就て検討を行ふが、その前に先づ無限の上流に於ける流れの状態を考へる。其處にては

$$h = \left(\frac{Q}{Cb_0 \sqrt{i_0}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad h_c = \left(\frac{\alpha' Q^2}{gb_0^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

であるから、 $h \geq h_c$ の關係が成立する爲には

$$i_0 \leq g/\alpha' C^2 \dots\dots\dots (20)$$

が成立しなければならない。≤ の中で上は常流 (ordinary flow) 下は射流 (jet flow) なる事を示す。即ち Q に關係なく i_0 と C の關係のみによつて常流か射流か定まる事になるが、實際には C の値は i_0 及び h にも關係するものであつて (20) 式から厳格な限界を見出す事は出来ないが、大體 C が粗度によつて定まるものとし、又 h の變化があまり大きな範圍に亘らないものとするれば $i_0 = g/\alpha' C^2$ の附近を除いて (20) 式が成立するものと考へられる。而してこれ等の状態が如何にして一方から他方に變遷するかを知る事が出来れば充分である。



第 2 圖

茲には (20) 式の條件を利用する爲に上流に向つて漸近的に一樣水路に近付く様な形を擇んだのであるが、J. Boussinesq は一樣水路に對して鉛直分速度を考慮してこの條件を次の様に擴張してゐる。

$$\frac{1}{i_0} > \frac{\alpha' C^2}{g} \left\{ 1 + \frac{1}{4\alpha'} \left(\frac{36fg}{C^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \quad \text{ならば常流}$$

$$\frac{1}{i_0} < \frac{\alpha' C^2}{g} \left\{ 1 - \frac{1}{4\alpha'} \left(\frac{36fg}{C^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \quad \text{ならば射流!}$$

但し f は常數で約 1.1 の値を持つ。然しこの場合も水路の方向に直角な水平分速度は含まないのであるから茲に適用するにはやゝ不適當である。従つて茲には (20) 式を充分上流に於て適用する事とする。

次に境界條件として $x=0$ にて $h=h_0$ を與へて $x \leq 0$ の部分の状態を順次に調べる。

(1) $i_0 < g/\alpha' C^2$ の場合

即ち充分に上流では常に常流状態を呈してゐる場合である。而して水深は上流に向つて

$$h_1 = \left(\frac{Q}{C^2 b_0 \sqrt{i_0}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

に近付いて行く。幅一樣の水路に於ける背水曲線はこの h_1 と下流端との水深 h_0 との關係によつて簡単に分類され

$$h_0 > h_1 \quad \text{ならば} \quad \frac{dh}{dx} > 0, \quad \frac{d^2h}{dx^2} > 0 \quad (\text{上方に凹なる曲線})$$

$$h_0 < h_1 \quad \text{ならば} \quad \frac{dh}{dx} < 0, \quad \frac{d^2h}{dx^2} < 0 \quad (\text{上方に凸なる曲線})$$

1) J. Boussinesq; "Essai sur la théorie des eaux courantes" p. 199

となるが、この場合は h_0 の大きさによつて種々の状態を現はす。先づ次の 3 函数を考へる。

$$\left. \begin{aligned} F(h, x) &= i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} \\ G(h, x) &= i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{gh^2 b^3} \frac{db}{dx} \\ H(h, x) &= 1 - \frac{\alpha' Q^2}{gh^2 b^2} = 1 - \left(\frac{hc}{h}\right)^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

但し $\frac{db}{dx} > 0$ である。又 (18) 式より

$$\frac{dh}{dx} = \frac{G(h, x)}{H(h, x)} \dots\dots\dots (18')$$

今 $F(h, x) = 0$, $G(h, x) = 0$ 及び $H(h, x) = 0$ を満足する様な h と x の関係を表はす曲線を畫き夫々に F 曲線 G 曲線及び H 曲線と名付ける。従つて H 曲線は各断面に於ける限界水深 h_c の値を表はすものである。これ等の曲線を圖示すれば第 3 圖の様な形になりこれ等は何れも單調減少曲線 (monotone decreasing curve) であつて $x = -\infty$ に向つて河床に平行な漸近線を有する。而してある x の値に對してこれ等の曲線の表はす h よりも大なる h の値に對しては

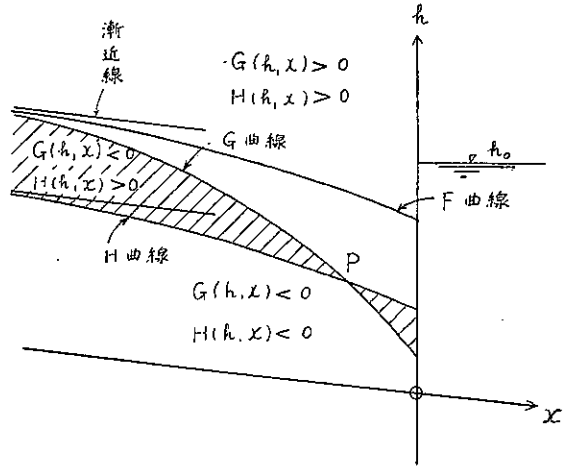
$$F(h, x) > 0, \quad G(h, x) > 0, \quad H(h, x) > 0$$

反對に h がこれ等の曲線の表はす値よりも小さければ

$$F(h, x) < 0, \quad G(h, x) < 0, \quad H(h, x) < 0$$

即ち G 曲線より上の部分にては (18) 式の分子は正となりこれ以下では負となる。又 H 曲線の上の部分にてはその分母が正となりこれより下では負となるのであるから、第 3 圖中陰影を彩せる部分は分子又は分母の何れか一つが正となり他が負となる。従つてこの部分では dh/dx が負となり、曲線は x の正の方向即ち流れの下流の方向に低下する。この他の部分では (18) 式の分子及び分母は何れも正か又は何れも負であるから dh/dx は常に正となり、曲線は下流に向つて上昇する。而してこの水面曲線が G 曲線を切る處にて水面は河床に平行となり、 H 曲線を切る處では鉛直となるのであるが、實際にはこの鉛直の水面を現はす前に跳水現象を生ずる事が多い。又 F 曲線及び G 曲線は同じ漸近線を有するがこれは又水面自身の upstream に於ける漸近線である。

