論說報告
第十九卷第十一號 昭和八年十一月

連彈性法則に依る剛結構造の解析

會員 工學士 重松 愿

Analysis of Rigidly Connected Structures by the Continuous Elastic Theory

By Gen Shigematsu, C. E., Member.

內容梗概

本文は剛結構造の一般形式に對する應力の解析法を述ぶるものであつて，その要領は載荷せる構造の或る連構材群に關して不定變形を驅逐せる彈性應力式を誘導し，これと靜力學平衡條件との適用によりそれら應力の値を構造翼端より逐次に算出するにある。從つて“n 次の不靜定構造の解法には n 個の不定量に關する n 元聯立方程式を要する”と謂ふ原則の考慮は，これを剛結構造解法に當つて全然放棄してもよいことが本法によつて疑なく示されるであらう。而して現今剛結構造解析に汎く適用されある撓度撓角法は格點變形を解き，亦定點法は構材曲力率に關する共軛虚點及要すれば格點變位を計算すべきに對し，本法が構材曲力率等を直接解くことは，それら各法の外に新なる解法を提供するものであり，加之，それら各法が單に矩形構に關して解式を準備せるに本法が斜材を有する一般形に關して解式を準備せることは剛結構造解法の領域を更に擴張することになる。尙ほ題せる連彈性法則といふは文中に提示せる連構材各應力の第一，第二及第三公式並にその誘導式の適用を指すのであつて，これらを應力の解式とし構造翼端に於ける少數の應力を未知量として處理する以外には多元方程式解法などの勞作を一切避けて各種の複雜なる形式の剛結構造を簡明に解かんとするものである。

緒論

1，不靜定構の諸解法と不靜定數の內容

總て剛結構造の應力解析に於ては所要の應力數がその構造に關する靜力學平衡條件數を遙かに超過するので，その過餘應力の數例へば n を以て構造を n 次の不靜定構と稱し，これを解くためには n 個の n 元聯立彈性式を必要とする如き應力の基本的解法は可なり古くから發達し，Castigliano 定理を初め，これと形式を同うせる假想働法則の適用法などはその主なる例である。

次いで現今の剛矩形構解法に普く利用されある撓度撓角法は構造に於ける格點の彈性變形數が格點の靜平衡條件數を超過せないといふ一般性に基いて先づ變形方程式を解きそれを應力に還元せるものであるが，この場合の變形に關する n 元の聯立彈性式の數 n は勿論上述の n とはその內容を異にしその數も比較的少いが，それでも可なり多くの聯立方程式を解くべき辛苦は免れ得ないのである。然しこの變形解法に於ては方程式排列に關してその左右翼の各項係數が對稱配置をなす謂はば雁行形が成立つので，單に聯立方程式と言つても純數學で謂ふ聯立方程式とはその解法が容易であることは實用上有利な點である。

然るにその後，構材曲力率の虚點に關する圖式解法より發達して解析的定點法が擡頭し，その特點とするところは定點位置の計算さへすれば爾後の計算に於て曲力率に關する聯立方程式を不要とすることにあるが，然し實際

に於てかゝる特點は或る狹範圍に限られ，閉口形構造以外のものには定點に關する計算が困難なる不便があり，假令その定點が計算され得るものと雖も格點變位の存するものにはその數だけの聯立方程式が入用となる。この變位方程式の要求さるゝ所以は定點法なるものが撓度撓角法と同じ彈性原式に就て彈性條件の既知なる構材格點の變角を定點に關する材件の代置によつて消去するも，變位には何等の方便も與へられない公式を用ふるのであると謂ふことから說明されるのである。定點法に於てある數例へば n 個の變位聯立方程式の要ること，亦公式の示す曲力率の値は一構材の自己力率に過ぎないためにこの聯立方程式が多少複雜になること及定點が多數の構造に對して計算し難いことはこの法の普及を阻止する所以であるが，然し閉口形の適例たる連桁式のものに對し便利なるは否定し得ないのである。

更に近來に於ける構造解析論として 1930 年以來 Proceedings of A. S. C. E. に曲力率分配法なるものが連載討議されをるも，これは定點法の一特例に關するものであつて，定點法の實用に關する完備せる研究はわが日本の文獻に於て進步して居ると思はれるのである。

構造解法として以上各法の外に多少注目すべきは，例へば撓度撓角法に於ける未知量聯立方程式の數よりも更に少なき方程式數によつて計算行程を短縮せんために，未知量群を分割計算し或は一部の未知量を消去して，數に於て少なき聯立方程式を解くなどの方法が，前記定點法が變角を消去せる公式を使用すると同じく考へられあることであつて，これは單に未知量の數を少なくすると言ふ純理よりすれば進步せる方法ではあるが，實際に於てかゝる場合に得らるゝ聯立方程式は一般に未知量を以て充滿せる方程式となり，その計算が雁行形のものに比すれば勞力多く單に少數の未知量を減じたる結果は却つて取扱が煩雜を增すことがある。勿論格點數の少なき構造の計算に對しては雁行形式と雖も充滿形式に近づくから，未知量減少の方法の優れることは言ふまでもないが，一般構造に對しては特にそれが簡易法なりとは言はれ得ないのであつて，可なり適切に未知量消去を工夫されたるものと雖も相當の手數が掛かるのである。

斯くの如き從來の應力解析の經路に於て例へば，不靜定構に對し所要應力が靜平衡條件を超過するだけの數 n を靜力學不定數と稱することに何等の異存はないが，然し唯だそれだけでは n なる數は何等の重要なる意義を有せない，n なる數が不定應力を求むるに要する彈性聯立方程式の數なりと言ふに至つて初めてそれに重要性が存するのである。然るにこの n を不定應力解式の數なりとすると，上述の諸解法によつて明なる如く，數 n は解析者が應力を求めんがために自ら作出し得る各種の變形應力數 n であつて構造の應力解析に關する限り，それは絕對的のものでない。故に或る適正なる方法を以てすれば n なる數を少なくすることの出來る推定はつくが，前述の如くその一部或は半部を減少しても餘り效果がないからこれを徹底的に處分して不靜定數なる觀念を全然驅逐して仕舞ひたいのである。本文はこの目的のために剛結構造一般形に適應する解法として考究さるゝものである。

2. 本解法適用に關する概要

本文解法は旣にその梗概に於て述べし如く，剛結構の特別なる格點の環境條件によつて定まるべき二三の彈性變形を除く他の總ての不定變形を含まざる彈性應力式を曲力率及軸應力に關して或る一群の連構材每に準備し，連構材格點に於ける靜平衡條件と組合せて各應力の値を構造の翼端より逐次に見出す方法であるが，その連彈性應力式の構成法は提案せる第一，第二及第三公式の誘導法によつて自ら說明され得べく，これら三公式の適用法に就ては構造の彈性變形の條件數，特に構造支點或は翼端に於ける彈性拘制の條件數の多寡によつて公式の全數或はその一部數を使用すべき必要が起るので，例へば樹立矩形構の如き突桁式のものよりは構拱の如き彈性拘制の條件數の多きものに對し公式使用が多數に要求さるゝことは吾人の有する彈性解法の常識によつて判ることであ

る。何れにしても，これら公式の適正なる應用によつて，例へば構造翼端の應力から始めて逐次に格點應力が計算さるゝのであるが，玆に謂ふまでもなく彈性構造に於ては假令一局部の應力なりともそれが單に力の分解及合成法によつて決定せない，即ち構材總數の彈性材件の計算關係が完了するに非ざれば應力の數値が確定せないから，計算の最初に於て翼端應力の或者だけを假りに既知量の如く取扱ふて荷重の項と共に計算を進めて行き最終に至つて構成條件によりその實際の値を決める。即ちこの翼端應力はこの場合の未知量に相當するものであつて構造の形式により翼端構材に對し一つ乃至三つが入用となる。然しこれを必ずしも翼端に選定せずとも構造の任意截斷面の構材に就て採定しても差支ないが，一般には翼端特に構造支點に採つて便利なる機會が多いのである。支點に關する應力を未知量とする場合にありては，その數は支點の數の少なく及支點に於ける彈性拘制條件も少なきものに於て一般に少なく，例へば兩翼緊定の Vierendeel 桁，兩端緊定の單線拱或は普通形式の彈床吊橋などに於ては何れも三つ以下，休支點の鋏結三角集成構の副應力計算には二つで足りるが，高層矩形架構の如きは普通基脚數が多いからこの未知量數も多く，例へば左右對稱形に對しては基脚數の半數だけの未知量を必要とする。然し低層にして基脚の多き連桁式のものに對しては翼側に未知應力を選定すればよく，然るときは基脚數に關せず層數の 2 倍以下の數を以て解法が滿足される。斯く本法に於ては剛結構に對し多元聯立方程式の計算樣式を適用せず，各應力の値を直接計算式によつて求むるものであるが，更に計算中に於て各種の異なる連構材群に就て夫々余分の異る彈性式を準備すれば，それに依つて計算の正誤を適宜に檢定し得べき照査式使用の利便が與へられる。

又本解法の全般は剛結構に關するものなるが，構造の支點の如き或特別なる格點が鉸結なる剛結構に對しても特種の公式を準備するを要せず，一般に與へらるゝ諸公式が變形なしに一系數を零とすることによりその儘適用性を有することが可なり便利であつて，これに關する說明は第十一節に與へてある。

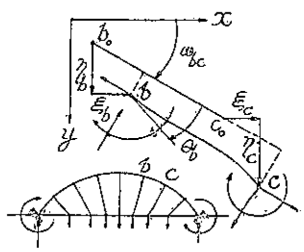
尙ほ本解法が處理する剛結構には既に述べし如く一般に曲力率と軸應力とが相伴ふものであるが，その構成樣式によつてそれらの彈性效果を分割計算して取扱を簡便ならしむるを得策とすることは謂ふまでもないことであつて，それがために剛結構を，各構材の伸縮なくしては絕對に彈性變形を惹起し得ざる伸縮性構造(三角集成構の類)，各構材の伸縮なくとも彈性變形をなし得る撓曲性構造（矩形，其他の多角集成構の類），及これらの中間性として各構材の撓曲變形にはその幾分の伸縮變形をも要すべき撓伸縮性構造（例へば第十圖の構拱）の 3 種に便宜上分類して考へ，この第一種に對しては軸應力を主應力とし，第二種に對しては軸應力を副應力としてその彈性效果を無視するも，第三種に對しては軸應力彈性效果を輕々に無視し得ざるものとし，この要旨に基いて本文各例解に於ける應力算定の程度を要求してある。勿論このことは構造の力學的輕重（玆に構材の纖弱率即ち構材斷面の環動半徑に對する構材長の比の大なるものより成る構造を重構造，これと反するものを輕構造といふ）に關し，これを一律に考ふることを許されない。例へば伸縮性構造と雖も重構造なる場合に於ては各構材の曲力率は比較的大となる。かゝる重構造亦は重輕材混用の構造などに對しては連彈性公式中に含む各應力特に軸應力の項を適當に取捨して計算を簡易に導くことが時間經濟上から必要であらう。而して從來の實用構造の多くは各自上記の第一種若くは第二種に屬する各基本形より發達し來つたために第一種にして重構造なるもの或は第二種にして輕構造なるもの，又は重輕混用の構造の現今まで出現するの少なかりしは幸なるも，近代に於ける文化の生む各種混成の剛結構の將來の發達に對しては，軸應力及曲力率の混成に對する處理法の必要なることが切に感ぜらるゝのである。

第一章　公式の誘導とその適用

第一節　彈性基本式

一つの平面剛結構に對し第一圖の如く，その各構材の構成位置を成るべく簡明に規定し得る向きを以て直交座標 (xy) を設定し，その中の任意の構材 bc に就て，長さ，平均斷面積，斷面第二次率及材軸の x 方向に對する傾斜を夫々 l_{bc}, F_{bc}, I_{bc} 及 ω_{bc} で表はす。今構造の載荷によつて bc がその原位置 b_0c_0 に對して彈性變形をうけ，一般に軸應力 N_{bc}, 材端曲力率 M_{bc} 及 M_{cb} が惹起されたるとき，その彈性變形の性量は如何なるものにせよ，假りに構材端 b 及 c の x 方向に於ける變位を ξ_b 及 ξ_c, y 方向に於ける變位を η_b 及 η_c とする。

第一圖



然るとき軸應力は一般の如く材軸方向の相對變位のみに關して表され得るものとすれば，b 端及 c 端の軸方向に關する變位は夫々，(平面解析幾何學により)　$\xi_b\cos\omega_{bc}+\eta_b\sin\omega_{bc}$ 及 $\xi_c\cos\omega_{bc}+\eta_c\sin\omega_{bc}$

であるから，從つて b 端の軸應力 N_{bc} の値は，

$$N_{bc}=\frac{EF_{bc}}{l_{bc}}\{-\cos\omega_{bc}(\xi_b-\xi_c)-\sin\omega_{bc}(\eta_b-\eta_c)\}$$

$$=\frac{1}{H_{bc}}(-\alpha_{bc}\xi_{bc}-\beta_{bc}\eta_{bc})$$

但 $H_{bc}=\dfrac{l_{bc}}{EF_{bc}}$, $\alpha_{bc}=\cos\omega_{bc}$, $\beta_{bc}=\sin\omega_{bc}$, $\xi_{bc}=\xi_b-\xi_c$, $\eta_{bc}=\eta_b-\eta_c$, E＝材料彈性率

茲に軸應力の性質及各記號の取扱に就て次の如き便宜上の規約をする。

軸應力の符號規約

b 端外力が b 端を引張るものに對する軸應力を正とする。從つて N_{bc} の正號は張應力を表す。

接尾記號に關する規約

各項文字に附せる接尾記號及その序列は，その各文字項の座標方向に關する性質を表すと否とに拘らず濫りにそれを省略することは許されないが，形を簡單ならしむる上に於て特に他の項と意義混同の虞なき場合には，一つの集團項の主要なる文字項或は最後の文字項に就てのみこれを記載して表すものとする。

斯くして上式を次の如く簡單に表す。

$$\left.\begin{aligned}&N_{bc}=-\frac{\alpha}{H}\xi_{bc}-\frac{\beta}{H}\eta_{bc}\\ &\text{但}\quad H=\frac{l_{bc}}{EF_{bc}},\ \alpha=\cos\omega_{bc},\ \beta=\sin\omega_{bc},\ \xi_{bc}=\xi_b-\xi_c,\ \eta_{bc}=\eta_b-\eta_c\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

次に構材 bc の曲力率に關する彈性式を誘導せんに，變形と應力の關係値は座標轉位の影響をうけないから，今暫定的に b 及 bc の原位置を夫々原點及横軸とする直交座標 (vu) を假設し b 端及 c 端の材軸方向の變位を無視して力率效果のみに關する彈性線を考ふるに，その形式は次の三次整函數を以て表され得ることは Mohr の曲力率彈性線に關する法則より知られ得るのである。

$$u=A_3v^3+A_2v^2+A_1v+A_0$$

然るとき b 端の變角 θ_b の値は，

$$\theta_b=\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{v=0}=A_1$$

但し A_3, A_2, A_1 及 A_0 は次の如く構材 bc の環境條件によつて定まる係數であるが，茲では必要なる A_1 だけ

を求むればよいわけである。而して b 端及 c 端の材軸に對する直角變位は夫々,

$$-\xi_b \sin\omega_{bc}+\eta_b\cos\omega_{bc} \text{ 及 } -\xi_c\sin\omega_{bc}+\eta_c\cos\omega_{bc}$$

なるが故に環境條件として,

$$u_{v=0}=-\xi_b\sin\omega_{bc}+\eta_b\cos\omega_{bc},\qquad -EI_{bc}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)_{v=0}=M_{bc}$$

$$u_{v=l_{bc}}=-\xi_c\sin\omega_{bc}+\eta_c\cos\omega_{bc},\qquad EI_{bc}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)_{v=l_{bc}}=M_{cb}$$

を u 函數に代入し A_1 從つて θ_b を求むれば次式の如く，同時に曲力率及これに伴ふ剪應力の性質に關する符號規約を次の如く定むる。

$$\theta_b=\frac{l_{bc}}{6EI_{bc}}(2M_{bc}-M_{cb})+\frac{\sin\omega_{bc}}{l_{bc}}(\xi_b-\xi_c)-\frac{\cos\omega_{bc}}{l_{bc}}(\eta_b-\eta_c)$$

曲力率の符號規約

構材端に於ける曲力率 M の値はこれに對する外力率が右廻轉に作用するものを正とし，その剪應力の値はこれに接觸する外剪力と共に右廻轉偶力をなすが如き剪斷に作用せらるゝものに於て正とする。

更に構材 bc の b に連接する構材 ba に就て b 端變角 θ_b を求むるときは，これを計算するまでもなく，上式の c に a を代入したる同形の式として得らるゝことは明である。

今格點 a, b, c の序列に於て上式卽ち bc に關する彈性式と ab に關する夫れとを簡單なる形式を以て表せば,

$$2JM_{bc}-JM_{cb}=-\frac{\beta}{l}\xi_{bc}+\frac{\alpha}{l}\eta_{bc}+\theta_b \quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

$$2JM_{ba}-JM_{ab}=+\frac{\beta}{l}\xi_{ba}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ba}+\theta_b$$

或は

$$JM_{ab}-2JM_{ba}=+\frac{\beta}{l}\xi_{ab}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}-\theta_b \quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

但 $J=\dfrac{l}{6EI}$

θ_b の性質の如何に關せず，式 (i) と (ii) の間にこれを消去したる形式及それに公式 (1) の關係を代入して η 或は ξ を消去したるものを作り，同性異形の三つの式を準備すれば,

$$\left.\begin{aligned}
JM_{ab}-2JM_{ba}+2JM_{bc}-JM_{cb}&=+\frac{\beta}{l}\xi_{ab}-\frac{\beta}{l}\xi_{bc}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}+\frac{\alpha}{l}\eta_{bc}\cdots\cdots(\mathrm{i})\\
{}''\qquad &=+\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{bc}+\frac{1}{l\beta}\xi_{ab}-\frac{1}{l\beta}\xi_{bc}\cdots\cdots(\mathrm{ii})\\
{}''\qquad &=-\frac{H\beta}{l\alpha}N_{ab}+\frac{H\beta}{l\alpha}N_{bc}-\frac{1}{l\alpha}\eta_{ab}+\frac{1}{l\alpha}\eta_{bc}\cdots\cdots(\mathrm{iii})\\
\text{但}\ J=\frac{l}{6EI},\ H=\frac{l}{EF},\ \alpha=\cos\omega,\ \beta=\sin\omega,\ \xi_{ab}&=\xi_a-\xi_b,\ \ldots,\ \eta_{bc}=\eta_b-\eta_c
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

上式 (2) の (i) は二つの連構材 abc に關する格點の曲力率と相對變位との關係式であり，その (ii) 及 (iii) はこれに軸應力の關係を導入せるものであつて，何れも次節以下に述ぶる任意數の連構材に關する連彈性各公式の基本形となるものである。

前記の材端變角 θ の式 (i) 及 (ii) に對しても，これを連彈性公式作製に當つて適用するに便なる如く，構材 ab の θ_a 及構材 mn の θ_n として式の各項にこれに應ずる接尾字を與へ，及公式 (2) と同樣に η 或は ξ を N

によつて消去せる形式を準備すれば，

$$\left.\begin{aligned} 2JM_{ab}-JM_{ba} &= -\frac{\beta}{l}\xi_{ab}+\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}+\theta_a \\ {}'' \quad &= -\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}-\frac{1}{l\beta}\xi_{ab}+\theta_a \\ {}'' \quad &= +\frac{H\beta}{l\alpha}N_{ab}+\frac{1}{l\alpha}\eta_{ab}+\theta_a \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{aligned} JM_{mn}-2JM_{nm} &= +\frac{\beta}{l}\xi_{mn}-\frac{\alpha}{l}\eta_{mn}-\theta_n \\ {}'' \quad &= +\frac{H\alpha}{l\beta}N_{mn}+\frac{1}{l\beta}\xi_{mn}-\theta_n \\ {}'' \quad &= -\frac{H\beta}{l\alpha}N_{mn}-\frac{1}{l\alpha}\eta_{mn}-\theta_n \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

但 $J,\ H, \alpha, \beta, \xi_{mn},\ \ldots, \eta_{mn}$: 公式 (2) に同じ

尙ほ上の各公式例へば (2) の右邊に關してその兩翼に於ける ξ, η の交換によつて，

$$左邊=+\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}+\frac{H\beta}{l\alpha}N_{bc}+\frac{1}{l\beta}\xi_{ab}+\frac{1}{l\alpha}\eta_{bc}$$

$$'' \quad =-\frac{H\beta}{l\alpha}N_{ab}-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{bc}-\frac{1}{l\alpha}\eta_{ab}-\frac{1}{l\beta}\xi_{bc}$$

