

論 說 報 告

第十九卷第十號 昭和八年十月

THEORIE DER ROSTE UND IHRE ANWENDUNGEN.

DRITTER TEIL.

DER EINSTOCKIGE RAHMEN MIT
EINGESPANNTEN STIELEN BEI DER
BELASTUNG IN DER QUERRICHTUNG.

(FORTSETZUNG).

Von Dr. Ing. Takeo Fukuda, Mitglied.

Inhaltsverzeichnis.

IX. Abschnitt. Der einstielige Rahmen.

1. Der einstielige Rahmen mit eingespanntem Stiele und einfach gestütztem Riegel 247
2. Der einstielige Rahmen mit eingespannten Riegel und Stiele..... 251

X. Abschnitt. Der zweistielige Rahmen.

1. Der zweistielige Rahmen mit Kragarmen. 257
2. Der zweistielige Rahmen ohne Kragarmen 261
3. Bei der symmetrischen Belastung 261
4. Bei der Belastung durch Einzellasten..... 262
5. Bei der Belastung durch verteilte Last. 264
6. Zahlenbeispiele 265

IX. ABSCHNITT.

DER EINSTIELIGE RAHMEN.

1. Der einstielige Rahmen mit eingespanntem Stiele und einfach gestütztem Riegel.

1) Die allgemeine Lösung.

Es soll der in **Abb. 20** dargestellte, einstielige Rahmen (zweifeldrige Träger mit fest verbundener Mittelstütze) für beliebige Querbelastrung untersucht werden. Wir denken uns an, dass der Rahmen eine symmetrische Konstruktion ist und wir bezeichnen nach allgemeinen Regeln:

$$\alpha = \frac{\psi}{\mu} = \frac{hEJ}{lGH}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{J}{I} \left(\frac{h}{l}\right)^3$$

Da der Riegel an beiden Enden einfach gestützt ist, so müssen die Torsionsmomente im Riegel und das Biegemoment im oberen Anschlusspunkte des Stieles verschwinden. Wir haben also in diesem Falle mit acht Unbekannten, $M_1, M_1', L_1, Y, R_0, R_1,$

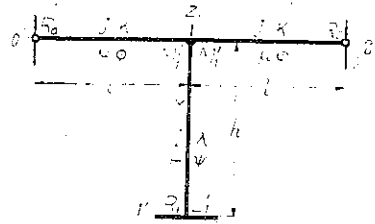


Abb. 20.

R_2 und z_1 , zu tun, wie es in **Abb. 20** dargestellt ist.

Aus Gl. (I,23a) und (I,23b) erhalten wir :

$$M_1^i = (R_0 - P_0)l, \quad M_1^r = (R_2 - P_2)l \quad \dots \dots \dots (1)$$

Aus den im VII. Abschnitten aufgestellten Gleichungen erhalten wir :

$$\text{aus Gl. (VII, 2):} \quad M_1^i + M_1^r - \frac{l}{h} L_1' = P_1 l, \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{„ Gl. (VII, 4):} \quad L_1' = -(R_1 - P_1')h, \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{„ Gl. (VII, 5):} \quad Y = M_1^i - M_1^r, \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{„ Gl. (VII, 7):} \quad \psi Y = -\frac{z_1}{l} + \frac{\mu}{3} M_1^i + \frac{\mu}{l} S_1^i, \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{„ Gl. (VII, 7a):} \quad \psi Y = +\frac{z_1}{l} - \frac{\mu}{3} M_1^r - \frac{\mu}{l} S_1^r, \quad \dots \dots \dots (5a)$$

$$\text{„ Gl. (VII, 3):} \quad 2\lambda L_1' + \frac{6}{h} z_1 + \frac{6\lambda}{h} T_1' = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

Hiermit stehen uns zur Ermittlung der acht Unbekannten ebensoviele Gleichungen (1) bis (6) zur Verfügung. Aus Gl. (5) und (5a) erhalten wir folgende zwei Gleichungen :

$$2\alpha Y = +\frac{1}{3} (M_1^i - M_1^r) + \frac{1}{l} (S_1^i - S_1^r), \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$\frac{2}{l} z_1 = +\frac{\mu}{3} (M_1^i + M_1^r) + \frac{\mu}{l} (S_1^i + S_1^r). \quad \dots \dots \dots (b)$$

Setzen wie die Werte von Y aus Gl. (4) in die Gl. (a) ein, so ergibt sich :

$$(1 + 6\alpha) (M_1^i - M_1^r) = -\frac{6}{l} (S_1^i - S_1^r). \quad \dots \dots \dots (c)$$

Eliminieren wir z_1 aus Gl. (6) und (b), so erhalten wir :

$$\frac{1}{l} (M_1^i + M_1^r) + \frac{2\beta}{h} L_1' = -\frac{3}{l^2} (S_1^i + S_1^r) + \frac{6}{h^2} \beta T_1'. \quad \dots \dots \dots (d)$$