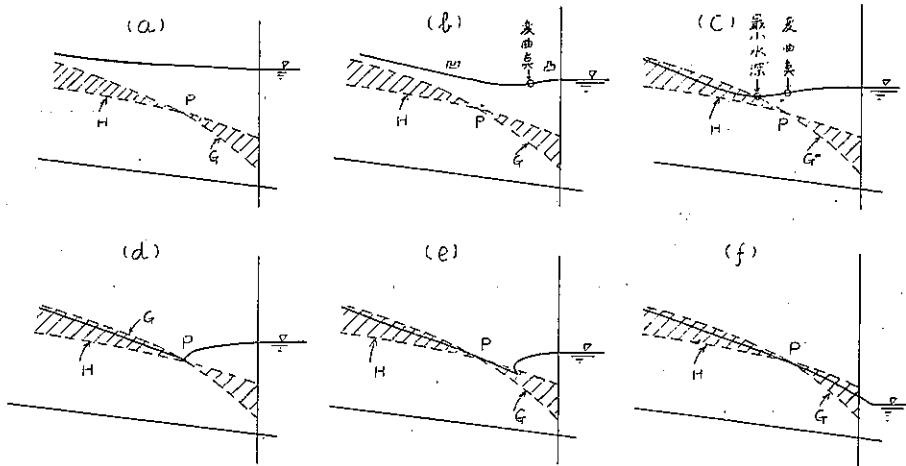
第 3 圖



先づ h_0 がその位置 $x = 0$ に於ける限界水深 h_0 よりも大なる場合を考へれば、途中にて一度射流状態を現はすか否かは $x = 0$ より計算を初めて上流に進む場合に $G(h, x)$ と $H(h, x)$ の何れかゝ先に零になるかによつて定まるのであるが、 h_0 が相當に大きくなれば射流は現はれないのが普通である。即ち第 4 圖に示す様に h_0 が非常に大きければ背水曲線は上方へ凹であるが、これがやゝ下れば $x = 0$ の附近では水面は上方に凸曲線となり上流に進むに従ひ途中にて變曲點を経て上流の凹曲線に連ぬ。併しこれ等の場合は常に dh/dx は正であり、水深は下流

に向つて増加する(第 4 圖の a 及び b)。更に h_0 が低下すれば水面曲線は變曲點を経て上方に凹なる曲線となりたる後に G 曲線に交り此處にて最小水深を現はし、これより上流部にては水面は上流に向つて上昇しつゝ G 曲線に近付く(第 4 圖の c)。而して h_0 の低下と共にこの最小水深の位置は次第に下流に移りこれが G 曲線と H 曲線の交點 P よりも下流に移れば、水面曲線は G 曲線に交る前に H 曲線に交る事になりそれより上流では

第 4 圖



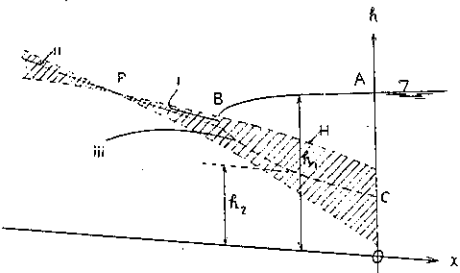
射流状態の部分を生ずる(第 4 圖の e)。今第 5 圖中の點線 BC を水面曲線 AB に對應する射流水深の曲線、即ち AB 上のある點の水深を h_1 とすればその位置に於ける BC 曲線の表はす水深が次の如きものであるとする。

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\alpha' Q^2}{gh_1^3}} \right)$$

斯くすれば上流より流下する射流の水面曲線が BC と交る位置にて跳水現象が現はれるのであるから、射流状態としては無

数の場合が可能なる様に見えるが、實際は G 曲線と H 曲線の交點 P を通過する水面曲線のみが安定であつて他の場合は起り得ない。何となれば第 5 圖の曲線 i の如く水深が上流に向つて増大して水面曲線が H 曲線に交れば之より上流にては水面は上流に向つて低下しつゝ G 曲線に近付かねばならないが、これは H 曲線との交點附近にて矛盾を生ずる。又同圖の iii の如く先づ G 曲線に交り射流としての最大水深を経て以後は上流に向つて漸減するものは G 曲線に再び近付く事が不可能である。従つて同圖の ii の如く上流に向つて水深を増しつゝ P に於て常流状態に變ずる場合のみが残る。即ち流下せる水が常流より射流に移る位置は h_0 の大きさに關係なく(18) 式の分母及び分子が同時に零になる處であつて、これは跳水現象の起る位置よりも上流の状態は h_0 の大きさに係らず不變なる事を示すものである。P 點の位置を求めるには其處にて

第 5 圖



$$\left. \begin{aligned} h &= h_c \\ i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{gl^2 b^2} \frac{dh}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

$$\therefore \left(\frac{\alpha' Q^2}{g b^3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{db}{dx} = \frac{a}{\alpha' C^2} - i_0$$