の存することになるが，多くの場合この使用までを要せざるが故に簡單のために公式中に書連ねることを省略する。

第二節　連彈性第一公式

本公式は任意數の連構材に關する各曲力率の連續代數和をその兩翼構材の格點に關する相對變位を以て表せる形式であつて，これを載荷せる剛結構の或る構材格點の相對變位が旣知なる環境に適用することにより，各曲力率の關係値を確定せんとするものである。

彈性基本式 (2) の右邊に於ける變位 ξ, η 或は軸應力 N の各項は二つの連構材 abc の左右翼に關して常に正負の同一係數を以て表され得るが故に，構造の任意數の連構材 $abc\ldots kmn$ の兩端 a, n を除く他の總ての中間格點に就てこの基本式を作り，それをそのまゝ無條件に加へ合すときは，正負の週期的に存在する前記右邊の各變形項は連構材の兩翼に關する項のみを殘して總て消失することは明である。

今基本式 (2) の三つの形式を夫々排列したるものに對してこの消去法を施せる結果は，

$$\left.\begin{aligned} &JM_{ab}-2JM_{ba}+3(JM_{bc}-JM_{cb}+\cdots\cdots+JM_{km}-JM_{mk})+2JM_{mn}-JM_{nm}=G \\ &但シ\ G=G_{ab}-G_{mn}=\frac{\beta}{l}\xi_{ab}-\frac{\beta}{l}\xi_{mn}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}+\frac{\alpha}{l}\eta_{mn} \\ &\qquad =\frac{1}{l\beta}\xi_{ab}-\frac{1}{l\beta}\xi_{mn}+\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{mn} \\ &\qquad =-\frac{1}{l\alpha}\eta_{ab}+\frac{1}{l\alpha}\eta_{mn}-\frac{H\beta}{l\alpha}N_{ab}+\frac{H\beta}{l\alpha}N_{mn} \\ &J=\frac{l}{6EI},\ H=\frac{l}{EF},\ \alpha=\cos\omega,\ \beta=\sin\omega,\ \xi_{ab}=\xi_a-\xi_b,\ \ldots,\ \eta_{mn}=\eta_m-\eta_n \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

この式はその性質上から簡單に，相對變位の彈性條件式と稱せらるべきものであつて，その左邊 JM の符號は

＋－．．．．＋－，その係數は 1, 2, 3,．．．．, 3, 2, 1 の連續排列であるから記憶に容易である。又右邊の G は連構材の兩翼材に關する相對變位の函數であつて，これが假定さるゝとき，或は既知なるとき，或は他の彈性式の G の同じ値によつて消去され得るときなど，上式は曲力率のみの式となりその解析に關する狀況が簡易となる。而して相對變位の項に代置し得べき軸應力伸縮の項即ち HN の項は相對變位の項が連構材兩翼の對稱狀態により零となる場合に於ては自らも零となるべきのみならず，軸應力を主應力とせざる構造にては最初よりこれを無視し得るものとして差支ないので，かゝる場合に於ける式 (5) の適用に對しては連構材兩翼の相對變位の關係さへ考へればよいことになる。斯くして $G=0$ となし得る狀態は實用せらるゝ剛結構に可なり多く存し，特に矩形或は梯形の集成構に於ては軸應力の彈性效果を無視する關係上，$G=0$ なる條件が常に現はるゝのである。例へば樹立矩形架構の同位層に於ける二つの任意垂直材の間，或は任意の水平材の間に於て直垂及水平方向を座標方向とするとき常にこの條件が起るのみならず，その構成及載荷の對稱なる場合に於ては任意の連構材に對して $G=0$ となることは說明を要しない。從つて式 (5) は多間多層の架構或は Vierendeel 桁などの解法に有利に適用され得るのである。

尙ほ任意形の剛構造に於て常に $G=0$ なる狀態は構造の任意の閉多角形の連構材を一周して $ab=mn$ なる如く兩翼材を重複せしむる場合，或は彈性固定の二つの支點を b 及 m ならしむる場合に起る。この彈性固定といふことはその變形が零なることであるが故に彈性固定の領域內を應力の零なる一つの虛構材と假想すれば，式 (5) に於てその兩翼材 ab, mn を虛構材と看做すことにより上述の如くこれを二つの彈性固定點の間に適用して便利なるのみならず，又二つの彈性固定點を挾んで常に連續的にこれを取扱ひ得るのであつて，この性質は次の補助公式により一層明瞭に了解せられ得るのである。

玆に補助公式と稱するは本公式を連構材の或る特別なる經路に適用して得らるゝ一つの變形式であつて，これ本公式の應用性を形式を以て說明するものに外ならない。

公式 (5) の兩翼に夫々基本式 (3) 及 (4) を加ふれば，即ち連構材 $abc\ldots\ldots kmn$ の兩端 a, n に對して基本公式 (3), (4) を，中間格點に對して基本式 (2) を適用すれば，

$$\left.\begin{aligned} &JM_{ab}-JM_{ba}+\cdots\cdots+JM_{mn}-JM_{nm}=G \\ \text{但}\quad &G=\frac{1}{3}(\theta_a-\theta_n) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

上式を閉多角形を一周して，或は彈性固定の二つの格點に對し適用するとき常に $G=0$ なるは一見して明であつて，このことは本公式 (5) に含まれてあるから，式 (6) の誘導は强いて必要はないが，唯だその形式が簡單なるため及特に支點の彈性度が假定せらるゝ場合などに公式 (5) の代用として便利である。

更に補助公式として基本式排列の取捨如何により，變形條件中に θ_a 或は θ_n の何れかを含まざるものも存するわけである。例へば θ_a だけを含むものを導けば，

$$\left.\begin{aligned} &3(JM_{ab}-JM_{ba}+\ldots\ldots+JM_{km}-JM_{mk})+2JM_{mn}-JM_{nm}=G \\ \text{但}\quad &G=\theta_a-\frac{\beta}{l}\xi_{mn}+\frac{\alpha}{l}\eta_{mn} \\ &\quad=\theta_a-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{mn}-\frac{1}{l\beta}\xi_{mn} \\ &\quad=\theta_a+\frac{H\beta}{l\alpha}N_{mn}+\frac{1}{l\alpha}\eta_{mn} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

この補助公式 (7) は本公式 (5) が彈性固定の格點に對し連續性を有することを再び說明するものである。

構造應力の解析に關して第一公式のみを以て條件不足なるものに對し，更に第二及第三公式が次に述ぶる如く與へられる。

第三節　連彈性第二公式

本公式は任意連構材の曲力率に關する縱距乘加の法則を示し，その連構材翼端の橫變位を構造格點の環境條件として適用せられ得べき性質を有するものである。

第一公式に於ては曲力率の連加によつて連構材の兩翼に關する相對變位の條件式を得たのであるが，こゝに更に各曲力率間の縱橫距の關係を含む彈性條件式を準備するの必要あり，先づ第二公式として縱距に對する關係,即ち假設せる座標表示 (xy) を以て言へば，構材格點間の y 方向の距離關係を各曲力率に附與せる條件式を作らんとするもので，これには連構材 $abc....kmn$ の各格點に關して基本式 (2) (ii) 及 (3), (4) を適當に排列取捨せるものに就て縱距を乘加し，中間格點變位を驅逐せる形式を作り得るが，その計算の便宜上，次（第四節文末記載）に提案せる數學計算を參照し，それによつて計算行程を省略して彈性式を直接書下すことにする。即ちこの場合基本式の各項と數學計算式の各項との間に於て，

$$u=H\alpha N+\xi,\qquad v=l\beta,\qquad f_0=\sum H\alpha N+\sum\xi=\sum H\alpha N+\xi_a-\xi_n$$

が對應するから，連構材兩翼端の橫變位 ξ_a 及 ξ_n の條件式を誘出せんには，基本式 (2) (ii) の排列に對し數學計算式 (I) (i) を參照して，

$$\left.\begin{aligned}
&JM_{ab}\left(0+\sum_b^n l\beta\right)-JM_{ba}\left(2\sum_b^n l\beta+0\right)+JM_{bc}\left(2\sum_b^n l\beta+\sum_c^n l\beta\right)\\
&\quad -JM_{cb}\left(2\sum_c^n l\beta+\sum_b^n l\beta\right)+\ldots\ldots+JM_{km}\left(2\sum_k^n l\beta+\sum_m^n l\beta\right)-JM_{mk}\left(2\sum_m^n l\beta+\sum_k^n l\beta\right)\\
&\quad +JM_{mn}\left(2\sum_m^n l\beta+0\right)-JM_{nm}\left(0+\sum_m^n l\beta\right)+\sum_a^n(H\alpha N)=G\\
&\text{但}\quad G=(H\alpha N_{ab}+\xi_{ab})\frac{\sum_a^n l\beta}{l\beta_{ab}}-(\xi_a-\xi_n)\\
&\sum_a^n l\beta=l\beta_{ab}+\ldots\ldots+l\beta_{mn},\ \ldots\ldots,\ \sum_m^n l\beta=l\beta_{mn}\\
&J,H,\alpha,\beta,\xi_{ab}:\quad \text{公式 (5) と同樣}
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

上式に於て任意の一構材 bc に關する JM_{bc} 及 JM_{cb} の二つの係數 $\sum_b l\beta$ 及 $\sum_c l\beta$ は謂ふまでもなく b 及 c より連構材翼端 n に至る縱距であつて，b 點に關する M_{bc} に對しては b 點縱距が 2 倍，c 點に關する M_{cb} に對しては c 點縱距が 2 倍の影響を有すること,及連構材兩端 a, n に關する縱距がこの場合零なること，又各 JM の符號は連續して $+-....+-$ なることは記憶するに難くはない。

解法に當り軸應力效果の項 $\sum(H\alpha N)$ は構造の性狀によりてこれを取捨すればよく，變形條件 G は，例へば連構材の兩端 a 及 n が縱距に關し同位にあるときに，$\sum l\beta=0$ であるから $G=-(\xi_a-\xi_n)$ となり，或は翼材 ab を虛構材と看做して b を彈性固定點に採れば $G=\xi_n$ となり，更に b 及 m を彈性固定點に採れば $G=0$ となる。この $G=-(\xi_a-\xi_n)$ 或は $G=\xi_n$ の適用さるゝ例としては構造の二つの格點 a 及 n を共通とする 2 種の連構材に關して G を消去する如きことが屢起るが，特に $G=\xi_n$ なる場合は格點 n の橫變位 ξ_n に或る條件が與へら

るゝ場合，例へば拱構に於ける對稱中心格點の如き水平變位の起らざる格點を n に採れば $G=0$ となし得るなど本公式に重要なる適用性の存することが注目に値するのである。

次に參考までに補助公式の一つとして θ_a を環境條件中に含むものを導かんには，基本式 (2) 及 (3) の排列に對し數學計算式 (II) (i) を參照して

$$\left.\begin{aligned}
&JM_{ab}(2\sum_a^n l\beta+\sum_b^n l\beta)-JM_{ba}(2\sum_b^n l\beta+\sum_a^n l\beta)+\cdots\cdots+M_{km}(2\sum_k^n l\beta+\sum_m^n l\beta)\\
&\quad -JM_{mk}(2\sum_m^n l\beta+\sum_k^n l\beta)+JM_{mn}(2\sum_m^n l\beta+0)-JM_{nm}(0+\sum_m^n l\beta)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\sum_a^n(H\alpha N)=G\\
&\text{但}\qquad G=\theta_a\sum_a^n l\beta-(\xi_a-\xi_n)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

上式は本公式 (8) に於ける中間格點例へば b を彈性支點に採り b を a として表したるものに外ならないのである。

他の補助公式として θ_n を含むものを直接求めんには基本式 (2) 及 (3) の排列に對し，數學計算式 (II) (ii) を參照すればよいが，これは式 (9) に就てその連構材の序列を逆順に採つて得らるゝものに過ぎず且つ解析に對し必ずしも必要なるものでないからこれを省略する。

第四節　連彈性第三公式

本公式は，第二公式が連構材端の横變位を條件として曲力率と縱距との關係を表はすに代ふるに，材端の縱變位を條件として曲力率と横距との關係を示すものであつて，これを直接求むるには基本式 (2) (iii) の排列に對し數學計算式 (I) (i) を參照すればよいが，或はこれを第二公式 (8) を參照して求めんには同式に就て ξ と η とを交代し及 $\omega=\dfrac{1}{2}\pi+\omega$ を與へて，卽ち $\xi=\eta,\ \beta=-\alpha,\ \alpha=\beta$ を代置して得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&JM_{ab}(0+\sum_b^n l\alpha)-JM_{ba}(2\sum_b^n l\alpha+0)+JM_{bc}(2\sum_b^n l\alpha+\sum_c^n l\alpha)-JM_{cb}(2\sum_c^n l\alpha+\sum_b^n l\alpha)+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots+JM_{km}(2\sum_k^n l\alpha+\sum_m^n l\alpha)-JM_{mk}(2\sum_m^n l\alpha+\sum_k^n l\alpha)+JM_{mn}(2\sum_m^n l\alpha+0)\\
&-JM_{nm}(0+\sum_m^n l\alpha)-\sum(H\beta N)=G\\
&\text{但}\quad G=-(H\beta N_{ab}+\eta_{ab})\frac{\sum_a^n l\alpha}{l\alpha_{ab}}+(\eta_a-\eta_n)\\
&\sum_a^n l\alpha=l\alpha_{ab}+\cdots\cdots+l\alpha_{mn},\ \cdots\cdots,\ \sum_m^n l\alpha=l\alpha_{mn}\\
&J,\ H,\ \alpha,\ \beta,\ \eta_{ab}:\ \text{公式 (5) と同樣}
\end{aligned}\right\}\cdots(10)$$

補助公式として θ_a を含むものを公式 (9) を參照して作れば，

$$JM_{ab}(2\sum_a^n l\alpha+\sum_b^n l\alpha)-JM_{ba}(2\sum_b^n l\alpha+\sum_a^n l\alpha)+\cdots\cdots+JM_{km}(2\sum_k^n l\alpha+\sum_m^n l\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned}&-JM_{mk}(2\sum_{m}^{n}l\alpha+\sum_{k}^{n}l\alpha)+JM_{mn}(2\sum_{m}^{n}l\alpha+0)-JM_{nn}(0+\sum_{m}^{n}l\alpha)-\sum_{a}^{n}(H\beta N)=G\\ &\text{但}\quad G=\theta_a\sum_{a}^{n}l\alpha+(\eta_a-\eta_n)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(11)$$

第三公式を縱變位の有する構造格點に適用して，直接 $G=0$ ならしめ得るは軸應力效果を無視し得べき縱材の兩端に a 及 n を採るときにあるが，他の多くの中間格點に對して $G=0$ ならしめ得る機會は少いから，然るときは他の條件式によつて G を消去することなどが要求される。

以上第一乃至第三公式は，一般には，構造格點の彈性變形の既知條件に對して適用せらるゝのであるから，各種の載荷狀態に因る構造の彈性狀況を推知せねばならない。然しその彈性變形に對する誤らざる判斷には，撓度撓角法及定點法などに於て彈性變形の性狀に對し適正にこれを判斷及採擇して解法に關する徒なる計算を避けるを要すると同程度の彈性智識及考慮が拂はるれば足るのであつて，從つて本公式適用に對する彈性變形の觀念に關して新に異なるものが要求されてないことは勿論である。

連彈性各公式を連構材 $abc\ldots\ldots kmn$ に對して作ることを，以下の解法に於て簡單に言表さんために記號，$M_{abc\ldots\ldots kmn}$ を用ひ，何公式 $M_{abc\ldots\ldots kmn}$ を適用するといふことにする。

數學計算式（參照用）

$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_r=f_0$ なる條件を有する r 個の不定量 $u_1, u_2\ldots\ldots u_r$ が夫々 $v_1, v_2\ldots\ldots v_r$ を係數として次に示さるる如き形式の $(r+1)$ 個の正負の週期函數 $f_1, f_2\ldots\ldots f_r, f_{r+1}$ にて排列さるゝとき，それら各函數の兩邊に與へらるゝ如き符號序列を有する係數 $\sum v$ を順次に乘じて各邊を累加すれば，函數 f の任意數の存在に應じ r 個の不定量の一部或は全部を驅逐して一つの條件函數を導くことが出來る。即ち

	f 函數	$\sum v$ 係數
(1)	$\left(f_1=\qquad\pm\dfrac{u_1}{v_1}\right)$	$\{+v_1+v_2+\ldots\ldots+v_{r-1}+v_r\}$
(2)	$\left(f_2=\mp\dfrac{u_1}{v_1}\;\pm\dfrac{u_2}{v_2}\right)$	$\{-v_1+(v_2+\ldots\ldots+v_{r-1}+v_r)\}$
	…………………………………	
(r)	$\left(f_r=\mp\dfrac{u_{r-1}}{v_{r-1}}\pm\dfrac{u_r}{v_r}\right)$	$\{-(v_1+v_2+\ldots\ldots+v_{r-1})+v_r\}$
$(r+1)$	$\left(f_{r+1}=\mp\dfrac{u_r}{v_r}\qquad\right)$	$\{-(v_1+v_2+\ldots\ldots+v_{r-1}+v_r)\}$ の排列に於て，

(I). (1) 式及 $(r+1)$ 式を缺く場合に，

$\sum v$ の負號の項を總て零として f 函數の左，右邊を累加すれば，

(i) $$f_2\left(\sum_2^r v\right)+f_3\left(\sum_3^r v\right)+\ldots\ldots+f_{r-1}(v_{r-1}+v_r)+f_r(v_r)=\pm f_0\mp\frac{u_1}{v_1}\left(\sum_1^r v\right)$$

$\sum v$ の正號なるものを總て零とすれば，

(ii) $$f_2(v_1)+f_3(v_1+v_2)+\ldots\ldots+f_{r-1}\left(\sum_1^{r-2}v\right)+f_r\left(\sum^{r-1}v\right)=\mp f_0\pm\frac{u_r}{v_r}\left(\sum_1^r v\right)$$

(II). (1) 式或は $(r+1)$ 式を缺く場合の中，

$(r+1)$ 式を缺くものとし，乘數 $\sum v$ の負號の項を總て零にすれば，

(i) $$f_1\left(\sum_1^r v\right)+f_2\left(\sum_2^r v\right)+\ldots\ldots+f_{r-1}(v_{r-1}+v_r)+f_r(v_r)=\pm f_0$$

(1) 式を缺くものとし，$\sum v$ の正號なるものを總て零にすれば，

$$\text{(ii)} \qquad f_2(v_1)+f_3(v_1+v_2)+\ldots\ldots+f_r\left(\sum_1^{r-1}v\right)+f_{r+1}\left(\sum_1^{r}v\right)=\mp f_0$$

第五節　連構材に關する應力平衡式

剛結構から任意の連構材 $abc\ldots\ldots kmn$ を第二圖の如く切離して考ふるとき，その任意の中間格點，例へば b 點の平衡に關する諸力としては，曲力率 M_{ba}, M_{bc} 剪應力 Q_{ba}, Q_{bc} 軸應力 N_{ba}, N_{bc} と，b 點を格點とする他の i 個の隣接構材群 $b1, b2, \ldots\ldots bi$ の b 點に關する曲力率 $M_{b1}, M_{b2}\ldots\ldots M_{bi}$ 剪應力 $Q_{b1}, Q_{b2}\ldots\ldots Q_{bi}$ 軸應力 $N_{b1}, N_{b2}\ldots\ldots N_{bi}$ 及格點荷重 P_b が存する。即ち 3×2 個の連構材の應力，$3i$ 個の隣接構材群の應力及 1 個の格點荷重であるが唯だ材端 a, n に於ては連構材應力は 3 個となる。而して その中，隣接構材群の各力は連構材に對して外力の立場に於て作用するものであるが，勿論それが隣接構材群の應力として存する以上はその狀態の下に，さきの各力に關する符號規約に基き任意格點に關し，或は連構材の任意部分に關し，總ての力の靜平衡關係を求むれば，玆に三つの必要にして充分なる條件があり，この條件を連構材應力の解法に用ふる便宜上に於て，これを亦次の如く種々の異なる形式を以て表すことが出來る。