Lösen wir nun die drei Gleichungen (2), (c) und (d) nach M_1^i , M_1^r und L_1' auf, so erhalten wir :

$$\left. \begin{matrix} M_1^i \\ M_1^r \end{matrix} \right\} = +\frac{\beta}{1+2\beta} \left(P_1 - \frac{3}{h^2} T_1' \right) l - \frac{3}{l} \left[\frac{S_1^i + S_1^r}{2(1+2\beta)} \pm \frac{S_1^i - S_1^r}{1+6\alpha} \right], \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$L_1' = -\frac{h}{1+2\beta} \left[P_1 + \frac{3}{l^2} (S_1^i + S_1^r) + \frac{6\beta}{h^2} T_1' \right]. \quad \dots \dots \dots (8)$$

Für das Torsionsmoment Y ergibt sich aus Gl. (4) und (c) :

$$Y = +\frac{6}{(1+6\alpha)l} (S_1^i - S_1^r). \quad \dots \dots \dots (9)$$

und die Auflagerkräfte ergeben sich aus Gl. (1) und (3) zu :

$$R_0 = P_0 + \frac{M_1^i}{l}, \quad R_1 = P_1' - \frac{L_1'}{h}, \quad R_2 = P_2 + \frac{M_1^r}{l}. \quad \dots \dots \dots (10)$$

Die Verschiebung des Knotenpunktes kann durch

$$z_1 = -\lambda \left(\frac{h}{3} L_1' + T_1' \right) \dots \dots \dots (11)$$

bestimmt werden.

2) Untersuchung verschiedener Belastungsfälle mit Zahlenbeispiele.

Im folgenden werden die Formeln für verschiedene Belastungsfälle abgeleitet und ist die Berechnung durchzuführen mit der Annahme, dass die Verhältnisse der Trägheitsmomente, der Drillungswiderstände bzw. der Abmessungen des Rahmens

$$Jh = Il, \quad EI = GH, \quad h = 0.8l$$

seien. Wir erhalten dann

$$\alpha = \frac{\psi}{\mu} = \frac{hEJ}{lGH} = \frac{EI}{GH} = 1, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = \frac{Jh}{Il} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = \left(\frac{h}{l} \right)^2 = 0.64.$$

a) Eine Einzellast P im Knoten 1.

Wirkt eine Einzellast P im Knoten 1 wie in **Abb. 21** dargestellt ist, so ist

$$P_1 = P, \quad P_0 = P_1' = P_2 = S_1' = S_1'' = T_1' = 0;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} M_1' = M_1'' &= + \frac{\beta \cdot Pl}{1+2\beta}, \quad L_1' = - \frac{Ph}{1+2\beta}, \quad Y = 0, \\ R_0 = R_2 &= - \frac{\beta \cdot P}{1+2\beta}, \quad R_1 = + \frac{P}{1+2\beta}, \quad z_1 = + \frac{\lambda \cdot Ph^2}{3(1+2\beta)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Mit $\alpha=1$, $\beta=0.64$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} M_1' = M_1'' &= +0.2807Pl, \quad L_1' = -0.4386Ph = -0.3509Pl, \quad Y = 0, \\ R_0 = R_2 &= +0.2807P, \quad R_1 = +0.4386P, \quad z_1 = +0.1462Ph/EI. \end{aligned}$$

b) Eine Einzellast P im Riegel.

Wirkt eine Einzellast P auf die linke Riegelhälfte im Abstände ξl vom linken Ende, wie in **Abb. 22**, so ist.

$$P_0 = (1-\xi)P, \quad P_1 = \xi P, \quad S_1' = \frac{\xi}{6} (1-\xi^2) Pl^2, \quad S_1'' = T_1' = 0;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= \frac{\xi \cdot Pl}{1+2\beta} \left[\beta - \frac{1}{4} (1-\xi^2) \frac{3+6\alpha+4\beta}{1+6\alpha} \right], \\ L_1' &= - \frac{\xi \cdot Ph}{1+2\beta} \left[1 + \frac{1}{2} (1-\xi^2) \right], \\ M_1'' &= \frac{\xi \cdot Pl}{1+2\beta} \left[\beta + \frac{1}{4} (1-\xi^2) \frac{1-6\alpha+4\beta}{1+6\alpha} \right], \quad Y = + \frac{\xi(1-\xi^2)}{1+6\alpha} Pl, \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \left[1 - \xi + \frac{\xi\beta}{1+2\beta} - \frac{\xi}{4} (1-\xi^2) \frac{3+6\alpha+4\beta}{(1+6\alpha)(1+2\beta)} \right] P, \quad R_2 = + \frac{M_1'}{l} \\ R_1 &= \frac{\xi \cdot P}{1+2\beta} \left[1 + \frac{1}{2} (1-\xi^2) \right], \quad z_1 = \frac{\lambda \xi \cdot Ph^2}{3(1+2\beta)} \left[1 + (1-\xi^2) \right]. \end{aligned} \right\}$$