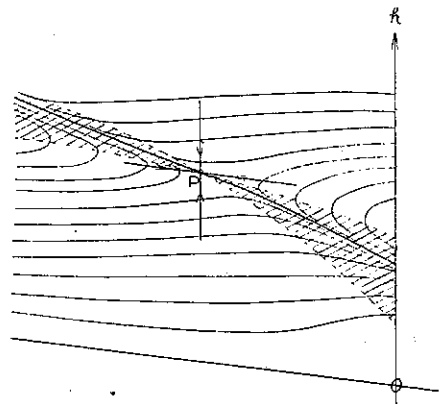
然るに

$$b = b_0 + b_1 e^{px}$$

$$\therefore \frac{(b_1 p e^{px})^3}{(b_0 + b_1 e^{px})^3} = \frac{g}{\alpha' Q^2} \left(\frac{g}{\alpha' C^2} - i_0 \right)^3 \dots \dots \dots (23)$$

(23) 式より x の値は求められるがこの位置に於ける dh/dx の値は極限値の計算法によらねばならない。而して $h = h_c$ としておき分母及び分子を別々に x にて微分して (23) 式の x を代入して得たる極限値と、 x, b 及び db/dx を固定して h にて分母及び分子を微分して $h = h_c$ の時の極限値を求めたものはその値が異なる事がある。これは P が一種の特異點 (singular point) なる爲であつて、然も第 6 圖より見られる様にこの 2 つの極限値は何れも dh/dx が正なる範圍にて P に近付くのであるから共に求むる値とはなり得ない。第 6 圖より明かなる様に P を通る水面曲線は (18) 式より得らるべき 2 種の曲線群の境界線をなすものであつて、それ自身既に一種の極限値なのであるから、 P に於ける dh/dx を計算するにはその曲線自身に沿つて P に近付いた時の極限値を求めなければならぬ。併しそれは不可能であるから實際には曲線群の大體を畫くことによつて P を通る水面曲線を決定する。

第 6 圖



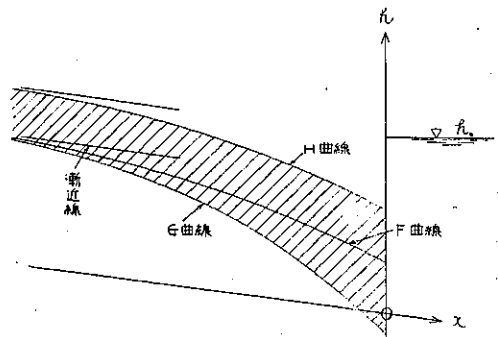
かくして求めたものはあらゆる h_0 に對する射流部及びそれより上流部の水面曲線であつて、尙豫め第 5 圖の ABC 曲線を計算して置き上の射流部の曲線が BC と交る點を求めれば、これが跳水現象の起る位置である。第 4 圖 (d) はかゝる場合 (第 4 圖の e)

より前述の同圖 (e) の場合に變遷する時の状態を示すものである。¹⁾ h_0 が更に低下して $x=0$ に於ける限界水深以下になれば第 5 圖 (f) に示す様になりこの曲線は P と $x=0$ の點の間でも不變である。

(2) $i_0 > g/\alpha' C^2$ の場合

この場合は充分の上流では必ず射流状態であつて h_0 がその場所の限界水深よりも大ならば必ず跳水現象を伴ふが、 h_0 がこれよりも小さければ必ず射流状態にて終始する。第 7 圖はかゝる場合の F 曲線、 G 曲線及び H 曲線を示したものであつて前と同じく陰影を彩せる部分にては dh/dx は負となり、その他の部分ではこれが正となる。又充分の上流では水面は F 曲線又は G 曲線と共通の漸近線を有する。

第 7 圖



この場合に起り得る水面形は第 8 圖の (a) 及び (b) の 2 種であつてその他は總て起り得ない事は容易に知る事が出来る。又射流部の水面曲線にて (18) 式を満足しつつ G 曲線に近付く様なものが無數に存在するか否かを見るに、かゝるも

(1) 幅の直線的に擴がる水路に於ける跳水現象の實驗に關しては K. Safianez; "Wassersprung in geneigten, sich verbreiternden Gerinnen" Bauingenieur, 1933 Oct, 13.

のは少くも一つは存在する筈であるからそれが見出されたものとしてそれより上に更に一つが存在するものとすれば、第 7 圖の陰影を彩せる部分にては dh/dx の絶対値は h と共に増大するのであるから後者の勾配は常に前者よりも大なる事となり矛盾を生ずる。同様にして第 1 のもの下方にも上の条件を満足するものは存在しない。かくして只一つの状態のみが安定である事は確められたがこの曲線は矢張り前の場合と同じく 2 つの曲線群の境界線をなす

ものであつて、その形を計算上より定める事は不可能であるから数回の試算より近似的に定めなければならない。

跳水現象の起る位置は豫め曲線 ABC (第 6 頁参照) を書いて置きこれと射流曲線の交點を求めればよい。然し h_0 が $x=0$ に於ける限界水深より小なる時は $x>0$ の部分の水面が $x\leq 0$ の部分の水面と連続的に連る爲に、水路が $x>0$ の水域内に幾分延長された様な状態となる。

以上述べた處は總て $p>0$ の場合であるが、 $p<0$ の時も全く同様の考察を進める事が出来る。これは河口に向つて水路幅が次第に狭くなる場合であつて實際の例も稀には見られるが考へ方は全く同じであるから茲には省略する。

3. 幅の變化する開水路に於ける不等速定流 (その 2)

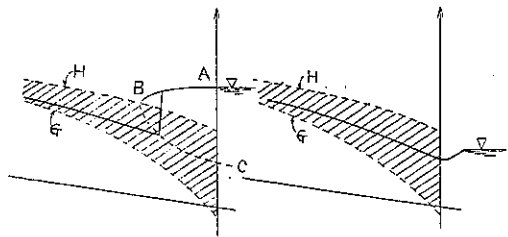
上下流共に一樣水路内の等速流に連りその中間に幅の變化する部分の存在する場合を考へる。