1. 任意格點に關する平衡條件

連構材 $abc\ldots\ldots kmn$ の各格點に關する力率及直力の座標方向に關する分力の各平衡式を任意格點 b に於ける 2 構材 bc, ba 及こゝに結接する他の i 個の構材 $b1, b2\ldots\ldots bi$ に就て表せば，

$$\sum M_{bc}=0$$
$$\sum Q_{bcx}+\sum N_{bcx}+P_{bx}=0$$
$$\sum Q_{bcy}+\sum N_{bcy}+P_{by}=0$$

玆に $Q_{bcx}, \ldots\ldots, P_{by}$ は Q_{bc} の x 方向の分力，$\ldots\ldots$，P_b の y 方向の分力を表はす。上式を各構材の方向餘弦 α, β によつて表はすときは，

$$\left.\begin{array}{ll}\sum^{i} M_{bc}=0 & \text{(i)}\\ \sum^{i}(-\beta Q_{bc}+\alpha N_{bc})+P_{bx}=0 & \text{(ii)}\\ \sum^{i}(\alpha Q_{bc}+\beta N_{bc})+P_{by}=0 & \text{(iii)}\\ \text{但}\quad \sum^{i}:\ c, a, 1, 2, \ldots\ldots i\ \text{に關す} & \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

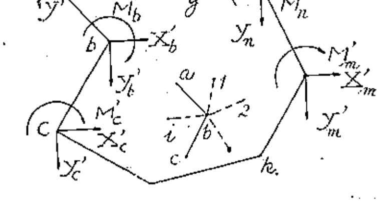
この (ii) 及 (iii) は解析幾何の概意のみならず應力圖解によつて容易に書下され得るのである。

解法に當つて構材の軸應力彈性效果を無視する場合には式中の N の値は他の構材の Q の値にて表さるゝことになり，亦格間荷重を假定せざる場合の Q は，一般に構材 bc に關して，

$$Q_{bc}-Q_{cb}=0$$
$$M_{bc}+M_{cb}+lQ_{bc}=0$$

を以て表さるゝことは別に說明を要せないことである。

第 二 圖



2. 連構材の任意部分に關する平衡條件

連構材の各格點に及ぼす隣接部の各作用力（例へば隣接構材群或は

支點の作用力又は格點荷重など）を，便宜上暫く**第二圖**に示す如く，外力に關する正の向きに假定したるものを格點毎に綜合して M', X', Y' にて表はし，連構材 $abc\ldots\ldots kmn$ に關する力率及直力の平衡條件式を翼構材 ab 部より初めて，abc, $abcd$, ..., $abc\ldots\ldots kmn$ の各部に對し適用して特に連續せる等式の形に作れば，

$$\left.\begin{aligned}
0&=(M_a'+X_a'l\beta_{ab}-Y_a'l\alpha_{ab})+M_{ba}\\
&=\left(M_a'+X_a'\sum_a^c l\beta-Y_a'\sum_a^c l\alpha\right)+(M_b'+X_b'l\beta_{bc}-Y_b'l\alpha_{bc})+M_{cb}\\
&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\left(M_a'+X_a'\sum_a^n l\beta-Y_a'\sum_a^n l\alpha\right)+\left(M_b'+X_b'\sum_b^n l\beta-Y_b'\sum_b^n l\alpha\right)+\ldots\\
&\qquad\ldots+(M_m'+X_m'l\beta_{mn}-Y_m'l\alpha_{mn})+M_n' \qquad\ldots\ldots(\mathrm{i})\\
0&=X_a'-\beta Q_{ab}+\alpha N_{ab}\\
&=X_a'+X_b'-\beta Q_{bc}+\alpha N_{bc}\\
&=\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=X_a'+X_b'+\ldots+X_m'-\beta Q_{mn}+\alpha N_{mn}\\
&=X_a'+X_b'+\ldots+X_m'+X_n' \qquad\ldots\ldots(\mathrm{ii})\\
0&=Y_a'+\alpha Q_{ab}+\beta N_{ab}\\
&=Y_a'+Y_b'+\alpha Q_{bc}+\beta N_{bc}\\
&=\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=Y_a'+Y_b'+\ldots+Y_m'+\alpha Q_{mn}+\beta N_{mn}\\
&=Y_a'+Y_b'+\ldots+Y_m'+Y_n' \qquad\ldots\ldots(\mathrm{iii})
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(13)$$

上式中の M' は普通には不定量であり，亦 X', Y' も格點荷重或は特別なる形式の格點反力などを除き一般には不定量である。而して應力計算に上式を利用するは隣接部との連接を截斷せられたる格點に於ける M', X', Y' の値をその點に關する連構材の應力を以て表はすか或は隣接各構材群の應力若くは支點反力の項などを以て表はし連彈性公式と協同してそれら各應力を見出すべき要求に應ずるにあるから，今，

a）M', X', Y' を連構材格點に關する應力の項にて表さんために，任意格點として b を採れば公式 (12) を參照し座標表示例へば $\alpha_{ba}=-\alpha_{ab}$, $\beta_{ba}=-\beta_{ab}$ なることを注意して，

$$\left.\begin{aligned}
M_b'&=M_{ba}+M_{bc}\\
X_b'&=-(-\beta Q_{ba}+\alpha N_{ba}-\beta Q_{bc}+\alpha N_{bc})=-\beta_{ab}Q_{ba}+\alpha_{ab}N_{ba}+\beta Q_{bc}-\alpha N_{bc}\\
Y_b'&=-(\alpha Q_{ba}+\beta N_{ba}+\alpha Q_{bc}+\beta N_{bc})=\alpha_{ab}Q_{ba}+\beta_{ab}N_{ba}-\alpha Q_{bc}-\beta N_{bc}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(14)\mathrm{a}$$

b）M', X', Y' を任意格點として採りたる b に就て連構材と結接せる i 個の構材群 $b1, b2, \ldots\ldots bi$ の各應力に分解して表せば，

$$\left.\begin{aligned}
M_b'&\equiv-\sum M_{bi}\\
X_b'&\equiv-\sum\beta Q_{bi}+\sum\alpha N_{bi}+P_{bx}\\
Y_b'&\equiv\sum\alpha Q_{bi}+\sum\beta N_{bi}+P_{by}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)\mathrm{b}$$

次に參考までに式 (14)a の値を式 (13) の $abc\ldots\ldots kmn$ 部に關する等式，即ち三種平衡式の最後の等式に代置すれば，

$$
\left.
\begin{aligned}
0=&\left(M_a'+X_a'\sum_a^n l\beta-Y_a'\sum_a^n l\alpha\right)\\
&+\left\{M_{ba}+M_{bc}-Q_{ba}\left(\beta_{ab}\sum_b^n l\beta+\alpha_{ab}\sum_b^n l\alpha\right)-N_{ba}\left(\beta_{ab}\sum_b^n l\alpha-\alpha_{ab}\sum_b^n l\beta\right)\right.\\
&\left.+Q_{bc}\left(\beta_{bc}\sum_b^n l\beta+\alpha_{bc}\sum_b^n l\alpha\right)+N_{bc}\left(\beta_{bc}\sum_b^n l\alpha-\alpha_{bc}\sum_b^n l\beta\right)\right\}+\dots\\
&\dots+(M_m'+X_m'l\beta_{mn}-Y_m'l\alpha_{mn})+M_n' \qquad \dots(\mathrm{i})\\
0=&X_a'+\{-\beta_{ab}Q_{ba}+\alpha_{ab}N_{ba}+\beta Q_{bc}-\alpha N_{bc}\}+X_c'+\dots+X_n' \qquad \dots(\mathrm{ii})\\
0=&Y_a'+\{\alpha_{ab}Q_{ba}+\beta_{ab}N_{ba}-\alpha Q_{bc}-\beta N_{bc}\}+Y_c'+\dots+Y_n' \qquad \dots(\mathrm{iii})
\end{aligned}
\right\}\dots\dots(13)'
$$

b 點に關する項, { } 以外の項に就ても必要に應じ同樣に代置すればよい。

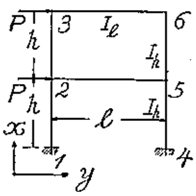
尙ほ式 (13) 及 (13)′ は任意の連構材の靜平衡式なるのみならず, 構造が連構材の集成體なることより, これを, 構造系の任意部分卽ち二つの假設截斷面間, 或は一つの截斷面の一側に於ける構造部分の靜平衡條件に適用し得ることは勿論であつて, このとき截斷の影響なき格點に於てはそれに關する構材應力 M, Q, N の項が總て平衡關係によつて消失し, 外力 P のみが作用することは明である。

第六節　諸公式の簡單なる適用例

連彈性各公式を簡單なる剛結構に適用してその例解により公式應用上の說明を補ふことにし, 次の如く構造の性狀を多少異にする三つの例を記載する。

例題 I.

第三圖



第三圖に示す對稱矩形架構の水平格點荷重による構材曲力率の値を求むること。但し構材剛比に就て $J_h/J_l=hI_l/lI_h=1$ とす。

解法　座標方向を圖の如く與へ, 下層から逐次計算を進めんに, 軸應力變形效果を普通の如く無視する結果は各水平材兩端に關する相對變位が零であるから, 公式 (5) を適用しその兩翼を水平材に採れば $G=0$ となる。更に靜平衡條件として曲力率と剪力に關する二つのものを考ふれば各層に於ける三つの曲力率の値が算出される。斯くして使用公式は,

水平材を兩翼とする公式 (5), M_{abcd},　　$M_{ab}-2M_{ba}+3(M_{bc}-M_{cb})+2M_{cd}-M_{dc}=0$ ....(I)

格點曲力率に關する平衡式, (12) (i),　　$\Sigma M=0$ ....(II)

各層水平剪斷面に關する平衡式, (13) (iii),　　$\Sigma(Y'+\alpha Q)_{\alpha=\pm1}=0$ ....(III)

であつて M_{12} を暫定的未知量とし, 構造の對稱による $M_{52}=M_{25}$, $M_{63}=M_{36}$ を適宜に加入せしむると計算は次の如くなる。

(1)　$-Y_1'+Q_{12}=0$ 或は $P-Q_{21}=0$ 何れによるも, $M_{21}=-M_{12}-Ph$ ....公式 (III) 適用

(2)　$3M_{12}-3M_{21}+2M_{25}-M_{52}=0$ より, $M_{25}=-6M_{12}-3Ph$　　(I) 〃

(3)　$M_{23}=-M_{21}-M_{25}=7M_{12}+4Ph$　　(II) 〃

(4)　$M_{32}=-M_{23}-0.5Ph=-7M_{12}-4.5Ph$　　(III) 〃

(5)　$M_{52}-2M_{25}+3M_{23}-3M_{32}+2M_{36}-M_{63}=0$ より, $55M_{12}+33Ph=0$　　(I), (II) 〃

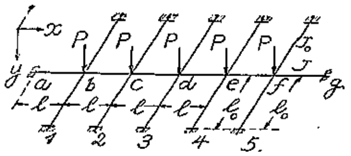
∴ (5), $M_{12}=-0.6Ph$

(1), $M_{21}=-0.4Ph$　(2), $M_{25}=+0.6Ph$　(3), $M_{23}=-0.2Ph$　(4), $M_{32}=-0.3Ph$

例題 II.

第四圖の水平格子構に於ける曲力率及扭力率の値を算定すること。但し任意の水平材 ij の兩端變角（扭角）θ_i 及 θ_j による i 端扭力率 T_{ij} の値は $LT_{ij}=\theta_i-\theta_j$（但 L は係數）にて表され，その性質に關しては變角の作用垂直構面に於ける曲力率の符號規約に應ずるものとし，計算に於ては縱材の斷面係數 J 及長さ l，橫材の斷面係數 J_0, L 及長さ l_0 に對して $J/L=2/3$, $lJ/l_0J_0=1$, $l/l_0=0.5$, 荷重に對し $P_b=P_c=\ldots\ldots=P$ を與へ，軸力變形效果を無視するものとす。

第四圖



解法　嚴正には，この構造は應力變形に關して立體的であるが，荷重面に構造の對稱軸があるので特に立體構に關する扭力率論がなくとも荷重面の縱材 ab 等とこれに垂直なる橫材 $b1$ 等の彈性變形を各別に取扱ふて簡單に問題が解決される。即ちこの場合，縱橫夫々の連構材の一平面上に關する彈性變形の獨立性を利用し應力と變形の置換を行へば，平面構の力率理論と問題に與へられある但書とにより處置が付くのである。

橫材の曲力率彈性式を任意の d_3 に就て作らんに，これが單材であるが故に普ゆる種類の公式よりこれを誘出することが出來るが，これを第一公式 (5) よりするものとして，$J_0M_{3d}-2J_0M_{d3}=-\frac{1}{l_0}\eta_{3d}$ 及對稱形による $M_{3d}=M_{d3}$ を與へて，

$$l_0J_0M_{d3}=-\eta_d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

橫材の扭力率式に關しては問題に與へられある如く，

$$LJ_{d3}=\theta_d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

次に縱材 $ab, bc\ldots\ldots$ に就ては上記の 2 種の彈性變形に對應する二つの條件式として第三公式 (11) と第一公式 (6) とを適用することゝし，その適用すべき連構材の領域はこれを成るべく少數にすれば計算が簡單に行くが，玆では構材數が少いから何れの公式に於ても固定支點 a を公式の起點に採ることにする。即ちこの二つの連彈性式を M_{abcd} として適用し，これに上式 (i) 及 (ii) を挿入すれば，

$$lJ(8M_{ab}-7M_{ba}+5M_{bc}-4M_{cb}+2M_{cd}-M_{dc})=-\eta_d=l_0J_0M_{d3}$$

$$3J(M_{ab}-M_{ba}+M_{bc}-M_{cb}+M_{cd}-M_{dc})=-\theta_d=-LT_{d3}$$

即ち

$$8M_{ab}-7M_{ba}+5M_{bc}-4M_{cb}+2M_{cd}-M_{dc}=M_{d3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$2(M_{ab}-M_{ba}+M_{bc}-M_{cb}+M_{cd}-M_{dc})=-T_{d3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

玆に式 (I) に於て適用構材數が一つ宛減ずるによつてその左邊項數が二つ宛減じ從つて 數係數の排列が 5421, 21 に減ずる。更に格點 d に關して靜平衡條件式 (12) (i) 及 (iii) を作れば．$\alpha=\cos 0°=1$, $\alpha=\cos 2\pi=-1$ なるにより，

$$\sum M_d=0,\quad M_{dc}+M_{de}=2T_{d3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

$$\sum Q_d=0,\quad M_{cd}+M_{dc}-M_{de}-M_{ed}+2M_{d3}+P_dl=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

斯くして任意點 d に關する上記公式 (I) 乃至 (IV) を縱材の各格點に適用して次の如く構造の左翼端より逐次解法を進め得るが，このとき M_{ab} と M_{ba} を暫定的の未知量とし，最後の二つの條件式によりこれを旣定量とせるものを代入したる解答を便宜上，第二列に續記して表すことにする。

計算

	M_{ab}	M_{ba}	Pl	Pl	公式適用
(1)	$M_{1b}=M_{b1}=+2$	-1	0	$=-0.313$	……..(I) を b 點に適用
(2)	$T_{1b}=T_{b1}=-2$	$+2$	0	$=+0.112$	(II) b 〃
(3)	$M_{b3}=+4$	-5	0	$=-0.022$	(III) b 〃
(4)	$M_{cb}=+1$	$+4$	$+1$	$=-0.063$	(IV) b 〃
(5)	$M_{2c}=M_{c2}=+12$	-18	-1	$=-0.462$	(I) c 〃
(6)	$T_{2c}=T_{c2}=-8$	$+20$	$+2$	$=+0.030$	(II) c 〃
(7)	$M_{cd}=+15$	-44	-5	$=+0.0025$	(III) c 〃
(8)	$M_{dc}=+14$	$+7$	$+5$	$=-0.013$	(IV) c 〃
(9)	$M_{3d}=M_{d3}=+40$	-143	-19	$=-0.490$	(I) d 〃

公式 (II) 及 (IV) に構造が格點 d に關して對稱なる條件を與へて得る次の二式より M_{ab} 及 M_{ba} を確定すれば,

M_{ab}	M_{ba}	Pl
$T_{d3}=-10$	$+122$	$+22=0$
$\sum Q_d l=+69$	-180	$-18.5=0$

(10) $M_{ab}=-0.2573Pl$

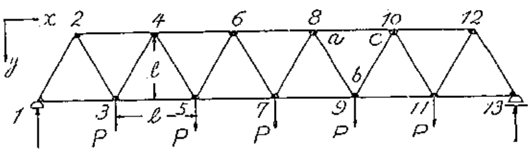
(11) $M_{b2}=-0.2014Pl$

この値を上式 (1) 乃至 (9) に代入するには, M_{ab} 及 M_{ba} の數値に對し 1 より 9 倍までの乘數表を準備し, 掛算の代りに加算をすれば計算が容易となる。

例題 III.

第五圖は長さ l, 斷面 F, 斷面二次率 I なる構材より成る徑間 $6l$ の正三角形鋲結構である。載荷弦に於ける等格點荷重 Pに因つて惹起さるゝ各構材曲力率の値を副應力 (secondary stress) として算定すること。

第 五 圖



解法 本問題に於ては主應力としての構材軸應力の分割計算が認めらるゝものとするのであるから, それに依つて格點變位が總て既知量となり, 從つて曲力率計算も容易となる。彈性式中に含まるべき相對變位の値は鉸結構に關する從來の諸方法例へば假想働計算法, Williot Mohr 圖計算, W-Gewicht 法などに依つて求めてもよいが, 寧ろ本文公式 (1) に依つて計算し, 必要なれば, 結果の一二を W-Gewicht 法に依つて檢定する方が簡明であらう。玆にその計算行程は本問に對する從計算であるからこれを省略して, 曲力率計算に必要なる數値を次表の如く與へる。

構材 ij に關する相對變位

構材記號	G	構材記號	G	構材記號	G
斜材 12	$25.00\,\dfrac{P}{EF}$	斜材 67	$3.3\dot{3}\,\dfrac{P}{EF}$	下弦材 13	$29.1\dot{6}\,\dfrac{P}{EF}$
〃 23	$23.3\dot{3}$ 〃	〃 78	$-3.3\dot{3}$ 〃	〃 35	$20.1\dot{6}$ 〃
〃 34	$19.3\dot{3}$ 〃	上弦材 24	$25.3\dot{3}$ 〃	〃 57	$7.1\dot{6}$ 〃

構材記號		G	構材記號		G	構材記號		G
〃	45	15.00 〃	〃	46	14.00 〃	〃	79	$-7.1\dot{6}$ 〃
〃	56	9.00 〃	〃	68	0			

注意 $G_{ij}=\frac{\beta}{l}\xi_{ij}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ij}=\frac{\beta}{l}\xi_{ji}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ji}=G_{ji}$

各構材の曲力率に對しては任意の三角構素 abc（圖の 8, 9, 10 格點にて示す）に於て ab が旣知なるとき他の二邊 bc 及 ca を求むることが出來れば，これを構造の翼端より初めて逐次解法を進め得ることになる。

M_{bc} は構材 bc が弦材なるとき格點力率の平衡條件より直ちに定まる。即ち

$$\sum M_b=0 \quad\text{.......................}(\text{I})$$

M_{cb} は一般に第一公式 (5), M_{abc} の適用, $J(M_{ab}-2M_{ba}+2M_{bc}-M_{cb})=G_{ab}-G_{bc}$ より,

$$M_{cb}=2M_{bc}-2M_{ba}+M_{ab}+6(G_{bc}'-G_{ab}')\frac{r^2}{l^2}Pl \quad\text{.......................}(\text{II})$$

但 $G'=G$ 表の數係數, $\frac{r}{l}$ = 構材纖弱率

次に M_{ac} 及 M_{ca} に對してはこれを一般に二邊が旣知なる三角形より他の一邊を解く方法として第一公式 (5) M_{acb} 及 M_{cab} の排列より M_{ac} 及 M_{ca} の項を抽出する。即ち

$$M_{ac}-2M_{ca}+2M_{cb}-M_{bc}=\frac{1}{J}(G_{ac}-G_{cb})=6(G_{ac}'-G_{cb}')\frac{r^2}{l^2}Pl$$

及

$$M_{ca}-2M_{ac}+2M_{ab}-M_{ba}=\frac{1}{J}(G_{ac}-G_{ab})=6(G_{ac}'-G_{ab}')\frac{r^2}{l^2}Pl$$