Mit $\xi=0.5$, $\alpha=1$ und $\beta=0.64$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_1^i &= +0.0725 Pl, \quad M_1^r = +0.1260 Pl, \quad M_P = +0.2863 Pl, \quad Y = +0.0535 Pl, \\ L_1' &= -0.3015 Ph = -0.2412 Pl, \quad R_0 = +0.5725 P, \quad R_2 = +0.1260 P, \\ R_1 &= +0.3015 P, \quad z_1 = +0.1005 Ph^3/EI. \end{aligned}$$

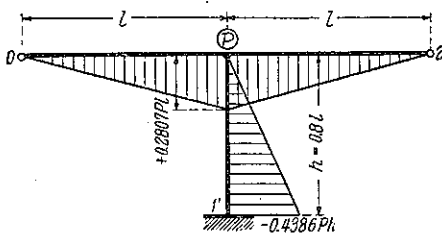


Abb. 21.

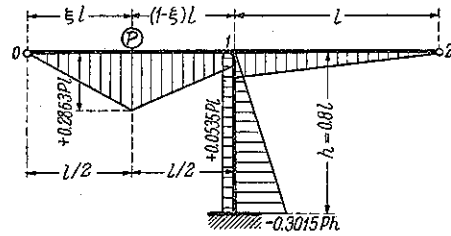


Abb. 22.

c) Eine Einzellast P im Stiele.

Wirkt eine Einzellast P auf den Stiel im Abstände ηh vom Einspannungspunkte des Stieles, wie in **Abb. 23**, so ist:

$$P_1 = \eta P, \quad P_1' = (1-\eta)P, \quad T_1' = \frac{\eta}{6} (1-\eta)(2-\eta) Ph^2, \quad S = 0;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} M_1^i &= M_1^r = \frac{\eta\beta \cdot Pl}{1+2\beta} \left[1 - \frac{1}{2} (1-\eta)(2-\eta) \right], \\ L_1' &= - \frac{\eta \cdot Ph}{1+2\beta} \left[1 + \beta(1-\eta)(2-\eta) \right], \\ R_0 &= R_2 = \frac{\eta\beta \cdot P}{1+2\beta} \left[1 - \frac{1}{2} (1-\eta)(2-\eta) \right], \\ R_1 &= \left[1 - \eta + \frac{\eta}{1+2\beta} \left\{ 1 + \beta(1-\eta)(2-\eta) \right\} \right] P, \\ z_1 &= \frac{\lambda\eta}{6(1+2\beta)} \left[2 - (1-\eta)(2-\eta) \right] Ph^2, \quad Y = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

Mit $\eta=0.5$, $\alpha=1$ und $\beta=0.64$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_1^i &= M_1^r = +0.0877 Pl, \quad L_1' = -0.3246 Ph = -0.2596 Pl, \quad Y = 0, \\ R_0 &= R_2 = +0.0377 P, \quad R_1 = +0.8246 P, \quad L_P = +0.0877 Ph = +0.0702 Pl, \\ z_1 &= +0.0457 Ph^3/EI. \end{aligned}$$

d) Gleichmässig verteilte Last.

Wirkt eine gleichmässig verteilte Last q über die linke Riegelhälfte, so ist:

$$P_0 = P_1 = \frac{ql}{2}, \quad S_1^i = \frac{ql^3}{24}, \quad S_1^r = T_1' = 0;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} M_1^i &= \frac{ql^2}{2(1+2\beta)} \left[\beta - \frac{3+6\alpha+4\beta}{8(1+6\alpha)} \right], & M_1^r &= \frac{ql^2}{2(1+2\beta)} \left[\beta + \frac{1-6\alpha+4\beta}{8(1+6\alpha)} \right], \\ R_0 &= \frac{ql}{2(1+2\beta)} \left[1 + 3\beta - \frac{3+6\alpha+4\beta}{8(1+6\alpha)} \right], & R_2 &= \frac{ql}{2(1+2\beta)} \left[\beta + \frac{1-6\alpha+4\beta}{8(1+6\alpha)} \right], \\ L_1' &= -\frac{5qlh}{8(1+2\beta)}, & Y &= +\frac{ql^2}{4(1+6\alpha)}, & R_1 &= \frac{5ql}{8(1+2\beta)}, & z_1 &= \frac{5\lambda \cdot qlh^2}{24(1+2\beta)}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Wirkt eine gleichmässig verteilte Last q' über ganzen Stiel, so ist:

$$P_1 = P_1' = \frac{q'h}{2}, \quad T_1' = \frac{q'h^3}{24}, \quad S_1^i = S_1^r = 0;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} M_1^i = M_1^r &= \frac{3\beta \cdot q'lh}{8(1+2\beta)}, & L_1' &= -\frac{(2+\beta)q'h^2}{4(1+2\beta)}, & Y &= 0, \\ R_0 = R_2 &= \frac{3\beta \cdot q'h}{8(1+2\beta)}, & R_1 &= \frac{(4+5\beta)q'h}{4(1+2\beta)}, & z_1 &= \frac{\lambda \cdot q'h^3}{8(1+2\beta)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