(1) 第 9 圖の如く幅の狭き水路より廣き水路に移る状態を見る。圖には $i < \eta/\alpha' C^2$ の場合を示してある。曲線 F, G 及び H は (21) 式の定義に従ふものであつて、前と同じく圖中斜線にて陰影を彩せる部分では d^2h/dx^2 が負である。尙實際の水路幅は ABC の如き折線で表はされるものであつても流水の有効幅は點線 AC の如き形となり、この曲線の形又は C の位置等の決定は渦動の問題として流水の平均流速にも關係し相當に困難な問題となる。然し茲にはこの曲線 AC を知れるものと假定してあるのであつて C の位置の取り方より起る誤差は比較的に小さいから實際の状態を知るのに大なる障ととはならない。

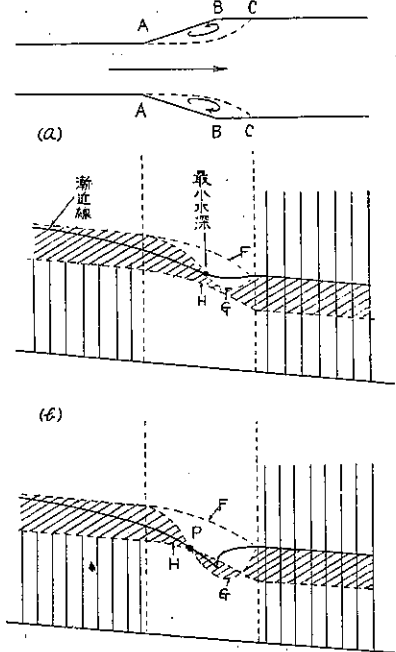
上下流の一樣幅の部分では F 曲線と G 曲線は一致し何れも水面の漸近線となつてゐる。而して圖中鉛直平行線を以て陰影を彩せる部分は G 曲線上を除いては水面曲線の存在し得ない所である。その理由は一例として圖の上右隅の部分の考へれば此處では dh/dx が正であるから水面曲線は下流に向つて上昇するにも拘らず充分に上流では G 曲線を漸近線とせねばならない。これ等は兩立し得ない條件であるからこの部分に水面曲線は存在し得ない。他の部分にも同様の理由によつて水面は存在しない事になる。

如上の理由によつて CC 断面より下流では G 曲線が水面と一致するのであるから計算は C より始めて上流に向つて進めばよい。而して C より上流の部分では必ず一旦水面が低下し、最小水深の場所を

第 8 圖 (a) (b)



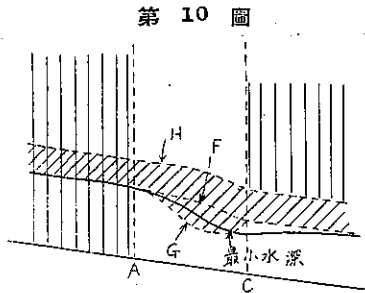
第 9 圖



經て上流部の低下背水曲線に連る。又 AB 部に於ける水路幅の變化がやゝ急激なる時は第 9 圖 (b) に見る様に G 曲線の一部は H 曲線よりも下になり、其處にては一時射流状態を現す事も起り得る様になる。

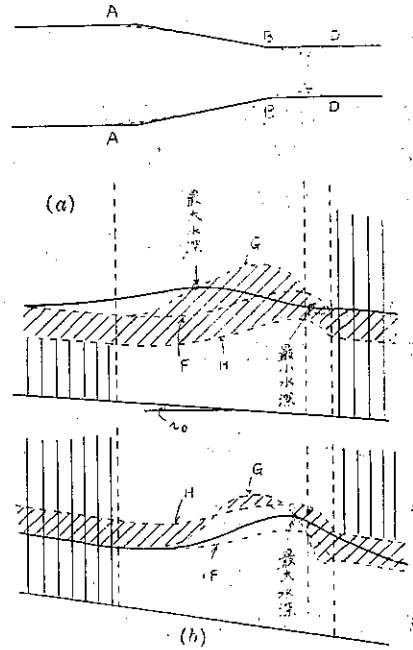
$i > g/\alpha' C^2$ の場合(第 10 圖)

は AA 断面より上流は總て一樣水深となつて G 曲線と一致し、AC 間にて一度最小水深を現はして後次第に下流側の G 曲線に近付く。而してこの場合は必ず射流状態にて終始する。



第 10 圖

第 11 圖



(2) 第 11 圖の様にして廣断面の水路から狭断面の水路に移る場合は發生する渦の形状が前のものよりもやゝ複雑であるから G 曲線の形も多少複雑となる。CC 断面は db/dx が零になる處であつて此處にて F 曲線と G 曲線が交る。従つてこの有効幅を表はす曲線 ABCD の形を適當に假定すれば、水面形の曲線は前の場合と全く同じ考へ方によつて容易にこれを知る事が出来る。第 11 圖にはその中の代表的のものを示したのであるが $i < g/\alpha' C^2$ (同圖 a) の時には最小水深が現はれない事もある。又 $i > g/\alpha' C^2$ (同圖 b) の時はこの他に途中にて一度常流状態を現はすもの及び最大水深の位置のやゝ下流にて最小水深となりこれより水深が漸増しつゝ G 曲線に近付くものも起り得る。