より

$$\left.\begin{aligned}M_{ac}&=\frac{1}{3}(4M_{ab}-2M_{ba}+2M_{cb}-M_{bc})+(4G_{ab}'+2G_{cb}'-6G_{ac}')\frac{r^2}{l^2}Pl\\ M_{ca}&=\frac{1}{3}(4M_{cb}-2M_{bc}+2M_{ab}-M_{ba})+(4G_{cb}'+2G_{ab}'-6G_{ac}')\frac{r^2}{l^2}Pl\end{aligned}\right\}\quad\text{...............}(\text{III})$$

斯くの如くして上式 (I) (II) 及 (III) より逐次各構材の曲力率を求め得るが，計算の照査として任意の閉多角形に對し第一公式 (5) 或は (6),

$$M_{ab}-M_{ba}+\ldots.+M_{ma}-M_{am}=0$$

を以て檢定すれば爾後の計算に對し不安なくして進むことが出來る。この場合には三角形毎に照査すれば簡便である。

計算 便宜上，左翼端に於ける M_{12} と M_{21} を未知量に採ると，$\Delta 123$ に就て，

(1) $M_{13}=-M_{12}$

(2) $M_{31}=2M_{13}-2M_{12}+M_{21}+6(29.1\dot{6}-25)\frac{r^2}{l^2}Pl=-4M_{12}+M_{21}+25\frac{r^2}{l^2}Pl$ ....公式 (II) 適用

(3) $M_{23}=\frac{1}{3}(4M_{21}-2M_{12}+2M_{31}-M_{13})+(4\times 25+2\times 29.1\dot{6}-6\times 23.3\dot{3})\frac{r^2}{l^2}Pl$

$=-3M_{12}+2M_{21}+35\frac{r^2}{l^2}Pl$ ....公式 (III) 適用

(4) $M_{32}=\frac{1}{3}(4M_{31}-2M_{13}+2M_{21}-M_{12})+(4\times 29.1\dot{6}+2\times 25-6\times 23.3\dot{3})\frac{r^2}{l^2}Pl$

$=-5M_{12}+2M_{21}+60\frac{r^2}{l}Pl^2$ ....公式 (III) 適用

照査： $M_{12}-M_{21}+M_{23}-M_{32}+M_{31}-M_{13}=0$

最後の條件式より得らるべき M_{12} 及 M_{21} の數値を假りに茲で代置せる解答は,

$$M_{13}=-13.63\frac{r^2}{l^2}Pl \qquad M_{31}=-22.88\frac{r^2}{l^2}Pl \qquad M_{23}=+7.42\frac{r^2}{l^2}Pl \qquad M_{32}=5.15\frac{r^2}{l^2}Pl$$

斯くの如く以下の三角形毎に就て同樣に處置し便宜上その解答をも等號により續記すると次の結果を得る。

		M_{12}	M_{21}	$\frac{r^2}{l^2}Pl$	$\frac{r^2}{l^2}Pl$	適用公式
(5)	$M_{24}=$	+3	−3	−35	=−14.08	(I)
(6)	$M_{42}=$	+7	−8	−68	=−25.86	(II)
(7)	$M_{34}=$	−1	−3	+51	=+17.37	(III)
(8)	$M_{43}=$	+5	−8	−7	=+7.86	〃
	(照查： $M_{23}-M_{32}+M_{34}-M_{43}+M_{42}-M_{24}=0$)					
(9)	$M_{35}=$	+10	0	−136	=+0.35	(I)
(10)	$M_{53}=$	+29	−2	−376	=−21.16	(II)
(11)	$M_{45}=$	+22	−10	−221	=+12.35	(III)
(12)	$M_{54}=$	+33	−7	−403	=+0.33	〃
	(照查： $M_{34}-M_{43}+M_{45}-M_{54}+M_{53}-M_{35}=0$)					
(13)	$M_{46}=$	−34	+26	+296	=+5.64	(I)
(14)	$M_{64}=$	−79	+65	+625	=−19.08	(II)
(15)	$M_{65}=$	−68	+68	+473	=−1.10	(III)
(16)	$M_{56}=$	−12	+32	−38	=+11.61	〃
	(照查： $M_{45}-M_{54}+M_{56}-M_{65}+M_{64}-M_{46}=0$)					
(17)	$M_{57}=$	−48	−23	+817	=+9.21	(I)
(18)	$M_{75}=$	−140	−42	+2172	=−16.89	(II)
(19)	$M_{67}=$	−160	+49	+1862	=+6.79	(III)
(20)	$M_{76}=$	−196	−6	+2706	=−6.60	〃
	(照查： $M_{56}-M_{65}+M_{67}-M_{76}+M_{75}-M_{57}=0$)					
(21)	$M_{68}=$	+307	−182	−2960	=+13.39	(I)

M_{86} 及 M_{78} の式に對し M_{12} 及 M_{21} を定め得べき條件 $M_{68}+M_{86}=0$, $M_{76}+M_{78}=0$ を與ふれば,

$$M_{86}=-M_{68}=2M_{68}-2M_{64}+M_{46}+6(G_{68}'-G_{46}')\frac{r^2}{l^2}Pl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II) 適用}$$

$$M_{78}=-M_{76}=\frac{1}{3}(4M_{76}-2M_{67}-3M_{63})+(4G_{76}'+2G_{86}'-6G_{78}')\frac{r^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(III) 適用}$$

M_{12}	M_{21}	$\frac{r^2}{l^2}Pl$
1 045	−650	−9 918=0
− 657.6	+135.3	+8 066=0

(22)　$M_{12}=13.6358\frac{r^2}{l^2}Pl$　　(23)　$M_{21}=6.6637\frac{r^2}{l^2}Pl$

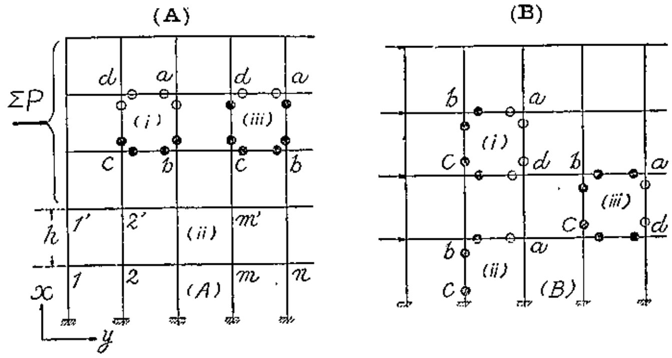
第二章　實用構造に對する解析例

第七節　矩形架構の解法

一般に樹立矩形架構の應力計算に於ては軸應力の變形效果を無視し得る結果として,水平載荷に對し同位層にある各垂直材の兩端格點に關する相對變位は何れも相等しく，又各格點の垂直變位は總て零と看做され得るから，本

解法に對しては全構を通じて第一公式(5)を相對變位の條件項 G が零なる場合として適用し得べく，從つて計算は比較的單調であるが構造翼端に於ける彈性拘制に因る不定應力の數が格間數或層は數の多きに從つて多數となり，この不定力確定の條件數の增加するは已むを得ない而してその解法を**第六圖**の (A) 或は (B)を以て表す如く，構造の縱或は横何れの翼端から始むるも，各圖の (i) 部に視る如く或層又は或格間の任意矩形 $abcd$ に於てはその格點曲力率の半數，M_{ba}, M_{bc}, M_{cb}, M_{ca} が前計算に依つて既知量なりとすれば殘りの半數，M_{ab}, M_{ad}, M_{da}, M_{ac} が求めらるべき未知量であつて（圖には黑點を以て既知量，白點を以て未知量の各領域を指示してある） これを總て既知量の項を以て表し得れば構造が解かれ得ることゝなり，これに對し一般的に言ひ表せば，上述の如く公式 (5), $M_{abc...kmn}$ の兩翼 ab, mn を同位の垂直材或は任意の水平材に適用することにより何れの場合に於ても $G=0$ として計算を進め得るが，構造形式に依つては特に G の値を仲介とする代置計算法の有利なることも屢起るのである。

第　六　圖



1. M_{ab} 及 M_{ac} の算定

算定法の一

各圖 (i) 部の閉口形 $abcd$ に對する第一公式 (5) の適用は，

$$J_{ab}(M_{ab}-2M_{ba})+3J_{bc}(M_{bc}-M_{cb})+J_{ca}(2M_{ca}-M_{ac})=0 \quad \text{.........(I)}$$

これを (A) 圖にて示す縱方向解法にては同位層に於ける閉口形の數だけ，又 (B) 圖にて示す横方向解法にては同位格間に於ける各層閉口形の數だけ，翼の共通なる形式を以て準備する。このとき横方向解法にては，最下層に於て圖 (ii) 部に視る如く未定量の一つ M_{ac} が零であつて直ちに M_{ab} が定まるから，式 (I) を逐次上層に對し計算して所要の曲力率を總て計算し得るが，縱方向解法にては例へば關係層の左端材に關する M_{ac} を暫く未知量と看做し，その層に於ける水平剪力平衡條件によつてこの値を確定する解法の形式をとればよいことになる。然しこれを計算式を以て表さんとすることは一般の場合に煩雜なる形式を示すに過ぎないからこれを省略するも，或は公式 (5) を上記と異る經路に對し適用せる次の各解法をとるも夫々一法であつて，それらに對しては比較的容易に計算式が示されるのである。

算定法の二（縱方向解法に於て）

例へば，構造が左右對稱なりとし，(A) 圖 (ii) 部に就てその左半部の右端なる $m'm$ 材まで計算せらるべき場合に於ては，各曲力率 $M_{2'2}$, $M_{3'3}$, ...$M_{m'm}$ を公式 (5) より $M_{m'mk....3211'}$（但 $m:2,3,....m$）にて表せるものと，この層に關する水平剪力の平衡條件式 (13)′ (iii) を適用せるものとの間にこれら未定の曲力率を消去して $M_{1'1}$ を先づ既知量として表はす。卽ち先づ各曲力率の形式を連記すれば，

$$\left.\begin{array}{lr} M_{2'2}=2M_{22'}-3J_{\substack{12\\22'}}(M_{21}-M_{12})-J_{\substack{11'\\22'}}(2M_{11'}-M_{1'1}) & \text{(ii)} \\ M_{3'3}=2M_{33'}-3J_{\substack{23\\33'}}(M_{32}-M_{23})-3J_{\substack{12\\33'}}(M_{21}-M_{12})-J_{\substack{11'\\33'}}(2M_{11'}-M_{1'1}) & \text{(iii)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\} \text{..(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}&M_{m'm}=2M_{mm'}-3J_{\substack{km\\mm'}}(M_{mk}-M_{km})-\dots-3J_{\substack{12\\mm'}}(M_{21}-M_{12})-J_{\substack{11'\\mm'}}(2M_{11'}-M_{1'1})\quad(m)\\&\text{但}\quad J_{\substack{km\\mm'}}=J_{km}/J_{mm'}\end{aligned}\right\}$$

玆に上式利用上の性質からしてその中に式 (i) を缺くが，假りに (i) として $M_{1'1}=2M_{11'}-(2M_{11'}-M_{1'1})$ の存在を考ふれば誘導計算上に於て便利である。今全構が奇數，$(2m-1)$ 格間なる場合とし，式 (II) の總和と水平剪力平衡條件式，

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^m M_{m'm}+\sum_1^m M_{mm'}+\frac{1}{2}\sum Ph=0\\&\text{但}\quad \textstyle\sum P\text{: 關係層より上部の水平總荷重}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(\mathrm{i})$$

との間に $\sum M_{m'm}$ を驅逐して $M_{1'1}$ の値を抽出すれば，

$$\left.\begin{aligned}M_{1'1}=&\frac{1}{J_{11'}\sum\limits_1^m\left(\dfrac{1}{J_{mm'}}\right)}\left\{-3\sum_1^m M_{mm'}+3J_{12}\left(\frac{1}{J_{22'}}+\dots+\frac{1}{J_{mm'}}\right)(M_{21}-M_{12})+\dots\right.\\&\left.\dots+2J_{ij}\left(\sum_j^m\frac{1}{J_{mm'}}\right)(M_{ji}-M_{ij})+\dots+3J_{km}\left(\frac{1}{J_{mm'}}\right)(M_{mk}-M_{km})+\frac{1}{2}\sum Ph\right\}+2M_{11'}\end{aligned}\right\}(15)$$

但　格間數：奇數 $(2m-1)$，格點番號序列：$1,2,\dots i,j,k,m,n$

次に全構の格間數が偶數 $2(m-1)$ なるときには，剪力平衡式は次の形となるから，

$$\sum_1^k M_{k'k}+\sum_1^k M_{kk'}+\frac{1}{2}(M_{m'm}+M_{mm'})+\frac{1}{2}\sum Ph=0\quad\dots\dots\dots(\mathrm{ii})$$

爾餘の計算を上と同樣にして $M_{1'1}$ の値は，

$$\left.\begin{aligned}M_{1'1}=&\frac{1}{J_{11'}\left(\sum\limits_1^k\dfrac{1}{J_{kk'}}+\dfrac{1}{2J_{mm'}}\right)}\left\{-3\left(\sum_1^k M_{kk'}+\frac{1}{2}M_{mm'}\right)\right.\\&+3J_{12}\left(\sum_2^k\frac{1}{J_{kk'}}+\frac{1}{2J_{mm'}}\right)(M_{21}-M_{12})+\dots+3J_{ij}\left(\sum_j^k\frac{1}{J_{kk'}}+\frac{1}{2J_{mm'}}\right)(M_{ji}-M_{ij})+\\&\left.\dots+3J_{km}\left(\frac{1}{2J_{mm'}}\right)(M_{mk}-M_{km})+\frac{1}{2}\sum Ph\right\}+2M_{11'}\end{aligned}\right\}(16)$$

但　格間數：偶數 $2(m-1)$，格點番號序列：$1,2,\dots i,j,k,m$

斯く全構格間數の奇偶に應じて上式 (15) 或は (16) 何れかによる $M_{1'1}$ の値を式 (II) の各式に代入すれば所要曲力率の値が總て定まる。

算定法の三（縱方向解法に於て）

前法よりも數に於て少なき計算項を取扱はんがために，公式 (5) の一翼を垂直材に適用せるときの G の値を消去する方法が別に考へられ得るのであつて，前と同一の構造形式に就て m 個の連構材 $1'12, 2'23,\dots m'mn$ に對し公式 (5), $M_{m'mn}$ (但 $m: 1,2,\dots k,m$) を適用せる形は，

$$\left.\begin{aligned}&M_{1'1}=2M_{11'}-J_{\substack{12\\11'}}(2M_{12}-M_{21})+\frac{1}{J_{11'}}G\qquad(\mathrm{i})\\&M_{2'2}=2M_{22'}-J_{\substack{23\\22'}}(2M_{23}-M_{32})+\frac{1}{J_{22'}}G\qquad(\mathrm{ii})\\&\dots\dots\dots\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(\mathrm{III})$$

$$M_{m'm}=2M_{mm'}-J_{\substack{mn\\mm}}(2M_{mn}-M_{nm})+\frac{1}{J_{mm'}}G \qquad (m)$$

但 $J_{\substack{mn\\mm'}}=J_{mn}/J_{mm'}$

上式の總和と，全構が奇數 $(2m-1)$ 格間なるときの水平剪力平衡式 (i) とにより $\sum M_{m'm}$ を驅逐して G を既知量により表せば，

$$G=\frac{1}{\sum_1^m\left(\frac{1}{J_{mm'}}\right)}\left\{-3\sum_1^m M_{mm'}+\sum_1^m J_{\substack{mn\\mm'}}(2M_{mn}-M_{nm})-\frac{1}{2}\sum Ph\right\} \quad \cdots\cdots(17)$$

但 格間數： 奇數 $(2m-1)$, 格點番號序列： $1,2,\ldots.k,m,n$

玆に右翼格間 mn に於て $M_{mn}=M_{nm}$ なることの計算上の注意を要する。

又全構が偶數 $2(m-1)$ 格間なるときの G の値は，

$$G=\frac{1}{\sum_1^k\left(\frac{1}{J_{kk'}}\right)+\frac{1}{2J_{mm'}}}\left\{-3\left(\sum_1^k M_{kk'}+\frac{1}{2}M_{mm'}\right)+\sum_1^k J_{\substack{km\\mm'}}(2M_{km}-M_{mk})+\frac{1}{2}J_{\substack{mn\\mm'}}(2M_{mn}-M_{nm})-\frac{1}{2}\sum Ph\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

但 格間數： 偶數 $2(m-1)$, 格點番號序列： $1,2,\ldots.k,m,n$

玆に右翼二格間 km,mn に於て，$J_{mn}(2M_{mn}-M_{nm})=J_{km}(2M_{mk}-M_{km})$ なることの計算上の記憶を要する。斯くして全構格間數の奇偶に應ずる二つの G の何れかを式 (III) に代置して得らるゝ各曲力率の値は式 (II) より得らるゝ各値と同値なるべき筈である。

算定法の四 (縱方向解法に於て)

前記第三法は關係層の各既知項を洩れなく順當に計算式中に取入れたものであるが，實際計算として多少なりともその勞力を輕減せんには未定曲力率に關する奇數番號と偶數番號の式を初めから二つ宛，即ち $M_{1'1}$ と $M_{2'2}$ $M_{3'3}$ と $M_{4'4},\ldots.$ を夫々水平材が共通なる如くして適用する。然るときは次式に示す如く水平材 $23,45,\ldots.$ に關する既知曲力率の項が各式中に入り來らず，それだけの計算を省き得ることになる。即ち，

$$M_{1'1}=2M_{11'}-J_{\substack{12\\11'}}(2M_{12}-M_{21})+\frac{1}{J_{11'}}G \qquad (\mathrm{i}')$$

$$M_{2'1}=2M_{22'}-J_{\substack{12\\22'}}(2M_{21}-M_{12})+\frac{1}{J_{22'}}G \qquad (\mathrm{ii})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{k'k}=2M_{kk'}-J_{\substack{km\\kk'}}(2M_{km}-M_{mk})+\frac{1}{J_{kk'}}G\ldots.(m：偶數) \qquad (k)$$

$$M_{k'k}=2M_{kk'}-J_{\substack{jk\\kk'}}(2M_{kj}-M_{jk})+\frac{1}{J_{kk'}}G\ldots\ldots(m：奇數) \qquad (k)$$

$$M_{m'm}=2M_{mm'}-J_{\substack{km\\mm'}}(2M_{mk}-M_{km})+\frac{1}{J_{mm'}}G \qquad (m)$$

但 $J_{\substack{km\\mm'}}=J_{km}/J_{mm'}$, 格點番號序列： $1,2,\ldots.j,k,m$ $\quad\cdots\cdots(\mathrm{IV})$

m の奇偶に從つて式 (k) の何れかを採り，前各法と同樣に全構格間數の奇偶に應ずる G の値を求むれば，

$$
\left.
\begin{aligned}
G=&\frac{1}{\sum_{1}^{m}\left(\frac{1}{J_{mm'}}\right)}\Big\{-3\sum_{1}^{m}M_{mm'}+(2J_{\substack{12\\11'}}-J_{\substack{12\\22'}})M_{12}+(2J_{\substack{12\\22'}}-J_{\substack{12\\11'}})M_{21}+(2J_{\substack{34\\33'}}-J_{\substack{34\\44'}})M_{34}\\
&\qquad\qquad+(2J_{\substack{34\\44'}}-J_{\substack{34\\33'}})M_{43}+\ldots\\
&\ldots(m:\ \text{偶數})+(2J_{\substack{km\\kk'}}-J_{\substack{km\\mm'}})M_{km}+(2J_{\substack{km\\mm'}}-J_{\substack{km\\kk'}})M_{mk}\ \text{(或は)}\\
&\ldots(m:\ \text{奇數})+(0-J_{\substack{km\\mm'}})M_{km}+(2J_{\substack{km\\mm'}}-0)M_{mk}-\frac{1}{2}\sum Ph\Big\}
\end{aligned}
\right\}\ ..(19)
$$