Erstreckt sich die gleichmässig verteilte Last q über ganzen Rahmen, der in **Abb. 24** dargestellt ist, so ist: $P_0 = P_2 = 0.5ql$, $P_1 = 1.4ql = 1.75qh$, $P_1' = 0.5qh$, $S_1^i = S_1^r = ql^3/24$ und $T_1' = qh^3/24$; damit ergibt sich mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0.64$:

$$\begin{aligned} M_1^i = M_1^r &= +0.3101 ql^2, & L_1' &= -0.9748 qh^2 = -0.6239 ql^2, & Y &= 0, \\ R_0 = R_2 &= +0.8101 ql, & R_1 &= +1.4748 qh = +1.1798 ql, & z_1 &= 0.2833 qh^3/EI. \end{aligned}$$

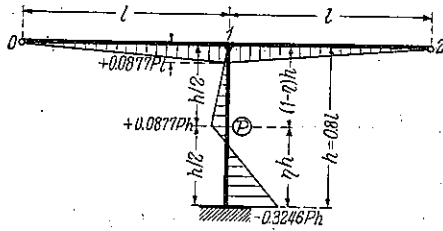


Abb. 23.

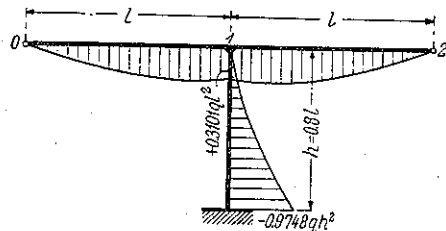


Abb. 24.

2. Der einstiellige Rahmen mit eingespannten Riegel und Stiele.

1) Die allgemeine Lösung.

Wir denken uns jetzt an, dass der Riegel des in vorangehenden Paragraphen 1 behandelten, einstielligen Rahmens an beiden Enden fest eingespannt sei, wie es in **Abb. 25** dargestellt ist.

Wir haben in diesem Falle mit dreizehn Unbekannten; $M_0^r, M_1^r, M_1^l, M_2^l, L_1, L_1', X_1, X_2, Y, R_0, R_1, R_2$ und z_1 zu tun, dafür wir folgende Gleichungen erhalten.

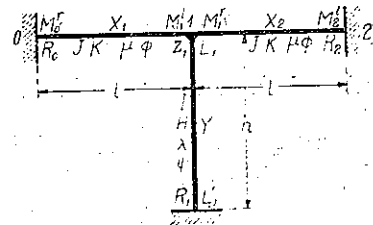


Abb. 25.

Für den eingespannten Endknoten 0:

aus Gl. (I, 24): $\mu(2M_0^r + M_1^r) + \frac{6}{l} z_1 + \frac{6\mu}{l} S_0^r = 0, \dots (17)$

„ Gl. (I,25): $M_1^r - M_0^r = (R_0 - P_0) l, \dots (18)$

„ Gl. (I,26): $\phi X_1 = -\frac{1}{h} z_1 + \frac{\lambda}{6} (2L_1 + L_1') + \frac{\lambda}{h} T_1; \dots (19)$

für den eingespannten Endknoten 2:

aus Gl. (I,24a): $\mu(M_1^r + 2M_2^l) + \frac{6}{l} z_1 + \frac{6\mu}{l} S_2^l = 0, \dots (17a)$

„ Gl. (I,25a): $M_1^r - M_2^l = (R_2 - P_2) l, \dots (18a)$

aus Gl. (I,27): $\phi X_2 = +\frac{1}{h} z_1 - \frac{\lambda}{6} (2L_1 + L_1') - \frac{\lambda}{h} T_1'; \dots (19a)$

für den Mittelknoten 1:

aus Gl. (VII, 2): $M_0^r - M_1^r - M_1^l + M_2^l - \frac{l}{h} (L_1 - L_1') = -P_1 l, \dots (20)$