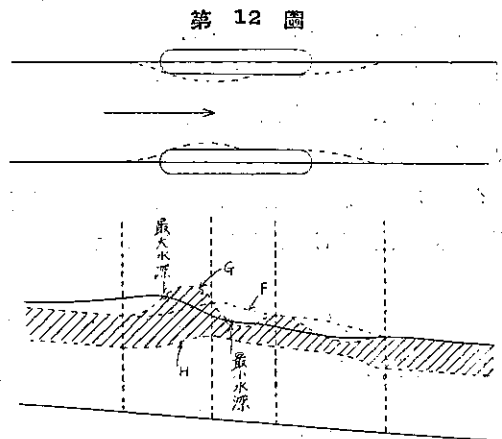
これ等の結果より知られる事は $i < g/\alpha' C^2$ の時は上流部に背水の影響が及び、 $i > g/\alpha' C^2$ の時は下流部に影響する。

(3) 橋脚背水の問題の一例

橋脚背水の原因は橋脚部に於ける断面の縮少による上流側水面の堰上げであるから上述の方法によつて解決する事が出来る。併しこの問題に於ては impulse wave の發生によつて流れの 2 次元性の減ずる事と、流水の有効幅の推定の困難な爲に不正確に陥り易く、適當な例題とは言ひ難いが一例として $i < g/\alpha' C^2$ の場合を第 12 圖に示した。

計算に當つては db/dx の値は岡上にて測れる db/dx を用ひなければならない。又途中にて一度射流状態を現はす様な場合には 2. に述べた方法によつて水面曲線を定める。

尙この他にも水路幅の變化する場合に就ては數多の形を考へる事が出来るが、その時の水面形の求め方は何れも前述のものと同じ考へ方によるのであるから總て省略する。但し最大水深の大きさを求めるには常に限界條件となるべき位置より計算を進めて行かねばならないのであるから、兩者の距離が遠い場合は誤差が相當に集積するものである事を考慮に入れ



第 12 圖

ておかなければならない。

4. 底勾配の變化する開水路に於ける不等速定流

便宜上充分の上流にては一樣勾配 i_0 に漸近的に近付き下流に及ぶに従つて底勾配の緩になる場合を考へ

$$i = i_0 - f(x) \dots\dots\dots (25)$$

と置く。但し $f(x)$ は正の單調増加函數で $x = -\infty$ にて零となる。河底の曲線形はその上の任意の點の、 $x=0$ を通る水平線よりの高さを y とすれば

$$y = -i_0 x + \int_0^x f(x) dx \dots\dots\dots (26)$$

前と同じく水路幅 b は上流にては一樣幅に近付くものとする。

基本式は (18) 式の代りに

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_0 - f(x) - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{g h^2 b^3} \frac{db}{dx}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{g h^3 b^2}} \dots\dots\dots (27)$$

又この場合の G 曲線の定義は

$$G(h, x) = i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} - f(x) + \frac{\alpha' Q^2}{g h^2 b^3} \frac{db}{dx} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

を満す様な h と x の關係を表はす曲線である。従つて $b = \text{const.}$ なる時は G 曲線は常に F 曲線の上に在つて充分の上流にては同じ漸近線を持つ。

$b = \text{const.}$ なる時の水面形は $i < g/\alpha' C^2$ の場合を 第 13 圖に、 $i > g/\alpha' C^2$ の場合を第 14 圖に示す。圖の (a) 及び (b) は河床勾配の變化の小さきもの及び大なるものであつて、前と同じく射流部の水面曲線は無數には存在し得ず、只 1 つのみが安定なる事が證明される。従つて第 14 圖 (b) の場合の h_0 の値を h_{00} にて表はせば h_0 がこの h_{00} 以下の時は水面は不安定となる。然し水面形としては比較的簡單で一樣勾配の時の背水曲線と類似してゐる。

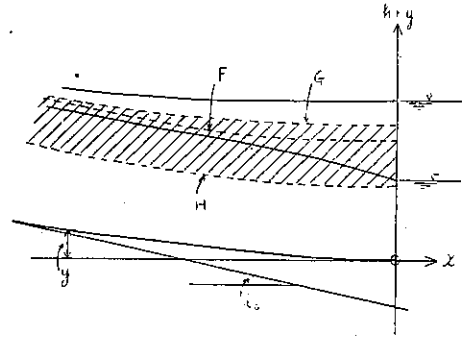
勾配が與へられて水深が總て一樣になる様な水路幅 b を定めるには、先づかゝる水深は充分の上流に於ける等速定流の水深でなければならぬから、これは

$$h_1 = \left(\frac{Q}{C b_0 \sqrt{i_0}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{但し} \quad h_1 \neq h_c$$

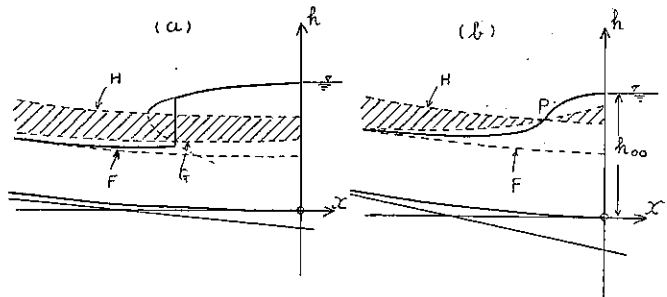
茲に b_0 及び i_0 は充分上流に於ける水路幅及び河床勾配である。その時常に $dh/dx = 0$ となる様な條件は

$$i_0 - f(x) - \frac{Q^2}{C^2 h_1^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{g h_1^2 b^3} \frac{db}{dx} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

第 13 圖



第 14 圖



この微分方程式を解いて b を決定すればよい。例へば

$$f(x) = i_1 e^{qx}, \quad q > 0, \quad i_1 \leq i_0$$

とすれば

$$\frac{db}{dx} = \frac{gh_1^2}{\alpha' Q^2} \left\{ \frac{Q^2}{C^2 h_1^3} b - (i_0 - i_1 e^{qx}) b^3 \right\} \dots\dots\dots (29')$$