但　格間數：　奇數 $(2m-1)$

$$
\left.
\begin{aligned}
G=&\frac{1}{\sum_{1}^{k}\left(\frac{1}{J_{kk'}}\right)+\frac{1}{2J_{mm'}}}\Big\{-3\Big(\sum_{1}^{k}M_{kk'}+\frac{1}{2}M_{mm'}\Big)+(2J_{\substack{12\\11'}}-J_{\substack{12\\22'}})M_{12}+(2J_{\substack{12\\22'}}-J_{\substack{12\\11'}})M_{21}\\
&\qquad\qquad+(2J_{\substack{34\\33'}}-J_{\substack{34\\44'}})M_{34}+(2J_{\substack{34\\44'}}-J_{\substack{34\\33'}})M_{43}+\ldots\\
&\ldots(m:\ \text{偶數})+(2J_{\substack{km\\kk'}}-J_{\substack{km\\mm'}})M_{km}+(2J_{\substack{km\\mm'}}-J_{\substack{km\\kk'}})M_{mk}\ \text{(或は)}\\
&\ldots(m:\ \text{奇數})+(0-J_{\substack{km\\mm'}})M_{km}+(2J_{\substack{km\\mm'}}-0)M_{mk}\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}J_{\substack{km\\mm'}}(2M_{mk}-M_{km})-\frac{1}{2}\sum Ph\Big\}
\end{aligned}
\right\}\ ..(20)
$$

但　格間數：　偶數 $2(m-1)$

式 (19) 及 (20) による G の解式はその外見上の形式に於て煩雜であるが計算上の取扱に於ては前法よりも可なり簡單である。

一般に構造が不對稱なる場合には格間數が奇數なる場合に倣つて上と同樣の解法を施せばよい筈である。

特に對稱垂直載荷（格間載荷に就ては第十節參照）に對しては上の何れの場合に於ても $G=0$ なるは勿論，任意の構材を兩翼とする第一公式 (5) を適用して $G=0$ となし得るから，取扱ふべき連構材及未知量計算の手數なども殆んど半減して計算が可なり容易に進行する。

2. M_{ad} 及 M_{da} の算定

この計算は各圖 (iii) 部に視る如く，矩形の三邊が曲力率に關して既知なるとき殘りの一邊を見出すことであり，これを第一公式 (5) を適用せる M_{adcb} 及 M_{dabc} の二式より M_{ad} 及 M_{da} を抽出して次の如く得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{ad}&=\frac{1}{J_{ad}}\{2J_{ab}(M_{ab}-M_{ba})+JM_{bc}+J_{cd}(-M_{cd}+M_{dc})\}\\
M_{da}&=\frac{1}{J_{ad}}\{2J_{cd}(M_{dc}-M_{cd})+JM_{cb}+J_{ab}(-M_{ba}+M_{ab})\}
\end{aligned}
\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)\ \text{或は (V)}
$$

尙ほこれを M_{adcb} 及 M_{badc} より求むれば，

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{ad}&=\frac{1}{J_{ad}}\left\{\frac{2}{3}J_{ab}(2M_{ab}-M_{ba})+J_{bc}(-M_{bc}+2M_{cb})+\frac{1}{3}J_{cd}(-7M_{cd}+5M_{dc})\right\}\\
M_{da}&=\frac{1}{J_{ad}}\left\{\frac{1}{3}J_{ab}(2M_{ab}-M_{ba})+J_{bc}(-M_{bc}+2M_{cb})+\frac{1}{3}J_{cd}(-8M_{cd}+7M_{dc})\right\}
\end{aligned}
\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(VI)
$$

(VI) の形式は (V) よりも簡單でないから主なる計算用としては勿論不適當であり，唯だ參照用として利用され得る。

3. M_{ba} 及 M_{ca} に就て

さきに圖 (i) 部に就て既知量と假定せる M_{ba} 及 M_{ca} は前計算に於て格點曲力率の平衡條件,

$$\sum M_b=0,\quad \sum M_c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{VII})$$

より求まるのであるが，これが計算の起點たる構造翼端に於ては最初に不明であるから縦方向解法にては支點に對する曲力率を未知量とし，横方向解法にては側柱材の格點曲力率を未知量とすればよいのであつて，縦横何れの解法を採るべきかは構造と載荷形式によつてそこに得失が存するわけである。

4. 計算の照査

計算途中に於けるその正否の檢定には，そのときの公式適用經路と異る連構材に對する連彈性公式を試用し，或は計算に直接使用されてなき彈性公式の他の形を適用すればよいが，それらの中にて簡便なるは公式 (6) を閉多角形 $abc\ldots.kmn$ に適用し，或は公式 (5) を二つの水平材若くは同位の垂直材を連構材 $abc\ldots.kmn$ の兩翼として適用するにある。即ち，

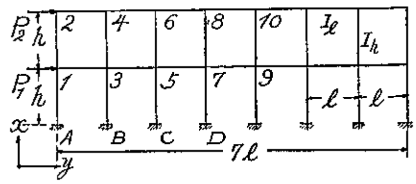
$$\left.\begin{array}{l} JM_{ab}-JM_{ba}+JM_{bc}-JM_{cb}+\ldots.+JM_{ma}-JM_{am}=0 \\ JM_{ab}-2JM_{ba}+3(JM_{bc}-JM_{cb}+\ldots.+JM_{km}-JM_{mk})+2JM_{mn}-JM_{nm}=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(\mathrm{VIII})$$

特に垂直載荷の對稱形に對しては上の第二式がその兩翼を任意の構材として採り得ることになるは勿論である。

斯くして矩形構に對しては，これを縦，横何れの方向に計算するも上の式 (I) 乃至 (VII) を適當に應用し少數の暫定的未定量と荷重との項による逐次代入計算を以てその解法を進め得るのであつて，この未定量は計算最終に於ける構造の環境條件より確定さるゝことはさきの計算例に視る如くである。

例　解

第七圖



第七圖に示す 7 格間 2 層，對稱架構の水平載荷による格點曲力率の値を水平材對垂直材の彎曲剛比が總て 1 なる場合に就て計算すること。

與へらるゝ如き架構はこれを縦横何れの方向に解くも計算の難易に著しき差がない。然し唯だ横方向に解けば荷重の項が最後の平衡條件式まで不用であるから算式が比較的簡單になるが，斯くすると上述の各公式の多數を適用する機會が出現せないので，玆では各公式の多數を試用する意義に於て縦方向に解くことにする。然るときは彈性固定點 A, B, C, D に關する各構材端の曲力率 $M_{A1}, M_{B3}, M_{C5}, M_{D7}$ を未知量に選定すれば便利であつて，これに依つて次の如く各構材の格點曲力率 26 個が I 層から II 層に逐次代入法を以て計算され，4 個の未知量の算定と共に總計 30 個の所要曲力率の値が定まる。

I 層：

公式 (19) により，

$$G=1/4\ J_h\{-3(M_{A1}+M_{B3}+M_{C5}+M_{D7})-1/2\ (P_1+P_2)h\}=$$
$$-3/4\ J_h(M_{A1}+M_{B3}+M_{C5}+M_{D7})-1/8\ J_h(P_1+P_2)h$$

公式 (IV) により，

$$M_{1A}=2M_{A1}+\frac{1}{J}G,\quad M_{3B}=2M_{B3}+\frac{1}{J_h}G$$ 及 M_{5C}, M_{7D} につき同様。

これらを順次排列し其結果をも續記すると，

		M_{A1}	M_{B3}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_1h	P_2h
(1)	$M_{1A}=1/4$	(+5	−3	−3	−3	−0.5)	=−0.049 6	−0.037 7
(2)	$M_{3B}=1/4$	(−3	+5	−3	−3	−0.5)	=−0.060 7	−0.057 6
(3)	$M_{5C}=1/4$	(−3	−3	+5	−3	−0.5)	=−0.059 2	−0.055 4
(4)	$M_{7D}=1/4$	(−3	−3	−3	+5	−0.5)	=−0.059 4	−0.055 6

公式 (21) 即ち (V) により，

$M_{13}=2(M_{1A}-M_{A1})+(M_{3B}-M_{B3})$, $M_{31}=(M_{1A}-M_{A1})+2(M_{3B}-M_{B3})$ 及 $M_{35}.\ .\ .\ .M_{79}$ に就き同樣。

		M_{A1}	M_{B3}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_1h	P_2h
(5)	$M_{13}=1/4$	(−1	−5	−9	−9	−1.5)	=+0.037 5	+0.076 6
(6)	$M_{31}=1/4$	(−5	−1	−9	−9	−1.5)	=+0.031 9	+0.066 6
(7)	$M_{35}=1/4$	(−9	−1	−5	−9	−1.5)	=+0.027 1	+0.057 7
(8)	$M_{53}=1/4$	(−9	−5	−1	−9	−1.5)	=+0.027 8	+0.058 9
(9)	$M_{57}=1/4$	(−9	−9	−1	−5	−1.5)	=+0.028 5	+0.059 9
(10)	$M_{75}=1/4$	(−9	−9	−5	−1	−1.5)	=+0.028 4	+0.059 5
(11)	$M_{79}=1/4$	(−9	−9	−9	+3	−1.5)	=+0.028 3	+0.059 6

II 層：

格點 1, 3, 5 及 7 に關する曲力率の平衡條件 $\sum M=0$ より M_{12}, M_{34} 等を求むれば，以後の格點曲力率に對する公式適用及計算法は I 層の場合と全く同様である。

$M_{12}=-(M_{1A}+M_{13})$, M_{34} その他同樣。

		M_{A1}	M_{B3}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_1h	P_2h
(12)	$M_{12}=1/4$	(−4	+8	+12	+12	+2)	=+0.012 1	−0.038 9
(13)	$M_{34}=1/4$	(+17	−3	+17	+21	+3.5)	=+0.001 7	−0.066 8
(14)	$M_{56}=1/4$	(+21	+17	−3	+17	+3.5)	=+0.002 9	−0.063 4
(15)	$M_{78}=1/4$	(+21	+21	+17	−7	+3.5)	=+0.002 7	−0.063 5

$$G=1/4\ J_h\{-3(M_{12}+M_{34}+M_{56}+M_{78})+M_{13}+M_{31}+M_{57}+M_{75}-1/2P_2\}$$
$$=1/16\ J_h\{-189M_{A1}-153M_{B3}-153M_{C5}-153M_{D7}-87/2(P_1+P_2)-2P_2\}$$

$M_{21}=2M_{12}-(2M_{13}-M_{31})+\dfrac{1}{J_h}G$, M_{43} その他に就き同樣。

		M_{A1}	M_{B3}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_2h	P_1h	P_2h
(16)	$M_{21}=1/16$	(−233	−53	−21	−21	−21.5	−2)	=−0.001 9	−0.048 7
(17)	$M_{43}=1/16$	(−17	−189	+19	+51	−8.5	−2)	=−0.005 9	−0.074 1
(18)	$M_{65}=1/16$	(+15	+19	−189	+19	−8.5	−2)	=−0.005 7	−0.071 3
(19)	$M_{87}=1/16$	(+15	+51	+19	−221	−8.5	−2)	=−0.005 9	−0.072 0

$M_{24}=2(M_{21}-M_{12})+M_{13}+(M_{43}-M_{34})$

$M_{42}=(M_{21}-M_{12})-M_{31}+2(M_{43}-M_{34})$, $M_{46}.\ .\ .\ .M_{8,10}$ に就き同樣。

		M_{A1}	M_{B3}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_2h	P_1h	P_2h
(20)	$M_{24}=1/16$	(−523	−367	−223	−207	−88.5	−6)	=+0.001 9	+0.048 9
(21)	$M_{42}=1/16$	(−407	−443	−203	−171	−82.5	−6)	=+0.002 7	+0.040 9
(22)	$M_{46}=1/16$	(−275	−407	−295	−151	−76.5	−6)	=+0.003 2	+0.034 1
(23)	$M_{64}=1/16$	(−259	−295	−407	−167	−76.5	−6)	=+0.002 9	+0.035 3
(24)	$M_{68}=1/16$	(−243	−167	−407	−311	−76.5	−6)	=+0.002 7	+0.036 2

		M_{A1}	M_{B3}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_2h	P_1h	P_2h
(25)	$M_{86}=1/6$	$(-243$	-151	-295	-439	-76.5	$-6)$	$=+0.0026$	$+0.0359$
(26)	$M_{8,10}=1/16$	$(-243$	-135	-183	-567	-76.5	$-6)$	$=+0.0026$	$+0.0356$

格點 2, 4, 6, 8 に於ける曲力率の靜平衡條件, $\sum M=0$ の方程式より次の如く未知量の値を確定する。

	M_{A1}	M_{B2}	M_{C5}	M_{D7}	$(P_1+P_2)h$	P_2h	
$\sum M_2=0,$	$+756$	$+420$	$+244$	$+228$	$+110$	$+8$	$=0$
$\sum M_4=0,$	$+699$	$+1039$	$+479$	$+271$	$+163.5$	$+14$	$=0$
$\sum M_6=0,$	$+487$	$+443$	$+1003$	$+459$	$+162.5$	$+14$	$=0$
$\sum M_8=0,$	$+471$	$+235$	$+459$	$+1227$	$+162.5$	$+14$	$=0$

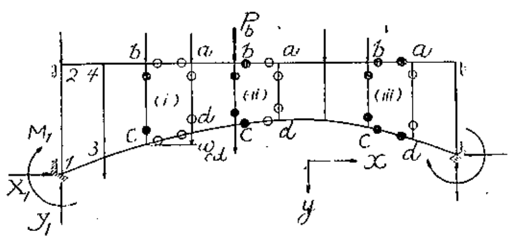
	$(P_1+P_2)h$	P_2h	P_1h	P_2h
(27)	$M_{A1}=-0.06393$	-0.00259	$=-0.0639$	-0.0665
(28)	$M_{B3}=-0.0695$	-0.00697	$=-0.0695$	-0.0765
(29)	$M_{C5}=-0.06877$	-0.0066	$=-0.0688$	-0.0754
(30)	$M_{D7}=-0.06885$	-0.0061	$=-0.0689$	-0.0755

この値を計算式 (1) 乃至 (26) に代置すれば, 既に記入せるが如き結果を得る。

第八節　列柱式構拱の解法

梯形集成の列柱式構拱はその斜材卽ち拱肋に對する水平床桁の上下位置により垂直材を抗壓或は抗張材とならしむるも, 斜材は常に抗壓材として働くことは單線拱に於けると同樣であるから, 從來この種の構拱の設計に當つては斜材線を或る一つの代數函數としてそれの各部に特定の斷面比を與へ, その應力解法に對しては水平床桁垂直材の存在及これら相互並に各斜材との彈性關係を總て無視し, 路床上の荷重をそのまゝ斜材格點に作用せしめて單線拱の解法を適用し來たのであるが, 斯くの如き方法を默認し得べき主要條件としては, 斜材斷面が他の各材斷面に比し可なり强大にして斜材それ自らが載荷に對し單線拱としての形體及能力を有する程度のものたるを要するので, これは勿論安全ではあるが, 他の連續床桁等の載荷能力を無視せるだけの誤差が伴ふの不經濟が存するのみならず, 構拱の形式をして尙ほ單線拱の形式を脫出することの出來ない狹範圍に閉塞せしむるから, これを打開すべき新なる理論解法に進まざれば構拱本來の性能に基く長大なる構造利用の發展が阻害せらるゝと言つて差支ないのである。

第　八　圖



解式誘導のために引用せる構拱は第八圖の如く下弦材が拱形（この種の拱線形に對しても, 單線拱に於けると同樣に拋物線, 垂曲線, 正弦曲線などを與へて曲力率の影響を成るべく輕減する方が得策であらう）をなせる所謂, 梯形 Vierendeel 桁であつて, 斯くの如き形式が格點荷重を有するものに對する解法の內容は, これを前節矩形構に比すれば各單構が梯形なるだけ計算の煩雜なるものが在るも, その取扱法に於ては彼此相似る點の存することが言へるのである。而して構拱の軸力變形に就ては, 特に斜材に於て他の各材に比し軸力發生の大なるものあるも, その伸縮效果は單線拱の場合にこれを無視して尙ほ彎曲變形效果に對し僅少の誤差(從來の多くの設計々算によれば曲力率の値に於て普通 5% 以內の誤差) に過ぎないことより, この場合これを無視するもその誤差の, 單線拱の場合よりも餘り大ならざることが推定さるゝのみならず, この構造が斜材構ではあるが伸縮性構造でないことが又, 曲力率を主應力とし軸應力變形效果を實用計算の便宜上無視して差支ないことが許されるであらう。斯く曲力

率を主應力とする梯形構拱に於ては上弦格點の垂直相對變位とこれと同位にある下弦格點の垂直相對變位とは常に相等しいが，下弦格點に關する水平變位は何れも不定であるから，解法に對しては相對變位を條件とする第一公式(5)と水平變位を條件とする第二公式(8)の適用が要求される。構造兩端の支承法は色々に作られ得るが茲では圖示せる狀況を假定する。然るときは不對稱形式に對しては最惡の場合として左翼端に 5 個の未知量を假定するを要するが，それが對稱なるときには 3 個，例へば曲力率 M_{12}，M_{13} 及水平反力 X_1 を暫定的未知量にすればよいことになる。

今構造中の任意の梯形 $abcd$ に於て bc 材に關する應力が前計算により既知なるものとし，ba, cd 及 da 各材に關する應力の解法を前記連彈性公式の適用によつて次の如く求めんとするものである。

1.　M_{ba} 及 M_{ca} の算定

第八圖の (i) 部を參照すれば明なる如く（黑點を旣知，白點を求めんとする未知の領域として示す）格點 b 及 c に關する曲力率の靜平衡條件式，

$$\sum M_b=0,\quad \sum M_c=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)}$$

よりこれを求め得ることは說明の限りでない。

2.　M_{ab} 及 M_{dc} の算定

圖の (ii) 部を參照して第一公式 (5) M_{abca} を適用すれば，假定により $HN=0$ であり，η に關する相對變位の條件項 G が零となるから，

$$JM_{ab}-2JM_{ba}+3JM_{bc}+2JM_{cb}+2JM_{ca}-JM_{dc}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

ad の左側に於ける假設垂直剪斷面による構造左部分 $ab\ldots.4213\ldots.cd$ の靜平衡條件は式 (13) 及 (14) を參照して，先づ a 點を原點とする力率平衡に關し，$a, 1, d$ 各端に對する外力率及 d 端に對する外力を夫々に應ずる構材曲力率及直應力に置換することにより，

$$M_{dc}+Q_{dc}\Big(\beta_{dc}\sum_{a}^{a}l\beta\Big)+N_{dc}\Big(-\alpha_{dc}\sum_{a}^{a}l\beta\Big)+M_{12}+M_{13}+X_1\sum_{1}^{a}l\beta$$
$$+Y_1\sum_{1}^{a}l\alpha-\cdots\cdots-P_b l\alpha_{ba}+M_{ab}=0$$

但　X_1，Y_1：　支點 1 に於ける水平及垂直反力の圖示せる正値

　　$\sum l\alpha$：　載荷格點の力率原點 a に關する橫距

　　$\sum l\beta$：　　　,,　　　　,,　　　　縱距

これを簡約して，

$$\left.\begin{aligned}&M_{12}+M_{13}+M_{ab}-l_{\underset{cd}{ad}}\beta_{ca}M_{ca}+\big(1-l_{\underset{cd}{ad}}\big)M_{ad}-l_{ad}\alpha_{ca}N_{dc}-X_1l_{12}+Y_1\sum_{1}^{a}l\alpha\\&\qquad\qquad\qquad\qquad-P_2\sum_{2}^{a}l\alpha-\cdots\cdots-P_b l\alpha_{ba}=0\\&\text{但}\quad l_{\underset{cd}{ad}}=l_{ad}/l_{cd}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

次に垂直力の平衡に關し，a 及 d 端の外力をその點に對する構材應力に置換することにより，

$$-\alpha Q_{dc}-\beta N_{dc}-Y_1+P_2+\cdots\cdots+P_b-\alpha Q_{ab}=0$$

これを簡約して，

$$-\frac{1}{l_{ab}}(M_{ab}+M_{ba})-\frac{\alpha}{l_{cd}}(M_{cd}+M_{dc})-Y_1+P_2+\cdots\cdots+P_b+\beta_{ca}N_{dc}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

$HN=0$ なる場合の算式中に N の項を留むるは甚不便なるから式 (ii) 及 (iii) に就て N_{dc} を消去すれば,

$$\left.\begin{aligned}
&M_{ab}+l_{ad/bc}(M_{ba}+M_{cd})+M_{dc}+(1-l_{ad/bc})(M_{12}+M_{13})+(l_{ad/bc}-1)l_{12}X_1\\
&\qquad +l_{ab\,ad/bc}(\sum P)+(1-l_{ad/bc})\sum(P\sum l\alpha)=0\\
&\text{但}\quad \sum P=-Y_1+P_2+\cdots\cdots+P_b\\
&\sum(P\sum l\alpha)=-Y_1\sum_1^a l\alpha+P_2\sum_2^a l\alpha+\cdots\cdots+P_b l\alpha_{ba}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