„ Gl. (VII, 4): $L_1 - L_1' = (R_1 - P_1) l, \dots (21)$

„ Gl. (VII, 5): $Y = M_1^r - M_1^l, \dots (22)$

„ Gl. (VII, 6): $X_2 - X_1 = L_1, \dots (23)$

„ Gl. (VII, 7): $\psi Y = -\frac{1}{l} z_1 + \frac{\mu}{6} (M_0^r + 2M_1^r) + \frac{\mu}{l} S_1^r, \dots (24)$

„ Gl. (VII, 7a): $\psi Y = +\frac{1}{l} z_1 - \frac{\mu}{6} (M_2^l + 2M_1^l) - \frac{\mu}{l} S_2^l, \dots (24a)$

„ Gl. (VII, 3): $\lambda(2L_1' + L_1) + \frac{6}{h} z_1 + \frac{6\lambda}{h} T_1' = 0 \dots (25)$

Für die Folge bezeichnen wir wie früher

$$\alpha = \frac{\psi}{\mu} = \frac{hEJ}{lGH}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{J}{l} \left(\frac{h}{l}\right)^3, \quad \gamma = \frac{\phi}{\mu} \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{EJ}{GK} \left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

$$\varepsilon = \frac{\phi}{\lambda} = \frac{lEI}{hGK}$$

Mit Beachtung von Gl. (22) erhalten wir aus Gl. (24) und (24a):

$$M_0^r + 2(1 + 6\alpha)(M_1^r - M_1^l) - M_2^l = -\frac{6}{l} (S_1^r - S_2^l) \dots (26)$$

und $\frac{\mu}{6} [M_0^r + 2(M_1^r + M_1^l) + M_2^l] - \frac{2}{l} z_1 + \frac{\mu}{l} (S_1^r + S_2^l) = 0 \dots (a)$

Aus Gl. (17) und (17a) ergeben sich:

$$2M_0^r + M_1^i - M_1^r - 2M_2^i = -\frac{6}{l} (S_0^r - S_2^i) \dots \dots \dots (27)$$

und $\frac{\mu}{6} [2M_0^r + M_1^i + M_1^r + 2M_2^i] + \frac{2}{l} z_1 + \frac{\mu}{l} (S_0^r + S_2^i) = 0 \dots \dots \dots (b)$

Aus (a)+(b) ergibt sich:

$$M_0^r + M_1^i + M_1^r + M_2^i = -\frac{2}{l} (S_0^r + S_1^i + S_1^r + S_2^i), \dots \dots \dots (28)$$

und (b)-(a) liefert:

$$\frac{\mu}{6} (M_0^r - M_1^i - M_1^r + M_2^i) + \frac{4}{l} z_1 + \frac{\mu}{l} (S_0^r - S_1^i - S_1^r + S_2^i) = 0 \dots \dots \dots (c)$$

Aus Gl. (19) und (19a) ergibt sich mit Beachtung von Gl. (23):

$$\phi L_1 + \frac{\lambda}{3} (2L_1 + L_1') - \frac{2}{h} z_1 + \frac{2\lambda}{h} T_1 = 0 \dots \dots \dots (d)$$

Lösen wir nun die Gl. (25) und (d) nach L_1' und z_1 auf, so erhalten wir:

$$L_1' = -(1+\varepsilon)L_1 - \frac{2}{h} (T_1 + T_1') \dots \dots \dots (e)$$

und $z_1 = +\frac{h}{6} (\lambda + 2\phi)L_1 + \frac{\lambda}{3} (2T_1 - T_1') \dots \dots \dots (f)$

Setzen wir hierauf die Werte von L_1' bzw. von z_1 aus Gl. (e) bzw. (f) in die Gl. (20) und (c) ein, so erhalten wir:

$$\frac{1}{l} (M_0^r - M_1^i - M_1^r + M_2^i) - \frac{1}{h} (2+\varepsilon)L_1 = -P_1 + \frac{2}{h^2} (T_1 + T_1'), \dots \dots (g)$$

$$\frac{1}{l} (M_0^r - M_1^i - M_1^r + M_2^i) + \frac{4}{h} (\beta + 2\gamma)L_1 = -\frac{6}{l^2} (S_0^r - S_1^i - S_1^r + S_2^i) - \frac{8\beta}{h^2} (2T_1 - T_1'). \dots \dots (h)$$

Durch Eliminieren von L_1 aus obigen zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{N}{l} (M_0^r - M_1^i - M_1^r + M_2^i) = -4(\beta + 2\gamma)P_1 - \frac{6}{l^2} (2+\varepsilon) (S_0^r - S_1^i - S_1^r + S_2^i) - \frac{24}{h^2} [\beta T_1 - (\beta + \gamma) T_1'], \dots \dots (29)$$

wobei $N = 2 + \varepsilon + 4(\beta + 2\gamma) \dots \dots \dots (30)$

gesetzt ist.