これは Bernoulli 型の微分方程式に於て b の係数が常数となれるものであるからこれを解けば

$$b = \left[\frac{2gh_1^2}{\alpha' Q^2} \left(\frac{i_0}{p} - \frac{i_1}{p+q} e^{qx} \right) + K e^{-px} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

但し $K = \text{常數}, \quad p = 2g/\alpha' C^2 h_1$

限界条件は $x = -\infty$ に於て $b = b_0$ であつて、これを満足する爲には $K = 0$ とすればよい。従つて b は次の式を以て與へられる。

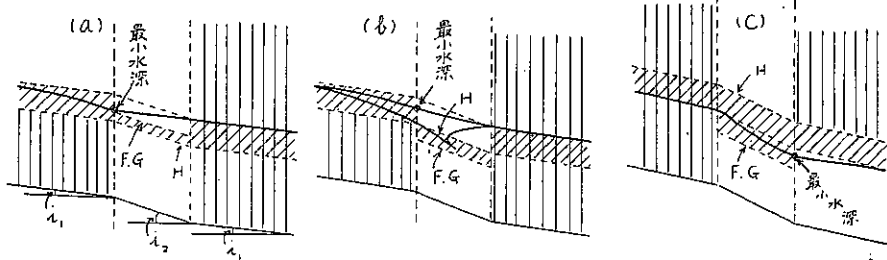
$$b = 1 / \left\{ \frac{2gh_1^2}{\alpha' Q^2} \left(\frac{i_0}{p} - \frac{i_1}{p+q} e^{qx} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (30)$$

次に水路幅は一樣にて水路床が折線状をなす場合を考へる。記號及び圖示法は全然前と同じであるから第 15 圖及び第 16 圖を見ればその状態は明瞭であるが、前の場合と異り勾配の變遷部には渦は殆ど起らぬものと考えられるから計算をする時は簡單である。G 曲線の定義は勿論 (28) 式によるのであるが $b = \text{const.}$ であるから $G(h, x) = i - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2}$ であつて常に F 曲線と一致する。底勾配の大きさは

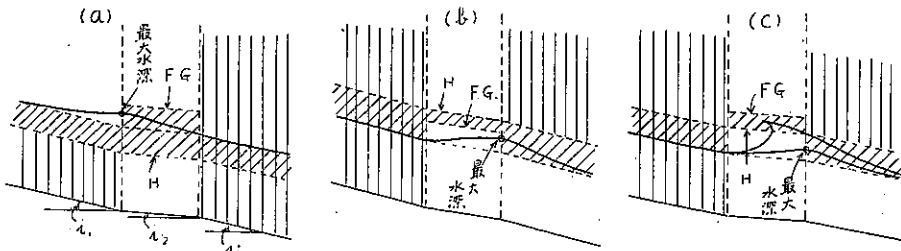
- | | | | | | | |
|--------|---|-----------------------------------|---|--------|---|----------------------------------|
| 第 15 圖 | { | (a); $i_1 < i_2 < g/\alpha' C^2,$ | } | 第 16 圖 | { | (a); $i_2 < i_1 < g/\alpha' C^2$ |
| | | (b); $i_1 < g/\alpha' C^2 < i_2$ | | | | (b); $g/\alpha' C^2 < i_2 < i_1$ |
| | | (c); $g/\alpha' C^2 < i_1 < i_2$ | | | | (c); $i_2 < g/\alpha' C^2 < i_1$ |

第 15 圖 (a) 及び第 16 圖 (a) には流水は終始常流状態であつて、第 15 圖 (c) 及び第 16 圖 (b) には

第 15 圖



第 16 圖



終始射流状態である。その他の場合は途中にて一度跳水現象を現はす。跳水現象の起る位置又は常流状態より射流状態に移る位置は 2. に述べたものと同じであつて、後者の位置は必ず G 曲線と H 曲線との交點である。

これ等は何れも基礎的考察を興へるものであつて更に複雑なる問題への應用も同じ考へ方によつて進める事が出来る。水路幅が同時に變化する時も G 曲線の定義に (28) 式を用ふる事によつて解決される。

5. 水路に沿つて流入量のある場合

道路の側溝、發電所の餘水吐の如く水路壁に沿つて或る水量が流入する時にこれを 2 次元的の問題として取扱ふには (14) 式及び (15) 式を用ひて解決しなければならない。この時は既に述べた様に (14) 式の最後の項を無視しても差支へないが此處には暫くこの項を残して考察する。その時の基本式は

$$-i + \frac{dh}{dx} + \alpha' \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 h} + \frac{\alpha - 1 - 3\gamma}{g} \frac{q\eta}{A} = 0$$

$$\frac{d(vA)}{dx} - q = 0$$

この 2 式を變形すれば

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{v^2}{C^2 h} + \frac{\alpha' v^2}{gh} \frac{db}{dx} - (3\alpha - 2 - 3\gamma) \frac{vq}{ghb}}{1 - \frac{\alpha' v^2}{gh}}$$

即ち

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{gh^2 b^2} \frac{db}{dx} - \beta \frac{Qq}{gh^2 b^2}}{1 - \left(\frac{hc}{h} \right)^3} = f(x, h) \dots (31)$$

但し $\beta = 3\alpha - 2 - 3\gamma, \quad Q = Q_0 + qx$

(1) 水路幅 b 及び底勾配 i_0 が一樣なる場合

この時 (31) 式は次の様になる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} - \beta \frac{Qq}{gh^2 b^2}}{1 - \left(\frac{hc}{h} \right)^3} \dots (32)$$

この (32) 式に對して前と同じく F 曲線、 G 曲線及び H 曲線を畫くのであるが G 曲線の定義は

$$G(h, x) = i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} - \beta \frac{Qq}{gh^2 b^2} = 0 \dots (33)$$