式 (i) 及 (iv) より所要の M_{ab} 及 M_{dc} を抽出すれば,

$$\left.\begin{aligned}
&M_{ab}=\frac{1}{1+J_{ab/cd}}\Big[(2J_{ab/cd}-l_{ad/bc})M_{ba}-3J_{bc/cd}(M_{bc}-M_{cb})-(2+l_{ad/bc})M_{cd}\\
&\qquad\qquad -(1-l_{ad/bc})\{M_{12}+M_{13}-X_1l_{12}-\sum(P\sum l\alpha)\}+l_{ab\,ad/bc}(\sum P)\Big]\\
&M_{dc}=\frac{1}{1+J_{cd/ab}}\Big[(2J_{cd/ab}-l_{ad/bc})M_{cd}-3J_{bc/ab}(M_{cb}-M_{bc})-(2+l_{ad/bc})M_{ba}\\
&\qquad\qquad -\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{同　上}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big]\\
&\text{但}\quad \sum(P\sum l\alpha)=-Y_1\sum_1^a l\alpha+P_2\sum_2^a l\alpha+\cdots\cdots+P_b l\alpha_{ba}\\
&\sum P=-Y_1+P_2+\cdots\cdots+P_b\\
&J_{ab/cd}=J_{ab}/J_{cd},\qquad l_{ab\,ad/bc}=l_{ab}l_{ad}/l_{bc}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(22) 或は (II)}$$

玆に M_{ab} の式は $abcd$ の順序に, M_{dc} の式はその逆順に夫々同一の形式で表されてある。梯形 $abcd$ が特に矩形なるときには $l_{ad/bc}=1$ などの條件が與へられるから上式の各右邊は可なり簡單なる形に變化する。

3. M_{ad} 及 M_{da} の算定

圖の (iii) 部を參照して第一公式 (5), M_{badc} を適用すれば,

$$JM_{ba}-2JM_{ab}+3JM_{ad}-3JM_{da}+2JM_{dc}-JM_{cd}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

今一つの彈性式として公式 (5) を用ひんとするも M_{ad}, M_{da} を含んで相對變位の條件項を零とする他の形式は存立せないから水平變位を條件とする第二公式 (8), $M_{b:da}$ を適用する。即ち

$$\begin{aligned}
&JM_{bc}\Big(\sum_c^a l\beta\Big)-JM_{cb}\Big(2\sum_c^a l\beta\Big)+JM_{cd}\Big(2\sum_c^a l\beta+l\beta_{da}\Big)-JM_{dc}\Big(\sum_c^a l\beta+2l\beta_{da}\Big)\\
&\qquad +JM_{da}(2l\beta_{da})-JM_{ad}(l\beta_{da})=G
\end{aligned}$$

$$\text{但}\quad G=\xi_{bc}\frac{\sum_b^a l\beta}{l\beta_{bc}}-(\xi_b-\xi_a)$$

玆に格點 b 及 a は縱距に關し同位にあり, 及その横方向の相對變位が零であるから, $\sum_b^a l\beta=0$, $\xi_b-\xi_a=0$ 從つて $G=0$ となるが更に公式中に $\sum_b^a l\beta=l_{bc}+l\beta_{cd}-l_{da}=0$ の關係を與へて縱距の係數を簡單化すれば,

$$lJM_{bc}-2lJM_{cb}+(2l_{bc}-l_{da})JM_{cd}-(l_{bc}+2l_{da})JM_{dc}+2lJM_{da}-lJM_{ad}=0\quad\cdots\cdots\cdots\text{(vi)}$$

この式は式 (8) を以て例へば支點 1 を一端として $M_{1\ldots cda}$ 及 $M_{1\ldots cb}$ を適用し減算を施したるものに相當する。

式 (v) 及 (vi) より M_{ad} 及 M_{da} を抽出すれば,

$$\begin{aligned}
M_{ad}=&\frac{2}{3}J_{ab/ad}(2M_{ab}-M_{ba})+lJ_{bc/ad}(-M_{bc}+2M_{cb})+J_{cd/ab}\Big\{-\Big(2l_{bc/ad}+\frac{1}{3}\Big)M_{cd}\\
&+\Big(l_{bc/ad}+\frac{2}{3}\Big)M_{dc}\Big\}
\end{aligned}$$

$$M_{da}=\frac{1}{3} \quad " \quad + \quad " \quad + " \left\{-\left(" \ +\frac{2}{3}\right) " +\left(" +\frac{4}{3}\right) " \right\} \qquad \cdots\cdots(23) \text{ 或は (III)}$$

これら曲力率の値はその分數係數に於てのみ異なることになる。特に梯形 $abcd$ が矩形なるときには上式が前節矩形構に關する公式 (III) と同形になることは勿論である。

4. 斜材 cd の軸應力の算定

任意の斜材 cd に惹起さるゝ軸應力の大さは式 (iii) より，

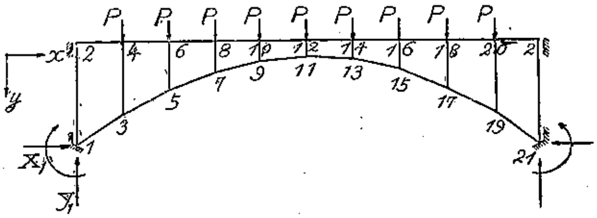
$$\left.\begin{aligned} N_{cd}&=\frac{1}{l_{ab}\beta_{cd}}(M_{ab}+M_{ba})+\frac{\alpha}{l\beta_{cd}}(M_{cd}+M_{dc})+\frac{1}{\beta_{cd}}(\sum P) \\ \text{但} \quad \sum P&=-Y_1+P_2+\cdots\cdots+P_b \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

他の水平材及垂直材の軸應力は矩形構に於ける各材軸應力を求むると同樣に，公式 (12) の適用によりこれを簡單に計算し得るわけである。

例　解

各構材の形狀詳細が附表にて與へられある第九圖の徑間 30 m，總高 7 m の構拱に就て上弦格點の等量載荷 P による各材端の曲力率の値を算定すること。

第　九　圖



構　材　表

	構材	l(cm)	I(cm⁴)	EJ(cm⁻³)	α	β	α^2	β^2
水平材	24	300	25 000	0.002	1	0	1	0
〃	46	300	25 000	2	1	0	1	0
〃	68	300	25 000	2	1	0	1	0
〃	8,10	300	25 000	2	1	0	1	0
〃	10,12	300	25 000	2	1	0	1	0
垂直材	21	700	16 000	0.007292	0	1	0	1
〃	43	484	16 000	5042	0	1	0	1
〃	65	316	16 000	3292	0	1	0	1
〃	87	196	16 000	2042	0	1	0	1
〃	10,9	124	16 000	1292	0	1	0	1
〃	12,11	100	16 000	1042	0	1	0	1
斜材	13	370	35 000	1761	0.8115	−0.5842	0.6585	0.3414
〃	35	344	35 000	1637	.8726	−0.4885	.7614	.2386
〃	57	323	35 000	1538	.9285	−0.3714	.8621	.1379
〃	79	309	35 000	1470	.9724	−0.2334	.9455	.0545
〃	9,11	301	35 000	1433	.9968	−0.0797	.9936	.0063

但 α 及 β の數値は下弦格點が 30 m 徑間，6 m 高の拋物線上にあるものとしての計算による。

計　算

形式及載荷の對稱により $Y_1=4.5P$ が旣定になるので，この場合の未知量として曲力率 M_{12} M_{13} 及水平反力

X_1を採れば足る。更に構造の對稱は端柱の格點 1, 2 に關する相對變位を零ならしむるから，公式 (III) の關係を用ふるまでもなく第一公式 (5), $JM_{21}-2JM_{12}=0$ より直ちに，

(1) $M_{21}=2M_{12}$

(2) $M_{24}=-M_{21}=-2M_{12}$

公式 (22) 卽ち (II) により，

(3) $$M_{42}=\frac{1}{1+J_{\substack{24\\13}}}\Big[(2J_{\substack{24\\13}}-l_{\substack{24\\12}})M_{24}-3J_{\substack{12\\13}}(M_{21}-M_{12})-(2+l_{\substack{24\\12}})M_{13}$$

$$-(1-l_{\substack{24\\12}})\{M_{12}+M_{13}-X_1l_{12}+Y_1l_{24}\}+Y_1l_{\substack{24\\12}34}\Big]$$

$$=\frac{1}{2.1357}\Big[1.58M_{24}-12.4224(M_{21}-M_{12})-2.6914M_{13}-0.3086(M_{12}+M_{13})+216X_1-1350P\Big]$$

$$=-7.4407M_{12}-1.4047M_{13}+101.1378X_1-632.1113P$$

(4) $$M_{31}=\frac{1}{1+J_{\substack{13\\24}}}\Big[(2J_{\substack{13\\24}}-l_{\substack{24\\12}})M_{13}-3J_{\substack{12\\24}}(M_{12}-M_{21})-(2+l_{\substack{34\\12}})M_{13}-(\text{以下前式と同樣})\Big]$$

$$=\frac{1}{1.8805}\Big[1.0696M_{13}-10.938(M_{12}-M_{21})-2.6914M_{13}-(\qquad \text{〃} \qquad)\Big]$$

$$=8.5149M_{12}+0.4047M_{13}+114.8631X_1-717.8942P$$

公式 (23) 卽ち (III) により，

(5) $$M_{43}=\frac{2}{3}J_{\substack{24\\34}}(2M_{42}-M_{24})+lJ_{\substack{12\\34}}(-M_{21}+2M_{12})+J_{\substack{13\\34}}\left\{-\left(2l_{\substack{12\\34}}+\frac{1}{3}\right)M_{13}+\left(l_{\substack{12\\34}}+\frac{2}{3}\right)M_{31}\right\}$$

$$=0.5289(2M_{42}-M_{24})-1.1267M_{13}+0.738M_{31}$$

$$=2.8774M_{12}-1.571M_{13}+138.2574X_1-864.119P$$

(6) $$M_{34}=\frac{1}{3}J_{\substack{24\\34}}(2M_{42}-M_{24})+lJ_{\substack{12\\34}}(-M_{21}+2M_{12})+J_{\substack{13\\34}}\left\{-\left(2l_{\substack{12\\34}}+\frac{2}{3}\right)M_{13}+\left(l_{\substack{12\\34}}+\frac{4}{3}\right)M_{31}\right\}$$

$$=0.2644(2M_{42}-M_{24})-1.2431M_{13}+0.9708M_{31}$$

$$=6.5632M_{12}-1.2217M_{13}+138.2567X_1-864.1047P$$

公式 (I) により直ちに

(7) $$M_{46}=-(M_{42}+M_{43})$$

$$=4.5633M_{12}+2.9757M_{13}-239.3952X_1+1496.2302P$$

(8) $$M_{35}=-(M_{31}+M_{34})$$

$$=-15.0871M_{12}+0.817M_{13}-253.1198X_1+1581.9989P$$

梯形區劃 3456 以下に對しても同樣に公式 (II), (III) 及 (I) を順次適用すればよく，それら各公式の作製に對して前區劃に關する形式と對照すれば，未知量 M_{12}, M_{13} 及 X_1h_2 を除く他の各項及係數の接尾序數が逐次 2 だけ大なる數となり 及 ΣP の項數が一つ宛增加し行くことを記憶して，次に各式の計算値を 直ちに書下すことにする。

又計算の照査に關しては最簡便に第一公式 (5) を任意適用すればよく，例へば區劃 1234, 3456 に就て

$$M_{12431}=0,\qquad M_{34653}=0,\qquad M_{2431}=0,\qquad M_{6435}=0$$

從つて $M_{1246531}$ 或は $M_{246}-M_{135}=0$ の何れなりとも總て滿足さるゝを要する。

		M_{12}	M_{13}	X_1	P
(9)	M_{64}	$=+\ 36.855$	$+\ 2.719$	$+\ 218\,662$	$-\ 1\,366.576$
(10)	M_{53}	$=-\ 30.337$	$-\ 5.542$	$+\ 345.875$	$-\ 2\,161.652$
(11)	M_{65}	$=+\ 44.353$	$-\ 8.487$	$+\ 1\,403.979$	$-\ 8\,774.767$
(12)	M_{56}	$=+\ 22.792$	$-\ 10.959$	$+\ 1\,423.556$	$-\ 8\,897.088$
(13)	M_{68}	$=-\ 81.207$	$+\ 5.768$	$-\ 1\,622.641$	$+\ 10\,141.343$
(14)	M_{67}	$=+\ 7.545$	$+\ 16.501$	$-\ 1\,769.431$	$+\ 11\,058.739$
(15)	M_{86}	$=-\ 138.860$	$-\ 20.893$	$+\ 788.648$	$-\ 4\,923\,866$
(16)	M_{75}	$=+\ 184.169$	$+\ 6.701$	$+\ 1\,581.109$	$-\ 9\,881.893$
(17)	M_{87}	$=+\ 309.495$	$-\ 93.628$	$+\ 14\,486.572$	$-\ 90\,539.654$
(18)	M_{78}	$=+\ 464.232$	$-\ 78.881$	$+\ 14\,680.024$	$-\ 91\,743.826$
(19)	$M_{8,10}$	$=-\ 170.635$	$+\ 114.522$	$-\ 15\,275.220$	$+\ 95\,468.520$
(20)	M_{79}	$=-\ 648.400$	$+\ 72.180$	$-\ 16\,261.133$	$+\ 101\,630.719$
(21)	$M_{10,8}$	$=+\ 845.144$	$+\ 46.693$	$+\ 5\,071.619$	$-\ 31\,697.691$
(22)	M_{97}	$=-\ 327.401$	$-\ 165.184$	$+\ 15\,137.028$	$-\ 94\,604.472$
(23)	$M_{10,9}$	$=+4\,650.309$	$-\ 713.379$	$+139\,344.170$	$-\ 870\,888.758$
(24)	$M_{9,10}$	$=+3\,687.653$	$-\ 855.163$	$+143\,877.143$	$-\ 899\,218.598$
(25)	$M_{10,12}$	$=-5\,495.453$	$+\ 666.685$	$-144\,415.788$	$+\ 902\,586.450$
(26)	$M_{9,11}$	$=-3\,360.252$	$+1\,020.347$	$-159\,014.171$	$+\ 993\,823.069$
(27)	$M_{12,10}$	$=-1\,703.705$	$-\ 803.092$	$+\ 71\,800.798$	$-\ 448\,747.514$
(28)	$M_{11,9}$	$=+8\,845.208$	$-\ 557.624$	$+173\,036.115$	$-1\,081\,462.787$

M_{12}, M_{13}, X_1 を確定する條件として構造の對稱性より $M_{12,11}=0$, $M_{11,12}=0$ 及第一公式 (6) による $M_{1,2\cdot4\cdots10,12}=0$を與ふれば,

	M_{12}	M_{13}	X_1	P
(29)	$+43\,055.6$	$-9\,851.$	$+1\,665\,675.$	$=+10\,410\,322.$
(30)	$+51\,369.6$	$-9\,375.8$	$+1\,712\,941.$	$=+10\,705\,730.$
(31)	$+\ 4\,776.4$	$-1\,565.9$	$+\ 239\,534.$	$=+\ 1\,497\,065.$

$M_{12}=-0.002\,923P$

$M_{13}=+0.028\,574P$

$X_1=+6.250\,155P$ これを M の前記各計算式に代入せる結果は,

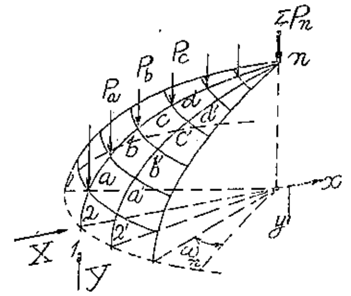
$M_{21}=-0.0059P$	$M_{24}=+0.0059P$	$M_{42}=-0.0027P$	$M_{31}=+0.0077P$
$M_{43}=-0.042$ 〃	$M_{34}=-0.053$ 〃	$M_{46}=-0.045$ 〃	$M_{35}=+0.046$ 〃
$M_{64}=+0.066$ 〃	$M_{53}=+0.048$ 〃	$M_{65}=-0.053$ 〃	$M_{56}=-0.022$ 〃
$M_{68}=-0.013$ 〃	$M_{57}=-0.026$ 〃	$M_{86}=+0.015$ 〃	$M_{75}=-0.064$ 〃
$M_{87}=+0.089$ 〃	$M_{78}=-0.010$ 〃	$M_{8,10}=-0.104$ 〃	$M_{79}=+0.073$ 〃
$M_{10,8}=-0.424$ 〃	$M_{97}=+0.537$ 〃	$M_{10,9}=-0.076$ 〃	$M_{9,10}=+0.638$ 〃
$M_{10,12}=+0.500$ 〃	$M_{9,11}=-1.175$ 〃	$M_{12,10}=+0.635$ 〃	$M_{11,9}=-2.036$ 〃

第九節　穹構拱の解法

穹窿式構造は謂ふまでもなく立體構であるが，その形式及載荷に關して共軛對稱面を有するものにありては，その對稱面内にある斜材構即ち拱肋を平面構の理論によつて解くことが出來る。

第十圖は水平繋材によつて主要材たる拱肋の各格點を同心圓に連結せる圓天井(Dome)の骨線形の一部を示す

第 十 圖



もので，同位の荷重即ち同一圓周上にある格點荷重が等量なる場合には各拱肋が對稱變形をなすから各繋材には彎曲も扭曲も惹起されないが，格點の水平變位によつて同位の各繋材に同一量の伸縮が起る。故にこの構造の解析には一つの拱肋とこれに連接せる關係繋材だけを取扱へばよいが，唯この水平繋材の存するが爲に構造の彈性變形に對し各材，特に繋材の軸應力變形效果を故なくして無視することが出來ないことになる。斯く繋材のあるが爲に，これなき單一拱よりは解法が複雜になることは已むを得ないが，拱肋の中間格點に繋材が存すると言ふ條件は他方に於て彈性式の或形式を供給するので，從つて解式が數に於て單一拱の場合よりも余分に作製され得ることゝなり，その何れか余分の彈性式は計算の照査等に使用され得るから好都合となる。

斯くの如き狀態の下に一つの拱肋の $12\ldots.a\ldots.n$ とその兩側の繋材 aa' 等を考へ，その任意部分 $12\ldots.ab$ が既知 $cd\ldots.n$ が未知なるものとするとき，格點 $1,2\ldots.a,b,c$ 等の彈性關係を利用して斜材の曲力率 M_{cb}，軸應力 N_{bc} 及水平繋材の軸應力 $N_{cc'}$ を求むることが出來れば，この構拱の總ての應力が解かれ得ることゝなる。

1．繋材軸應力 $N_{cc'}$ の算定

連構材 abc に關する第一公式 (5) の ξ 變位の形式は，

$$JM_{ab}-2JM_{ba}+2JM_{bc}-JM_{cb}=\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{bc}+\frac{1}{l\alpha}\xi_{ab}-\frac{1}{l\beta}\xi_{bc}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i})$$

水平繋材 cc' はその兩端の正の變位 ξ_c により $2\sin(\omega_n/2)\xi_c$ だけ短縮して壓應力を生ずるからその軸應力變形式は

$$\left.\begin{array}{l} HN_{cc'}=-2\sin\dfrac{\omega_n}{2}\xi_c \qquad (aa' \text{ 及 } bb' \text{ に就て同樣}) \\ \text{但 } \omega_n\text{：隣接せる二拱肋の水平交角} \end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii})$$

(i) に (ii) を代入して ξ を驅逐すれば，

$$JM_{ab}-2JM_{ba}+2JM_{bc}-JM_{cb}=\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{bc}$$

$$-\frac{1}{2\sin\dfrac{\omega_n}{2}}\left\{\frac{1}{l\beta_{ab}}HN_{aa'}-\left(\frac{1}{l\beta_{ab}}+\frac{1}{l\beta_{bc}}\right)HN_{bb'}+\frac{1}{l\beta_{bc}}HN_{cc'}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{iii})$$

これより $N_{cc'}$ を抽出して，

$$N_{cc'}=\frac{l\beta_{bc}}{H_{cc'}}\left[2\sin\frac{\omega_n}{2}\left\{-JM_{ab}-2(J_{ab}+J_{bc})M_{bc}-J_{bc}M_{cb}+\frac{H\alpha}{l\beta}N_{ab}-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{bc}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{l\beta_{ab}}HN_{aa'}+\left(\frac{1}{l\beta_{ab}}+\frac{1}{l\beta_{bc}}\right)HN_{bb'}\right]\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)\ \text{或は (I)}$$