Lösen wir nun die vier Gleichungen (26), (27), (28) und (29) nach M auf, so erhalten wir für die Biegemomente im Riegel:

$$M_0^r = -A - C, M_1^i = B + D, M_1^r = -A + C, M_2^i = B - D, \dots \dots \dots (31)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \frac{1}{N} (\beta + 2\gamma) P_1 l + \frac{6l}{Nh^2} \left[\beta T_1 - (\beta + \gamma) T_1' \right] \\
 &\quad + \frac{1}{Nl} \left[2(2 + \varepsilon + \beta + 2\gamma) (S_0^r + S_2^i) - (2 + \varepsilon - 2\beta - 4\gamma) (S_1^i + S_1^r) \right], \\
 B &= \frac{1}{N} (\beta + 2\gamma) P_1 l + \frac{6l}{Nh^2} \left[\beta T_1 - (\beta + \gamma) T_1' \right] \\
 &\quad - \frac{1}{Nl} \left[2(2 + \varepsilon + \beta + 2\gamma) (S_1^i + S_1^r) - (2 + \varepsilon - 2\beta - 4\gamma) (S_0^r + S_2^i) \right], \\
 C &= \frac{1}{(1 + 8\alpha)l} \left[2(1 + 6\alpha) (S_0^r - S_1^i) - (S_2^i - S_1^r) \right], \\
 D &= \frac{1}{(1 + 8\alpha)l} \left[S_0^r - S_2^i - 2 (S_1^i - S_1^r) \right].
 \end{aligned} \right\} (32)$$

Das Biegemoment an dem Anschlusspunkte des Stieles L_1 wird aus Gl. (g) und (h) zu:

$$L_1 = \frac{h}{N} \left[P_1 - \frac{6}{l^2} (S_0^r - S_1^i - S_1^r + S_2^i) - \frac{2}{h^2} \left\{ (1 + 8\beta) T_1 + (1 - 4\beta) T_1' \right\} \right], \dots\dots (33)$$

und für das Einspannungsmoment L_1' steht die Gl. (e), d.i.

$$L_1' = -(1 + \varepsilon)L_1 - \frac{2}{h} (T_1 + T_1') \dots\dots\dots (34)$$

zur Verfügung.

Sind M und L gefunden, so ergeben sich für die Auflagerkräfte

$$\left. \begin{aligned}
 \text{aus Gl. (18):} \quad R_0 &= P_0 + \frac{1}{l} (M_1^i - M_0^r) = P_0 + \frac{1}{l} (A + B + C + D), \\
 \text{„ Gl. (18a):} \quad R_2 &= P_2 + \frac{1}{l} (M_1^r - M_2^i) = P_2 + \frac{1}{l} (A + B - C - D), \\
 \text{„ Gl. (21):} \quad R_1 &= P_1 + \frac{1}{h} (L_1 - L_1') = P_1 + P_1' - \frac{2}{l} (A + B).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

Da aus den Gl. (19) und (19a) sich $X_1 + X_2 = 0$ ergibt, so ist nach Gl. (23):

$$X_1 = -X_2 = -L_1/2. \dots\dots\dots (36)$$

$$\text{Aus Gl. (22):} \quad Y = M_1^r - M_1^i = -2D \dots\dots\dots (37)$$

Für die Verschiebung des Mittelknotens gilt nach Gl. (25):

$$z_1 = -\frac{\lambda h}{6} (2L_1' + L_1) - \lambda T_1', \dots\dots\dots (38)$$

oder nach Gl. (f):

$$z_1 = +\frac{h}{6} (\lambda + 2\phi) L_1 + \frac{\lambda}{3} (2T_1 - T_1') \dots\dots\dots (38a)$$

2) Untersuchung verschiedener Elastungsfälle mit Zahlenbeispiele.

Im folgenden werden die Formeln für verschiedene Belastungsfälle abgeleitet

und ist die Berechnung durchzuführen mit der Annahme, dass die Verhältnisse der Trägheitsmomente, der Drillungswiderstände bzw. der Abmessungen des Rahmens

$$Jh = Il, \quad EI = GH, \quad EJ = GK, \quad h = 0.8l$$

seien. Wir erhalten dann:

$$\alpha = \varepsilon = 1, \quad \beta = \gamma = 0.64, \quad N = 10.68.$$

a) Eine Einzellast P im Mittelknoten (**Abb. 26**).