を満足する如き h と x の關係を表はすものであつて、先づこの

F 曲線の勾配を見るに、 F 曲線の勾配は

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)_F = \frac{2qh}{3Q}$$

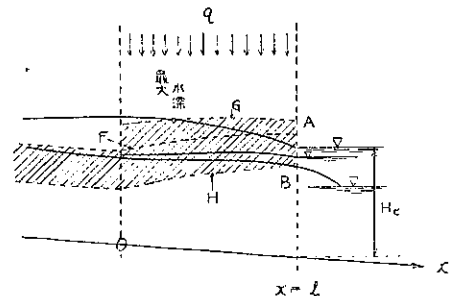
G 曲線の勾配は

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)_G = \frac{gh}{Q} \cdot \frac{2Qq + \beta q(C^2 h)}{3Qq + 2\beta q C^2 h}$$

H 曲線の勾配は $\left(\frac{dh}{dx} \right)_H = \frac{2qh}{3Q} = \left(\frac{dh}{dx} \right)_F$

然るに

第 17 圖



$$0 < \frac{2Qq + \beta q C^2 h}{3Qg + 2\beta q C^2 h} < \frac{2}{3}$$

であるから

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_H = \left(\frac{dh}{dx}\right)_F > \left(\frac{dh}{dx}\right)_G > 0$$

即ちこの 3 曲線は何れも下流に向つて上昇し、G 曲線は次第に F 曲線に接近する。

$i_0 < g/\alpha' C^2$ の時は (第 17 圖) $x=0$ より $x=l$ までの間にて單位の長さにつき q なる流入量があるものとすれば、 $x=0$ よりも上流に背水の影響が及ぶのであるから $x=l$ に於ける水深 H_l を限界條件としなければならない水面形は限界條件によつて異なるが、 $x=l$ に於ける水面が第 17 圖の A よりも上に在れば普通の堰上背水曲線の如き形となり、A と B の間にあれば q 及び H_l の大小によつて 2 種の状態を現はす。即ち H_l の水面が A に近く q が比較的大きければ途中にて最大水深を現はし、 H_l が比較的小さく或は q が小さければ低下背水曲線の如き形となる。 H_l の水面が B 以下の時は常に一種の低下背水曲線となる。従つて $i_0 < g/\alpha' C^2$ なる限りたとへ $Q_0=0$ であつても $x=0$ に於てはある大きさの水深を有することとなる。

$i_0 > g/\alpha' C^2$ の時は (第 18 圖) 上流部に背水の影響を及ぼさないから計算は $x=0$ の断面から始めて差支へない。而して G 曲線は Q_0 が小さい時は $x=0$ の附近では H 曲線よりも上に在るけれども、相當の下流では必ず H 曲線よりも下になり、流れが途中にて常流状態を現はす事は殆どない。 Q_0 が零ならば $x=0$ に於ては水深が零で dh/dx は i_0 に等しい。

(2) $i=i_0=\text{const.}$ の時に水深が一樣となる様に幅りを定める事

幅の變化する場合の水面形は q 及び b の大小の關係により多種多様のものとなるが、茲には q が與へられた時に水深が一樣となる様に b を定める。その爲の條件は (31) 式より

$$i_0 - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{g h^2 b^2} \frac{db}{dx} - \beta \frac{Qq}{g h^2 b^2} = 0 \dots\dots\dots (34)$$

今 $q=\text{const.}$ と考へれば $Q=Q_0+qx$ であるから (34) 式の微分方程式を解いて b と x の關係を求め得る。即ち (34) 式を書き換へれば

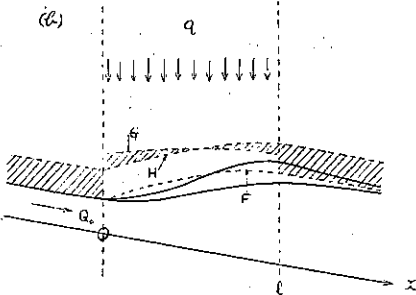
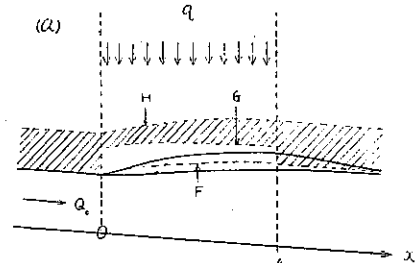
$$\frac{db}{dx} - \frac{1}{\alpha'} \left\{ \frac{q}{C^2 h} + \frac{\beta q}{Q_0 + qx} \right\} b + \frac{i_0 g h^2}{\alpha' (Q_0 + qx)^2} b^2 = 0$$

これは Bernoulli 型の微分方程式であるから $z=b^{-2}$ と置くことによつて線形微分方程式に書き換へる事が出来る。その時の一般解は

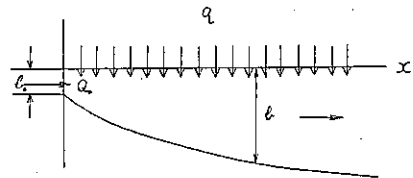
$$z = e^{-\frac{x}{\alpha'} \left\{ \frac{gq}{C^2 h} + \beta \ln(Q_0 + qx) \right\}} \left[\int \frac{2i_0 g h^2}{\alpha' (Q_0 + qx)^2} e^{\frac{x}{\alpha'} \left\{ \frac{gq}{C^2 h} + \beta \ln(Q_0 + qx) \right\}} dx + K \right]$$