上式は第一公式 (5) 或は第二公式 (8) の性質と同じく，これを左固定端に適用するときは ab を虛材，亦右固定端に適用するときは bc を虛材と看做して差支ない。而して全構拱の對稱變形の場合に於ては，拱肋 $12\ldots.n$ の右端 n は垂直變位に無關係の誘導式なる上式 (24) の適用に對して固定端と同樣に取扱はれ得ることは明である。

或は上法の代りに第二公式 (9) を連構材 $12\ldots.bc$ に適用すれば，

$$\left(2\sum_1^c l\beta+\sum_2^c l\beta\right)JM_{12}+\left\{\left(\sum_1^c l\beta+2\sum_2^c l\beta\right)J_{12}+\left(2\sum_2^c l\beta+\sum_3^c l\beta\right)J_{23}\right\}M_{23}+\ldots.$$

$$\ldots.+\left\{\left(\sum_{a}^{c}l\beta+2l\beta_{bc}\right)J_{ab}+(2l\beta_{bc}+0)J_{bc}\right\}M_{bc}+l\beta J_{bc}M_{cd}+\sum_{1}^{c}(H\alpha N)=G\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{iv})$$

但 $G=\theta_1\sum_{1}^{c}l\beta-(\xi_1-\xi_c)$

(iv) に (ii) を代入して ξ_c を消去し，且つ構造の環境條件に從つて，$\theta_1=0$, $\xi_1=0$ を與へ $N_{cc'}$ を抽出すれば，

$$N_{cc'}=\frac{2\sin\frac{\omega_n}{2}}{H_{cc'}}\Big[-\left(2\sum_{1}^{c}l\beta+\sum_{2}^{c}l\beta\right)JM_{12}-\left\{\left(\sum_{1}^{c}l\beta+2\sum_{2}^{c}l\beta\right)J_{12}+\left(2\sum_{2}^{c}l\beta+\sum_{3}^{c}l\beta\right)J_{23}\right\}M_{23}\ldots$$

$$-\left\{\left(\sum_{a}^{c}l\beta+2l\beta_{bc}\right)J_{ab}+(2l\beta_{bc}+0)J_{bc}\right\}M_{bc}-l\beta J_{bc}M_{cd}-\sum_{1}^{c}(H\alpha N)\Big]\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

或は (I)'

上式 (I) 或は (I)' 何れによつても $N_{cc'}$ が計算されるが，數計算の便利なると計算誤差の累積が少い點に於て (I)' が優る。然し格點數が增加して取扱ふべき項數が多くなるに至れば式 (I) に於ける項數が 7 を超過せない點よりしてその計算が (I)' よりも追々と簡單になる。

2. 曲力率 $M_{cd}(=-M_{cb})$ の算定

既に $N_{cc'}$ を彈性式によつて定めたる以上は，M_{cd} は平衡條件の諸公式の何れかによつて簡單にこれを求むることが出來る。今連構材 12....c の平衡に關し，c 點を力率原點として靜平衡條件式 (13)' (i) を適用するに，中間格點に作用する力としては繫材の直應力と格點荷重が存し，この繫材直應力は例へば格點 b に對して x 軸方向に $\sin(\omega_n/2)\cdot N_{bb'}$ なる水平力を及ぼすから，

$$M_{12}+Q_{12}\left(\beta_{12}\sum_{1}^{c}l\beta+\alpha_{12}\sum_{1}^{c}l\alpha\right)+N_{12}\left(\beta_{12}\sum_{1}^{c}l\alpha-\alpha_{12}\sum_{1}^{c}l\beta\right)+\left(2\sin\frac{\omega_n}{2}N_{22'}\sum_{2}^{c}l\beta-P_2\sum_{2}^{c}l\alpha\right)+\ldots.$$

$$\ldots+\left(2\sin\frac{\omega_n}{2}N_{bb'}l\beta_{bc}-P_bl\alpha_{bc}\right)+M_{cb}=0$$

これに $Q_{12}=-(M_{12}-M_{23})/l_{12}$, $M_{cb}=-M_{cd}$ 等を代置して，

$$M_{cd}=M_{12}-\left(\frac{\beta}{l_{12}}\sum_{1}^{c}l\beta+\frac{\alpha}{l_{12}}\sum_{1}^{c}l\alpha\right)(M_{12}-M_{23})-\left(\alpha_{12}\sum_{1}^{c}l\beta-\beta_{12}\sum_{1}^{c}l\alpha\right)N_{12}$$

$$+2\sin\frac{\omega_n}{2}\left(N_{22'}\sum_{2}^{c}l\beta+\ldots.+N_{bb'}l\beta_{bc}\right)-\left(P_2\sum_{2}^{c}l\alpha+\ldots.+P_bl\alpha_{bc}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

或は (II)

或は式 (13) 及 (14)a の (i), (iii) を參照して，連構材 12....c の各格點に關する平衡條件を連續的に適用せる等式を作れば，

$$-X_1=\frac{\beta}{l_{12}}(M_{12}-M_{23})+\alpha N_{12}=\ldots.$$

$$\ldots.=\frac{\beta}{l_{ab}}(M_{ab}-M_{bc})+\alpha N_{ab}+2\sin\frac{\omega_n}{2}(N_{22'}+\ldots.+N_{aa'})$$

$$=\frac{\beta}{l_{bc}}(M_{bc}-M_{cd})+\alpha N_{bc}+2\sin\frac{\omega_n}{2}(N_{22'}+\ldots.+N_{aa'}+N_{bb'})=\ldots.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{i})$$

$$-Y_1=\frac{\alpha}{l_{12}}(M_{12}-M_{23})-\beta N_{12}=\ldots.$$

$$\ldots.=\frac{\alpha}{l_{ab}}(M_{ab}-M_{bc})-\beta N_{ab}-(P_2+\ldots+P_a)$$

$$=\frac{\alpha}{l_{bc}}(M_{bc}-M_{cd})-\beta N_{bc}-(P_2+\ldots.+P_a+P_b)=\ldots.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{ii})$$

玆に X_1 及 Y_1 は支點の水平及垂直反力を指示する。

構材 12 と bc に關する各等式に就て N_{bc} を驅逐して M_{ca} を抽出すれば,

$$M_{ca}=M_{bc}-\frac{l_{bc}}{l_{12}}(\beta_{12}\beta_{bc}+\alpha_{12}\alpha_{bc})(M_{12}-M_{23})-l_{bc}(\alpha_{12}\beta_{bc}-\beta_{12}\alpha_{bc})N_{12}$$

$$+2l\beta_{bc}\sin\frac{\omega n}{2}(N_{22'}+\ldots\ldots+N_{bb'})-l\alpha_{bc}(P_2+\ldots\ldots+P_b)$$

卽ち

$$M_{ca}=M_{bc}-\frac{l_{bc}}{l_{12}}\cos(\omega_{12}-\omega_{bc})(M_{12}-M_{23})+l_{bc}\sin(\omega_{12}-\omega_{bc})N_{12}$$

$$+2l\beta_{bc}\sin\frac{\omega n}{2}(N_{22'}+\ldots\ldots+N_{bb'})-l\alpha_{bc}(P_2+\ldots\ldots+P_b) \quad \ldots\ldots(22) \text{ 或は (II)}'$$

式 (II)′ は式 (II) によつて $M_{ca}-M_{bc}$ を作れば得られ, その計算の内容は (II) よりも可なり簡單である。

3. 軸應力 N_{bc} の算定

上式 (i) 及 (ii) に就て $(M_{bc}-M_{ca})$ を驅逐して N_{bc} を抽出すれば,

$$N_{bc}=\frac{1}{l_{12}}\sin(\omega_{12}-\omega_{bc})(M_{12}-M_{23})+\cos(\omega_{12}-\omega_{bc})N_{12}$$

$$-2\alpha_{bc}\sin\frac{\omega n}{2}(N_{22}'+\ldots\ldots+N_{bb}')-\beta_{bc}(P_2+\ldots\ldots+P_b) \quad \ldots\ldots(28) \text{ 或は (III)}$$

上式は M_{ca} に無關係なるが故に, これにより M_{ca} に先んじて N_{bc} を求むるも差支ない。然し M_{ca} を定めて後 N_{bc} を求むるには上記平衡式 (ii) より直ちに,

$$N_{bc}=\left\{\frac{\alpha}{l_{12}}(M_{12}-M_{23})+\frac{\alpha}{l_{bc}}(M_{bc}-M_{ca})+\beta N_{12}-\beta N_{bc}-(P_2+\ldots\ldots+P_b)\right\} \quad \ldots\ldots(29) \text{ 或は (III)}'$$

或は公式 (12) (iii) 卽ち格點 b に關する y 軸方向の平衡條件より N_{bc} を求むれば,

$$\alpha Q_{ba}+\alpha Q_{bc}+\beta N_{ba}+\beta N_{bc}+P_b=0$$

これに　$\alpha_{ba}Q_{ba}=-\alpha_{ab}Q_{ba}=\alpha_{ab}(M_{ab}-M_{bc})/l_{ab},\qquad \beta_{ba}N_{ba}=-\beta_{ab}N_{ab}$ を支へて,

$$N_{bc}=\frac{1}{\beta_{bc}}\left\{-\frac{\alpha}{l}M_{ab}+\left(\frac{\alpha}{l_{ab}}+\frac{\beta}{l_{bc}}\right)M_{bc}-\frac{\alpha}{l}M_{ca}+\beta N_{ab}-P_b\right\} \quad \ldots\ldots(30) \text{ 或は (III)}''$$

N_{bc} の値は上の各式の外にも, 例へば x 軸方向の平衡式適用などから各種の形式を以て表はし得らるゝが, 實際の計算としては各式中 (III) が最簡便に使用され得ると考へられるので, これ以上他の形式の誘出を省略する。

4. M_{12}, M_{23} 及 N_{12} を定むべき條件式

構造の對稱性より頂點 n に於て $\xi_n=0$, $\theta_n=0$ 及支點 1 に於て $Y_1=P_2+\ldots\ldots+P_n$ (但 P_n は頂點 n に關する全荷重の分擔量) なる條件が與へられ得る。而して本解法に數種の解式が存せしと同じく, 上の條件に對して亦數種の形式が作られ得るも, 成るべく計算に便利なる一例として, $\xi_n=0$ に對し本節公式 (I)′, $\theta_n=0$ に對し第一公式 (6) を, 而して反力條件に對し本節解式 (ii) を適用すれば,

$$\left.\begin{array}{lr} \text{公式 (I)}' \text{ に於て,}\qquad N_{nn'}=0 & \text{(i)} \\ JM_{12}+(J_{12}+J_{23})M_{23}+\ldots\ldots+JM_{nm}=0 & \text{(ii)} \\ \dfrac{\alpha}{l_{12}}(M_{12}-M_{23})-\beta N_{12}+(P_2+\ldots\ldots+P_n)=0 & \text{(iii)} \end{array}\right\}\ldots\ldots\text{(IV)}$$

格點數が比較的多い場合に對しては上式 (IV) の (i) 或は (ii) に代ふるに, 第一公式 (5) を適用せる,

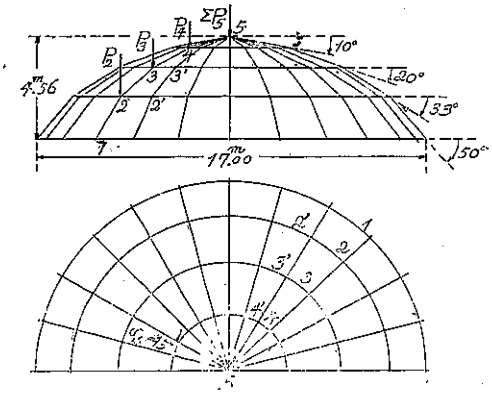
$$J(M_{mn}-2M_{nm})-\frac{H\alpha}{l\beta}N_{mm}+\frac{H_{mm'}}{l\beta_{mn}2\sin\left(\frac{\omega_n}{2}\right)}N_{mm'}=0$$

を用ふるも一方法である。

例　解

第十一圖は各屋輪に夫々格點荷重 P_2, P_3, P_4 が懸かり及屋頂に ΣP_5 が作用せる穹構拱の半部を示すものであつて，その任意の拱肋を成す連構材 12345, 及屋輪をなす緊材 22′ 等の形狀が別表に與へられてある。各材の曲力率及軸應力を求むること。

第 十 一 圖



構　材　表

構材	ω	l(cm)	F(cm²)	I(cm⁴)	EH(cm⁻¹)	EJ(cm⁻³)	α	β	$l\alpha$(cm)
拱肋 12	−50°	250	40	2 000	6.25	1/48	.642 79	−.266 04	160.697 5
〃 23	−33°	250	40	2 000	6.25	1/48	.838 67	−.544 64	209.667 5
〃 34	−20°	250	40	2 000	6.25	1/48	.939 69	−.342 02	234.922 5
〃 45	−10°	250	40	2 000	6.25	1/48	.984 81	−.173 65	246.202 5

$\gamma\alpha$	$l\gamma\beta$(cm)	$\Sigma Kl\gamma\beta$(cm⁻¹)	構材	l'(cm)	F(cm²)	EH'(cm⁻¹)
.167 81	−49 995 6	−.083 33	緊材 22′	180	14.4	12.5
.218 94	−35.545 9	−.142 57	〃 33′	125.6	10.0	12.5
.245 31	−22.321 9	−.179 77	〃 44′	64.3	5.1	12.5
.257 09	−11.333 3	−.198 66				

但　$\gamma=2\sin\frac{\omega_1}{2}=0.26106,\qquad K=\frac{J}{H'}=\frac{1}{600}\text{cm}^{-2},\qquad K'=\frac{H}{H'}=0.5$

計　算

曲力率 M_{12}, M_{23} 軸應力 N_{12} を未知量に採り，公式 (I)′ (II)′ 及 (III) を適用する。

公式 (I)′ により，

(1) $$N_{22'}=-2Kl\gamma\beta_{12}M_{12}-Kl\gamma\beta_{12}M_{23}-K'\gamma\alpha N_{12}=+0.166\,6M_{12}+0.083\,3M_{23}-0.083\,9N_{12}$$

公式 (II)′ により

(2) $$M_{34}=M_{23}-\cos(-17°)(M_{12}-M_{23})+l\sin(-17°)N_{12}+l\gamma\beta_{23}N_{22'}-l\alpha_{23}P_2$$

$$=-0.956\,3M_{12}+1.956\,3M_{23}-73.092\,5N_{12}-209.667\,5P_2$$

公式 (III) により，

(3) $$N_{23}=\frac{1}{l}\sin(-17°)(M_{12}-M_{23})+\cos(-17°)N_{12}-\gamma\alpha_{23}N_{22'}-\beta_{23}P_2$$

$$=-0.001\,2M_{12}+0.001\,2M_{23}+0.956\,3N_{12}+0.544\,6P_2$$

以下, 公式 (I)′, (II)′ 及 (III) を順次上と同様に適用して,

(4) $$N_{33'}=-K\gamma\left(2\sum_{4}^{3}l\beta+l\beta_{23}\right)M_{12}-K\gamma\left(\sum_{1}^{3}l\beta+4l\beta_{23}\right)M_{23}-Kl\gamma\beta_{34}-K'\gamma(\alpha N_{12}+\alpha N_{23})$$

$$=-0.059\,1M_{12}+0.321\,8M_{23}-4.344\,1N_{12}-12.481P_2$$

(5) $$M_{45}=M_{34}-\cos(-30°)(M_{12}-M_{23})+l\sin(-30°)N_{12}+l\gamma\beta_{34}(N_{22'}+N_{33'})-l\alpha_{34}(P_2+P_3)$$

$$=-10.147M_{12}-9.183\,5M_{23}-96.267\,5N_{12}-165.99P_2-234.922\,5P_3$$

(6) $$N_{34}=\frac{1}{l}\sin(30°)(M_{12}-M_{23})+\cos(30°)N_{12}-\gamma\alpha_{34}(N_{22'}+N_{33'})-\beta_{34}(P_2+P_3)$$

$$=-0.028\,4M_{12}-0.097\,4M_{23}+1.946\,1N_{12}+3.403\,8P_2+0.342P_3$$

(7) $$N_{44'}=-K\gamma\left(2\sum_{1}^{4}l\beta+\sum_{2}^{4}l\beta\right)M_{12}-K\gamma\left(\sum_{1}^{4}l\beta+4\sum_{2}^{4}l\beta+l\beta_{34}\right)M_{23}$$

$$-K\gamma\left(\sum_{2}^{4}l\beta+4l\beta_{34}\right)M_{34}-Kl\gamma\beta_{34}M_{45}-K'\gamma(\alpha N_{12}+\alpha N_{23}+\alpha N_{34})$$

$$=-1.601\,2M_{12}+0.129\,3M_{23}-21.205\,8N_{12}-58.074\,7P_2-8.781\,8P_3$$

(8) $$M_{56}=(-M_{54})=M_{45}-\cos(-40°)(M_{12}-M_{23})+l\sin(-40°)N_{12}+l\gamma\beta_{45}(N_{22'}+N_{33'}+N_{44'})$$

$$-l\alpha_{45}(P_2+P_3+P_4)$$

$$=+6.014\,8M_{12}-14.474\,5M_{23}+33.550\,2N_{12}+378.434\,1P_2-381.598\,9P_3-246.2\text{[illegible]}2\,5P_4$$

(9) $$N_{45}=\frac{1}{l}\sin(-40°)(M_{12}-M_{23})+\cos(-40°)N_{12}-\gamma\alpha_{45}(N_{22'}+\ldots\ldots+N_{44'})-\beta_{45}(P_2+\ldots\ldots+P_4)$$

$$=+0.381\,4M_{12}-0.1348M_{23}+7.356\,4N_{12}+18.313\,2P_2+2.431\,4P_3+0.173\,6P_4$$

M_{12}, M_{23}, N_{12} を定むべき條件式として式 (IV) を適用すれば,

$$0=N_{55'}=-K\gamma\left(5\sum_{1}^{2}l\beta+\sum_{2}^{5}l\beta\right)M_{12}-K\gamma\left(\sum_{1}^{5}l\beta+4\sum_{2}^{5}l\beta+\sum_{3}^{5}l\beta\right)M_{23}-K\gamma\left(\sum_{2}^{5}l\beta\right.$$

$$\left.+4\sum_{3}^{5}l\beta+l\beta_{45}\right)M_{34}-K\gamma\left(\sum_{3}^{5}l\beta+4l\beta_{45}\right)M_{45}-Kl\gamma\beta_{45}(-M_{54})-K'\gamma(\alpha N_{12}+\ldots\ldots+\alpha N_{45})$$

$$0=M_{12}+2M_{23}+2M_{34}+2M_{45}+(-M_{54})$$

$$0=\frac{\alpha}{l_{12}}(M_{12}-M_{23})-\beta N_{12}+(P_2+\ldots\ldots+P_5)$$

即ち

	M_{12}	M_{23}	N_{12}	P_2	P_3	P_4	P_5
$0=$	$-\ 3.268\,2$	$-\ 1.077\,9$	$-\ 39.522\,2$	$-\ 94.956\,11$	$-\ 38.807\,8$	$-\ 4.695\,4$	0
$0=$	$-27.039\,3$	$-32.852\,9$	$-299.205\,1$	-363.881	$-851.443\,9$	$-246.202\,5$	0
$0=$	$+\ 0.642\,9$	$-\ 0.642\,8$	-191.51	$+250$	$+250$	$+250$	$+250$

これを解きて

		P_2	P_3	P_4	P_5
(10)	$M_{12}=$	$-20.102\,4$	$+13.273\,7$	$+18.930\,4$	$+17.067$
(11)	$M_{23}=$	$+16.246\,9$	-23.819	$-10.292\,5$	$-\ 1.587\,8$
(12)	$N_{12}=$	$-\ 1.183\,4$	$-\ 1.429\,9$	$-\ 1.403\,5$	$-\ 1.368$

この値を計算式 (1) 乃至 (9) に代置して,

	P_2	P_3	P_4	P_5
(1)	$N_{22'}=-\ 1.907$	$+\ 0.333$	$+\ 2.415$	$+\ 2.827$
(2)	$M_{34}=-16.565$	$+32.880$	-21.494	-19.914
(3)	$N_{23}=-\ 0.129$	$-\ 1.487$	$-\ 1.905$	$-\ 1.949$
(4)	$N_{33'}=-\ 1.023$	$-\ 4.238$	$+\ 1.666$	$+\ 4.423$
(5)	$M_{45}=+\ 2.712$	-12.312	$+37.545$	-26.902
(6)	$N_{34}=+\ 0.891$	$-\ 0.498$	$-\ 2.266$	$-\ 2.993$
(7)	$N_{44'}=+\ 1.309$	$+\ 3.366$	$-\ 1.880$	$+\ 1.477$
(8)	$-M_{54}=-8.347$	$+\ 5.035$	-30.449	$+79.730$
(9)	$N_{45}=-\ 0.241$	$-\ 0.187$	$-\ 1.543$	$-\ 4.340$