Es ist in diesem Falle: $P_1 = P$, $A = B = (\beta + 2\gamma)Pl/N$, $C = D = 0$; damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} M_0^* = M_2^* = -M_1^* = -M_1^* &= -\frac{1}{N}(\beta + 2\gamma)Pl, \quad Y = 0, \\ L_1 &= +\frac{Ph}{N}, \quad L_1' = -\frac{1+\varepsilon}{N}Ph, \quad X_1 = -X_2 = -\frac{Ph}{2N}, \\ R_0 = R_2 &= +\frac{2}{N}(\beta + 2\gamma)P, \quad R_1 = +\frac{2+\varepsilon}{N}P, \quad z_1 = +\frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{6N}Pl^2. \end{aligned} \right\} (39)$$

Mit $\alpha = \varepsilon = 1$, $\beta = \gamma = 0.64$, $h = 0.8l$ und $N = 10.68$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_0^* = M_2^* = -M_1^* = -M_1^* &= -0.1798Pl, \quad L_1 = +0.0936Ph = +0.0749Pl, \\ X_1 = -X_2 &= -0.0468Ph = -0.0375Pl, \quad L_1' = -0.1873Ph = -0.1498Pl, \\ R_0 = R_2 &= +0.3596P, \quad R_1 = +0.2809P, \quad Y = 0, \\ z_1 &= +0.0468Ph^2/EI. \end{aligned}$$

b) Eine Einzellast P im Riegel.

Wirkt eine Einzellast P auf die linke Riegelhälfte im Abstände ξl vom linken Ende, wie in **Abb. 27**, so ist:

$$P_0 = (1 - \xi)P, \quad P_1 = \xi P, \quad S_1^* = \frac{\xi}{6}(1 - \xi^2)Pl^2, \quad S_1^* = \frac{\xi}{6}(1 - \xi)(2 - \xi)Pl^2;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\xi}{N} \left[(2 - \xi)(\beta + 2\gamma) + \frac{1}{2}(1 - \xi)^2(2 + \varepsilon) \right] Pl, \\ B &= \frac{\xi^2}{N} \left[(\beta + 2\gamma) - \frac{1}{2}(1 - \xi)(2 + \varepsilon) \right] Pl, \\ C &= \frac{\xi(1 - \xi)}{2(1 + 8\alpha)} \left[1 - \xi + 4\alpha(2 - \xi) \right] Pl, \\ D &= -\frac{\xi^2(1 - \xi)}{2(1 + 8\alpha)} Pl. \end{aligned} \right\} (40)$$

Mit diesen Werten können M , Y und R berechnet werden und aus Gl. (33) ergibt

$$\text{sich} \quad L_1 = \frac{\xi^2}{N}(3 - 2\xi)Ph, \dots \dots \dots (41)$$

mit der sich L_1' , X_1 , X_2 und z_1 berechnet lassen.

Für den Fall $\alpha = \varepsilon = 1$, $\beta = \gamma = 0.64$, $\xi = 0.5$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 M_0^r &= -0.2566 Pl, & M_1^l &= +0.0343 Pl, & M_1^r &= +0.0205 Pl, & M_2^l &= -0.0482 Pl, \\
 M_P &= +0.1389 Pl, & Y &= -0.0140 Pl, & L_1 &= +0.0468 Ph = +0.0375 Pl, \\
 L_1^l &= -0.0936 Ph = -0.0749 Pl, & X_1 &= -X_2 = -0.0234 Ph = -0.0187 Pl, \\
 R_0 &= +0.7909 P, & R_1 &= +0.1404 P, & R_2 &= +0.0687 P, & z_1 &= +0.0234 Ph^3/EI.
 \end{aligned}$$

c) Eine Einzellast P im Stiele.

Wirkt eine Einzellast P auf den Stiel im Abstände ηh vom Einspannungspunkte des Stieles, wie in **Abb. 28**, so ist:

$$P_1 = \eta P, \quad P_1' = (1 - \eta) P, \quad T_1 = \frac{\eta}{9} (1 - \eta^2) Ph^2, \quad T_1' = \frac{\eta}{9} (1 - \eta)(2 - \eta) Ph^2,$$

so dass sich im allgemeinen:

$$\left. \begin{aligned}
 A = B &= + \frac{\eta^2}{N} [3(\beta + \gamma) - \eta(2\beta + \gamma)] Pl, & C = D &= 0; \\
 M_0^r = M_2^l &= -M_1^r = -M_1^l = - \frac{\eta^2}{N} [\beta + 2\gamma + (1 - \eta)(2\beta + \gamma)] Pl, & & \dots (42) \\
 L_1 &= -2 X_1 = +2 X_2 = + \frac{\eta^2}{N} [1 - 4(1 - \eta)\beta] Ph, \\
 L_1^l &= -(1 + \varepsilon) L_1 - \eta(1 - \eta) Ph
 \end{aligned} \right\}$$

ergeben, und die anderen Unbekannten können wir dann leicht berechnen.