然るに實地計算に於ては $\alpha'=\beta$ としても誤差は殆ど現はれぬ程度のものであるから、かく假定する事により

第 18 圖



第 19 圖



$$z = (Q_0 + qx)^{-2} e^{-\frac{2qmx}{\alpha' C^2 h}} \left[\frac{2i_0 q h^2}{\alpha'} \int e^{\frac{2qmx}{\alpha' C^2 h}} dx + K' \right]$$

茲にて $2q/\alpha' C^2 h = p$ と置けば

$$z = (Q_0 + qx)^{-2} e^{-px} [i_0 C^2 h^3 e^{px} + K']$$

$$\therefore b = (Q_0 + qx) e^{\frac{px}{2}} (i_0 C^2 h^3 e^{px} + K')^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (35)$$

限界条件として $x=0$ にて $b=b_0$ を用ふ。

$$K' = \frac{1}{b_0^2} (Q_0^2 - i_0 C^2 h^3 b_0^2)$$

$x=0$ よりも上流にては等速定流の状態を呈するものとすれば

$$b_0 = \left(\frac{Q_0^2}{C^2 h^3 i_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

であるからこの場合は

$$K' = 0$$

この解を $Q_0=0$ なる場合に適用すれば

$$b = qxe^{\frac{px}{2}} (i_0 C^2 h^3 e^{px} + K')^{-\frac{1}{2}}$$

此處には $x=0$ に於ける限界条件は用ふる事が出来ないから、溢水路の末端 $x=L$ に於ける水路幅 $b=b_L$ を以て限界条件とする。

$$\therefore K' = \left\{ \left(\frac{qL}{b_L} \right)^2 - i_0 C^2 h^3 \right\} e^{pL}$$

$$\therefore b = qxe^{\frac{px}{2}} \left\{ i_0 C^2 h^3 (e^{px} - e^{pL}) + \left(\frac{qL}{b_L} \right)^2 e^{pL} \right\}^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (36)$$

$x=0$ に於ける db/dx の値は

$$\left(\frac{db}{dx} \right)_{x=0} = q \left\{ i_0 C^2 h^3 (1 - e^{pL}) + \left(\frac{qL}{b_L} \right)^2 e^{pL} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

b の計算には (35) 式又は (36) 式によることなく

$$\frac{db}{dx} = \left\{ \frac{g}{\alpha' C^2 h} + \frac{\beta q}{\alpha' (Q_0 + qx)} \right\} b - \frac{i_0 q h^2}{\alpha' (Q_0 + qx)^2} b^3 \dots \dots \dots (37)$$

として限界条件の與へられた断面より順次に計算を進めても、 Δx を小さく取れば充分な近似解が得られる。又 i が x の函数なる場合も前と全く同じ方法で解き得るのであつて、只 i_0 の代りに $i=f(x)$ を代入すればよい。併しこの場合は積分が益々困難となつて多くは (37) 式の形で計算しなければならない。

6. 廣矩形以外の断面への應用

今まで述べた處は總て断面形を廣矩形と假定してゐたのであるが、この結果はある程度まで他の断面形に轉用する事が出来る。唯水路幅の變化する問題に對しては、幅を代表する項を残さなければならないのであるから廣矩形断面と假定する事と大差がない。

水路幅は不變の場合に對して物部博士の方法に従ひ

$$A = ah^s, \quad v = bh^k$$

と置けば (14) 式及び (15) 式は次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} -i + \frac{dh}{dx} + \alpha' \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2} \frac{b}{a} h^{k-s} + \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g} \frac{qv}{ah^s} &= 0 \\ ah^s \frac{dv}{dx} + ah^{s-1} v \frac{dh}{dx} - q &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{bv^2}{aC^2} h^{k-s} - \frac{\beta qv}{ag h^s}}{1 - \frac{\alpha' v^2}{gh}} \dots\dots\dots (39)$$

従つて廣矩形と假定した場合と異なるのは (39) 式に於ては分子の第 2 項のみである。故にこれが他の項に比して比較的小さい時は廣矩形と假定しても差支へない。底勾配 i の變化が小さく又は q が小さくてこれ等の影響があまり現はれない時は a, b, k 及び s を適當に定める必要がある。

7. 結 論

本文中には種々の事項に関する記述を羅列してゐるがこれを要約すれば

- (1) 不等速定流の一般方程式中に側壁よりの流入量又は流出量の q を挿入した。即ち (14) 式及び (15) 式の導入。
- (2) 幅の變化する水路内の不等速定流の一例として上流部は次第に一様幅に近付く如き形の水路内の流れの状態を運動及び連続の微分方程式より直接にその一般性質を明かにして實地計算の指針とした。即ちこの場合は一様幅の水路に於ける背水現象と異り、下流端の水深の大小によつて第 4 圖及び第 8 圖に示す様な種々の状態を現はすものである事を説明した。
- (3) 前と同様の方法によつて水路の底勾配が變化する場合の一般性質を明かにした (第 13 圖及び第 14 圖) 又底勾配が變化する時に水深を一様ならしむる様な水路幅の定め方として (30) 式を導入した。
- (4) 側壁よりの流入量 q が存在する時の流れの一般性質を前と同様の方法によつて明かにした (第 17 圖及び第 18 圖)。更に一様な流入量 q がある時に水深を一様ならしむる様な水路幅の定め方として (35), (36) 及び (37) 式を導入した。
- (5) これ等の問題に於て水流が常流より射流に又は射流より常流に變遷する場合は特に注意を拂ひ、限界條件が下流端にて與へられたる時は常流状態より射流状態に移る位置は Q が同じなる限り不變なる事を示した。例へば第 4 圖の場合にこの變遷の位置は必ず P 點に一致する。
- (6) 何れの問題に於ても流れの一般性質を説明すると同時に數値計算をも行ひ得る様に記述した。これ等は近似計算法であるが水流の一般性質を理解する事により大過なく計算を進める事が出来ると思ふ。(完)