(但 M の値は cm$P$ 單位, N の値は P 單位)

第三章　公式の補充に就て

第十節　格間荷重に對する連彈性公式

剛結構造に働く荷重を格點荷重として可なるか或は格間荷重となすべきかは荷重の性質及構造形式によつて採定せらるゝは勿論であつて，その構成形式に關しては例へば，格點荷重を假定するによつて多數構材が彈性變形に働かるゝ迄に到達せざるものに於て，或は構材數の少數なるがため格點荷重としての解析が計算誤差を大ならしむる如きものなどに於て總て格間荷重を假定して解法を一般的ならしめ，格點載荷は單にその特例に過ぎざるものとするのが至當であつて，垂直載荷の樹立矩形架などはその一例である。

斯かる構造の連彈性公式に對して格間載荷に關する法式補充をなすに當り樣々なる載荷樣式を考ふれば從つて各種の方式が生ずるならんが，玆では次の假定の下に普通能く存する二三の樣式を取扱ふに止める。即ち，

格間荷重はその作用構材に垂直なるものとし從つて構材に傾斜せる荷重あらばその分力たる材軸荷重はこれを構材兩端の格點に配分して取扱へ，一構材は常に全長を通じて一樣なる軸力に作用せらるゝものと假定する。

今構材 ab の a 端より任意距離 v_a の點 O に單一荷重 P_a が作用する場合，假りに ao, ob を二つの連構材として考へ公式 (3), (7) 及 (12) (iii) を適用すれば次の如く，

$$J_{ao}(2M_{ab}-M_{oa})=\theta_a-\frac{\beta}{v_a}\xi_{ao}+\frac{\alpha}{v_a}\eta_{ao}$$

$$3J_{ao}(M_{ab}-M_{ba})+J_{ob}(2M_{ob}-M_{ba})=\theta_a-\frac{\beta}{l_{ab}-v_a}\xi_{ob}+\frac{\alpha}{l_{ab}-v_a}\eta_{ob}$$

$$\frac{1}{v_a}(M_{ab}+M_{oa})-\frac{1}{l_{ab}-v_a}(M_{ob}+M_{ba})+P_a=0$$

この 3 式に就て M_{ob} を初め中間記號 0 を含む項を總て消去すれば，

$$2JM_{ab}-JM_{ba}=-\frac{\beta}{l}\xi_{ab}+\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}+\theta_a-\frac{J}{l^2_{ab}}v_a(l-v_a).2l-v_a)P_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)'$$

同樣にして構材 mn に就て變角 θ_n を殘留せしむる形式を作れば，

$$JM_{mn}-2JM_{nm}=\frac{\beta}{l}\xi_{mn}-\frac{\alpha}{l}\eta_{mn}-\theta_n-\frac{J}{l^2_{mn}}v_m(l^2-v_m^2)P_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)'$$

同じく連構材 abc に就て荷重形式を與ふれば，

$$JM_{ab}-2JM_{ba}+2JM_{bc}-JM_{cb}=\frac{\beta}{l}\xi_{ab}-\frac{\beta}{l}\xi_{bc}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}+\frac{\alpha}{l}\eta_{bc}$$

$$-\frac{J}{l^2_{ab}}v_a(l^2-v_a^2)P_a-\frac{J}{l^2_{bc}}v_b(l-v_b)(2l-v_b)P_b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)'$$

上の三つの式は言ふまでもなく基本式 (3), (4) 及 (2) 式に格間荷重の函數を附加したるものに外ならないからこれを指示するにその原式番號に (′) を附したるものを用ひ參照に便ならしむるものとする。次で連彈性各公式 (5) 乃至 (11) に對し，各材に總て單一荷重が存する場合，その附加すべき荷重函數を記號 (P) にて表はし各原式番號に (′) を附したるものを以てその所屬を指示すれば次の如き各形式が得られる。尙ほこれら荷重函數の各項係數の値としては，上の基本式 (3)′, (4)′ 等に表されある 2 種のもの及その二つの和の 3 種のものが存するに過ぎないからこれらを便宜上の記號 q', q'' 及 r を以て表はす。卽ち

$$-q'=-\frac{J}{l^2}v(l^2-v^2),\qquad -q''=-\frac{J}{l^2}v(l-v)(2l-v),\qquad -r=-(q'+q'')=-J\frac{3}{l}v(l-v)\;\ldots\ldots(31)$$

第一公式右邊に附加すべき荷重函數：

$$(P)=-q_{ab}'P_a-(r_{bc}P_b+\ldots\ldots+r_{km}P_k)-q_{mn}''P_m\;\ldots\ldots(5)'$$

$$(P)=-\frac{1}{3}(r_{ab}P_a+\ldots\ldots+r_{mn}P_m)\;\ldots\ldots(6)'$$

$$(P)=-(r_{ab}P_a+\ldots\ldots+r_{km}P_k)-q_{mn}''P_m\;\ldots\ldots(7)'$$

第二公式右邊に附加すべき荷重函數：

$$(P)=-q_{ab}'P_a\Big(\sum_b^n l\beta\Big)-\Big\{r_{bc}P_b\Big(\sum_c^n l\beta\Big)+\ldots\ldots+r_{km}P_k(l\beta_{mn})\Big\}$$
$$-(q_{bc}''P_bl\beta_{bc}+\ldots\ldots+q_{mn}''P_ml\beta_{mn})\;\ldots\ldots(8)'$$

$$(P)=-\Big\{r_{ab}P_a\Big(\sum_b^n l\beta\Big)+\ldots\ldots+r_{km}P_k(l\beta_{mn})\Big\}-(q_{ab}''P_al\beta_{ab}+\ldots\ldots+q_{mn}''P_ml\beta_{mn})\;\ldots\ldots(9)'$$

第三公式右邊に附加すべき荷重函數：

$(P)=${公式 (8)′ に就て β の代りに α を置く} ……(10)′

$(P)=${公式 (9)′ に就て β の代りに α を置く} ……(11)′

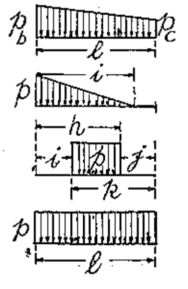
又連彈性公式より誘導する各種計算公式には上記の荷重係數中，翼構材に關する q の 2 種の組合せより成る係數の入り來ることが明であつて，これを p', p'' を以て表せば，

$$-p'=-\frac{3J}{l^2}v(l-v)^2,\qquad -p''=-\frac{3J}{l^2}v^2(l-v),\qquad -(p'+p'')=-r\;\ldots\ldots(32)$$

公式 (31),(32) に於ける荷重係數 p, q の四つの形式は例へば撓度撓角法に於ける 4 種の荷重係數と各その本體に於て同一なることを知るが，これ當然のことである。

任意の格間に於ける配賦荷重に對してはその格間每に上記各係數を v に關して積分して得らるゝが，これを參考までに普通よく取扱はるゝ**第十二圖**の載荷形式に就て計算すれば次の値となる。

第二十圖



$-q'P$	$-q''P$	$-rP$
$\ldots\ldots-\frac{Jl^2}{60}(7p_b+8p_c)$	$-\frac{Jl^2}{60}(8p_b+7p_c)$	$-\frac{Jl^2}{4}(p_b+p_c)$
$\ldots\ldots-\frac{Jp}{60l^2}(10l^2-3i^2)i^2$	$-\frac{Jp}{60l^2}(20l^2-15li+3i^2)i^2$	$-\frac{Jp}{4l}(2l-i)i^2$
$\ldots\ldots-\frac{Jp}{4l^2}(h^2-i^2)(2l^2-h^2-i^2)$	$-\frac{Jp}{4l^2}(k^2-j^2)(2l^2-k^2-j^2)$	$-\frac{Jp}{2l}\{3l(h^2-i^2)-2(h^3-i^3)\}$
$\ldots\ldots-\frac{J}{4}pl^2$	$-\frac{J}{4}pl^2$	$-\frac{J}{2}pl^2$

$$\left.\begin{array}{ll} -p'P & -p''P \\ \cdots\cdots-\dfrac{Jl^2}{20}(3p_b+2p_c) & -\dfrac{Jl^2}{20}(2p_b+3p_c) \\ \cdots\cdots-\dfrac{Jp}{20l^2}(10l^2-10li+3i^2)i^2 & -\dfrac{Jp}{20l^2}(5li-3i^2)i^2 \\ \cdots\cdots-\dfrac{Jp}{4l^2}\{4l(k^3-j^3)-3(k^4-j^4)\} & -\dfrac{Jp}{4l^2}\{4l(k^3-i^3)-3(k^4-i^4)\} \\ \cdots\cdots-\dfrac{J}{4}pl^2 & -\dfrac{J}{4}pl^2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

照　合：$p'=2q''-q'$　　$p''=2q'-q''$　　$3q'=2p''+p'$　　$3q''=2p'+p''$　　$p'+p''=q'+q''=r$

さきに規約せし如く曲力率，剪應力或は軸應力の正負の符號は座標と無關係に示されてあるから，これを應力の連鎖なる連彈性公式に從屬する格間荷重の正負も亦座標と無關係に示さるべく，勿論斯くすれば便利であつて，このことは前記公式 (3)′ の誘導によつて明であつたが念のため次の規約を與へる。

格間荷重に關する符號規約

連彈性公式に關する連構材の任意の格點序列 $\ldots.b, c\ldots.$ に於て，構材 bc に働く格間荷重 P が bc の左右位置に對し下方に向くものを正とする。

格間荷重を有する構造の多くは矩形構であるが，その特に垂直載荷の樹立架構或は架構式浮函などにして對稱形式なるものに對しては第一公式を任意の二連構材（基點に於てはその一構材）に就て常に $G=0$ として適用し得ることになり，從つて第一公式の最簡單なる適用は Clapeyron 氏三曲力率定理或は Bleich の四曲力率定理の適用に到着するものと言はれ得るのである。然しこれに反して彈性變形の複雜なる剛構造或は簡形なりとも剛斜材構たる單線拱，中空多角形などに對して上の諸定理は素より撓度撓角法，定點法などを以つてしては解法が煩雜となるか或は不能となることあるも，然しこれに對する連彈性法則の適用はその第一乃至第三公式の利用により，例へば單線拱に對して第九節例解に示すと同じく基點に於ける不定應力を未知量として應力算出をなし得るなど，その他普ゆる狀態に對して一般剛結構造に關する應力の直接解法の責任を遺憾なく果たし得るであらう。

尙は格間載荷を有する連構材の靜平衡條件は第五節に記せるところと原則に於て何等變るところなきも，唯だ構材端に關する曲力率 M と剪應力 Q との關係値が格間荷重に關するだけの影響をうける。然しこの關係は剛結構造解析法の如何を問はず，例へば撓度撓角法に關する形式とも同一であるから玆にその記述を省略する。

第十一節　鉸端を有する連構材の諸公式

剛結構造中の特別なる格點が鉸結なることはその點に於ける構材の曲力率が零なること及その點に關する構材變角が不定なることである。故に任意構材 ab の a 端が鉸結なる場合に對する彈性式としては M_{ab} を零とし θ_a に無條件なる式を誘けばよく，且これ等の條件は構材の載荷の有無には無關係であるから，さきの彈性基本式誘導法及前節公式 (4)′ を參照して直ちに次の公式を書下し得るのである。

$$-2JM_{ba}=+\frac{\beta}{l}\xi_{ab}-\frac{\alpha}{l}\eta_{ab}-\theta_b-\frac{J}{l^2}v_a(l^2-v_a^2)P_a$$

卽ちこの式は公式 (4)′ に對し mn を ab とし $M_{ab}=0$ を與へたるものに過ぎない。

構材 mn の n 端が鉸結なる場合に對しても同樣にして，

$$2JM_{mn}=-\frac{\beta}{l}\xi_{mn}+\frac{\alpha}{l}\eta_{mn}+\theta_m-\frac{J}{l^2}v_m(l-v_m)(2l-v_m)P_m$$

これら各式は常に連構材の左右兩翼に關して適用せらるべきものであるから連彈性各公式中，その條件式 G が變角 θ_a 及 θ_n 或はその何れか一つを含まざる形式並にそれ等より誘導せる諸解式に對してその材端曲力率 M_{ab} 及 M_{nm} 或はその何れかに零を與ふるとき，その各公式は總て兩端が鉸，或は何れか一端が鉸なる連構材にその儘適用され得ることになる。例へば第一公式に於て式 (5) はその兩端とも鉸結なるものに $M_{ab}=M_{nm}=0$ として直ちに適用され，式 (6) は全然適用されず，又式 (7) は n 端鉸なるものに $M_{nm}\doteqdot 0$ としてその儘適用されることになる。鉸格點は多くの場合構造の支點に假定せらるゝが，若し中間格點に存するが如き場合に於ては，その點を材端として連構材が公式適用上に關し中斷せらるゝものなるは勿論である。

第十二節　變形式法による本解法の照合

第一節に於ける構材 bc の曲力率に關する彈性線の有理整函數，

$$u=A_3v^3+A_2v^2+A_1v+A_0$$

より M_{bc} 及 Q_{bc} を表はすときは，

$$M_{bc}=-EI\left(\frac{\partial^2u}{\partial v^2}\right)_{v=0}=-2EIA_2,\qquad Q_{bc}=-EI\left(\frac{\partial^3u}{\partial v^3}\right)_{v=0}=-6EIA_3$$

u 式に對し構材の環境條件として，

$$u_{v=0}=-\xi_b\beta_{bc}+\eta_b\alpha_{bc},\qquad u_{v=l}=-\xi_c\beta_{bc}+\eta_c\alpha_{bc},\ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{v=0}=\theta_b\ \text{及}\ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{v=l}=\theta_c$$

を與へて系數 A_2, A_3 の値を定め，上の M 及 Q の式に代入するときは，

$$M_{bc}=\frac{2EI}{l}\left\{2\theta_b+\theta_c-\frac{3}{l}(\xi_b-\xi_c)\beta_{bc}+\frac{3}{l}(\eta_b-\eta_c)\alpha_{bc}\right\}$$

$$=\frac{1}{J}\left(\frac{2}{3}\theta_b+\frac{1}{3}\theta_c-\frac{\beta}{l}\xi_{bc}+\frac{\alpha}{l}\eta_{bc}\right)\quad\cdots\cdots(34)_{\text{I}}$$

$$Q_{bc}=-\frac{6EI}{l^2}\left\{\theta_b+\theta_c-\frac{2}{l}(\xi_b-\xi_c)\beta_{bc}+\frac{2}{l}(\eta_b-\eta_c)\alpha_{bc}\right\}$$

$$=-\frac{2}{Jl}\left(\frac{1}{2}\theta_b+\frac{1}{2}\theta_c-\frac{\beta}{l}\xi_{bc}+\frac{\alpha}{l}\alpha_{bc}\right)\quad\cdots\cdots(34)_{\text{II}}$$

式 (1) を茲に持來せば，

$$N_{bc}=-\frac{\alpha}{H}\xi_{bc}-\frac{\beta}{H}\eta_{bc}\quad\cdots\cdots(1)_{\text{再出}}$$

これら應力變形式はこれを剛斜材構に關する撓度撓角公式と言ひ得るのであつて，その方向余弦 α,β の變化に應ずる各種の構材應力の形式が存し，特に $\alpha=\pm1$ 從つて $\beta=0$ なるときの上式 M の形は Wilson 氏公式即ち矩形構に關する撓度撓角式なることは明である。而して本文の連彈性公式を連應力公式と稱するならば，本節公式は一構材に關する全變形公式とも稱し得べく，彈性式を應力の項で表はすか，或は變形の項で表はすかの相違がそこに存するに過ぎない。故に公式 (1), (34) 及靜平衡條件式 (12) の間に適切に各式中の變形 θ,ξ,η を消去することにより連應力公式に到達し得ることは勿論であつて，例へば簡單なる場合として式 $(34)_{\text{I}}$ によつて表はさるゝ $M_{ab}, M_{ba}, M_{bc}, M_{cb}$ に就て $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ を消去して公式 (2) を誘導し得るのである。然しかゝる方法によつて連彈性公式を得んとすることは一般には煩雜になることを豫期せねばならない。

元來撓度撓角法による解法は一般に迂遠なる方法であるが，構材數の多き割合に格點數及その變形數が少なき構造に對しこれを用ひて有利なるが故に，かゝる特形に對してはこれを本文解法の代用となし或は本文解法と互に照

合する方便として好都合である。

偖て公式 (1), $(34)_{\mathrm{I}}$ 及 $(34)_{\mathrm{II}}$ を格點 b に結接する c 個の構材 $b1, b2, \ldots. bc$ に就て表はしたるものに靜平衡條件式 (12) を適用して總ての應力の項を除去し變形の項に展開すれば,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^c\left\{(\lambda\alpha^2+\mu\beta^2)\xi_{bc}+(\lambda-\mu)\alpha\beta\eta_{bc}-\nu\beta(\theta_b+\theta_c)\right\}=P_{bx}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i})\\
&\sum_1^c\{(\lambda-\mu)\alpha\beta\xi_{bc}+(\lambda\beta^2+\mu\alpha^2)\eta_{bc}+\nu\alpha(\theta_b+\theta_c)\}=P_{by}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii})\\
&\sum_1^c\left\{-\nu\beta\xi_{bc}+\nu\alpha\eta_{bc}+\frac{1}{3}\nu l(2\theta_b+\theta_c)\right\}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{iii})\\
&\text{但}\quad \lambda=\frac{EF}{l}=\frac{1}{H},\quad \mu=\frac{12EI}{l^3}=\frac{2}{Jl^2},\quad \nu=\frac{1}{2}\mu l
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

この變形式に於ける各項の系數は左上より右下に向ふ對稱線に關して對稱に配置されおるを視る。故に構造の各格點に關する各變形式をその各變形と相應ずる或る順に排列して得る聯立方程式の形はその系數に於て同樣に對稱配置をなす雁行形になるわけである。而してこの雁行形方程式を行列式法,元數消滅法或は試索代入法によつて解くべきか,亦各式を變位と變角とに關し分割計算して可なるか等はその構造及び式の性狀によつて採定せらるべくそれらに關する解說は上式が單に本文連彈性解法の照合として提示せられたるものに過ぎないのであるから玆にそれを省略するも,吾人が彈性力學に關する累加法則 (Superposition theory) に基いて構造應力變形を解く範圍に於て,その計算行程中に個人的假定を與へない限りは,上式 (35) による値を式 (1) 及 (34) に代置して得る應力の値は連彈性解法に依つて得る應力の値と理論上一致すべきは必然であつて强いて例證を要せぬであらう。

因に,公式 (35) の誘導及解法に關しては,その概要を工學雜誌エンジニアー,昭和5年6月號所載:高次不靜定構造解析特論に記述したるが,連彈性解法に比し變形解法の煩なることはその例解によつて窺知し得らるゝのであつて,計算上の手數を少くせんためには式 (35) の分割解法の可否などが自然考へられることになる。一例として (35) の (i) 及 (ii) に對し $\mu=0$ を與ふれば,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\lambda(\alpha^2\xi_{bc}+\alpha\beta\eta_{bc})=P_{bx}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i})\\
&\sum\lambda(\alpha\beta\xi_{bc}+\beta^2\eta_{bc})=P_{by}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii})\\
&\sum\left\{-\nu\beta\xi_{bc}+\nu\alpha\eta_{bc}+\frac{1}{3}\nu l(2\theta_b+\theta_c)\right\}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{iii})
\end{aligned}\right\}$$

この式 (i) 及 (ii) は,嚴正には,鉸結構に關する變位解式であるが,λ に比し μ の可なり小なる構成狀態に於ては上式を三角集成剛結構に對して近似解式として適用し,先づ變位を解き次に變角を解く分割計算を認めてもよく,これ從來三角集成鉸結構の副應力算定の正解法として適用されおるものに相當し,特種の重構造ならざる限り,その關する誤差は僅少なる筈である。1929 年 World Engineering Congress (Tokyo) に提出されたる論文,工學博士三瀨幸三郎氏: General Solution of Secondary Stresses に於ける適用公式はその內容に於て上式と同一のものに外ならないのである。