Für den Fall $\alpha = \varepsilon = 1, \beta = \gamma = 0.64, \eta = 0.5$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 M_0^r = -M_2^l &= -M_1^r = M_1^l = -0.0674 Pl, & L_1 &= -0.0066 Ph = -0.0052 Pl, \\
 L_1^l &= -0.2369 Ph = -0.1895 Pl, & L_P &= +0.1333 Ph = +0.1126 Pl, \\
 X_1 = -X_2 &= +0.0033 Ph = +0.0026 Pl, & Y &= 0, & R_1 &= +0.7303 P, \\
 R_0 = R_2 &= +0.1348 P, & z_1 &= +0.0176 Ph^3/EI.
 \end{aligned}$$

d) Gleichmässig verteilte Last.

Wirkt eine gleichmässig verteilte Last q über den ganzen Riegel, so ist:

$$P_0 = P_2 = 0.5 ql, \quad P_1 = ql, \quad S_0^r = S_1^l = S_1^r = S_2^l = ql^3/24, \quad C = D = 0;$$

damit erhalten wir im allgemeinen:

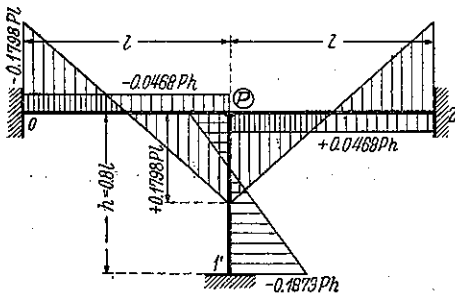


Abb. 26.

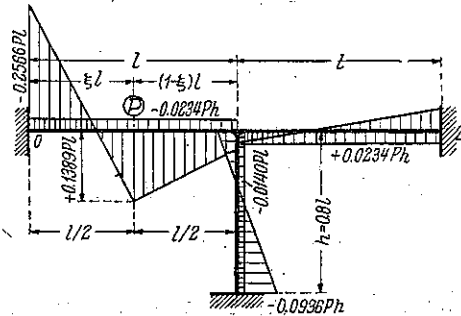


Abb. 27.

$$\left. \begin{aligned}
 M_0^r = M_2^l &= - \left[\frac{\beta + 2\gamma}{N} + \frac{1}{6} \right] ql^2, & M_1^l = M_1^r &= + \left[\frac{\beta + 2\gamma}{N} - \frac{1}{6} \right] ql^2, \\
 L_1 &= + \frac{qlh}{N}, & L_1' &= - \frac{1 + \varepsilon}{N} qlh, & Y &= 0, & R_1 &= + \frac{2 + \varepsilon}{N} qh, \\
 R_0 = R_2 &= + \left[\frac{2(\beta + 2\gamma)}{N} + \frac{1}{2} \right] ql, & z_1 &= + \frac{\lambda(1 + 2\varepsilon)}{6N} qlh^2.
 \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

Wirkt eine gleichmässig verteilte Last q' über ganzen Stiel, so ist:

$$\left. \begin{aligned}
 M_0^r = M_2^l &= -M_1^l = -M_1^r = - \frac{2\beta + 3\gamma}{4N} q'lh, & L_1 &= + \frac{1 - \beta}{3N} q'h^2, \\
 L_1' &= - \left[\frac{(1 + \varepsilon)(1 - \beta)}{3N} - \frac{1}{6} \right] q'h^2, & R_0 = R_2 &= + \frac{2\beta + 3\gamma}{2N} q'h, \\
 R_1 &= + \frac{1}{N} (2 + \varepsilon + 2\beta + 5\gamma) q'h, & z_1 &= + \frac{\lambda(2 + 3\varepsilon)}{24N} q'h^3.
 \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

Erstreckt sich die gleichmässig verteilte Last q über ganzem Rahmen, der in **Abb. 29** dargestellt ist, so erhalten wir mit $\alpha = \varepsilon = 1$, $\beta = \gamma = 0.64$:

$$\begin{aligned}
 M_0^r = M_2^l &= -0.3230 ql^2, & M_1^l = M_1^r &= +0.1564 ql^2, & X_1 = -X_2 &= -L_1/2, \\
 L_1 &= +0.1283 qlh^2 = +0.0821 ql^2, & L_1' &= -0.4232 qh^2 = -0.2709 ql^2, \\
 R_1 &= +1.0513 qh = +0.8412 ql, & R_0 = R_2 &= +0.9794 ql, & Y &= 0, \\
 z_1 &= +0.0780 qh^3/EI.
 \end{aligned}$$

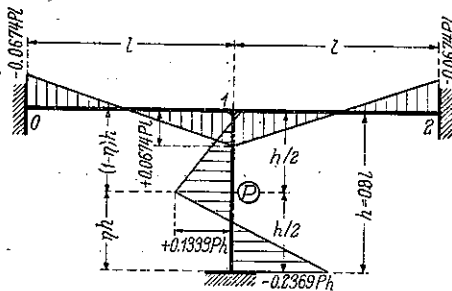


Abb. 28.

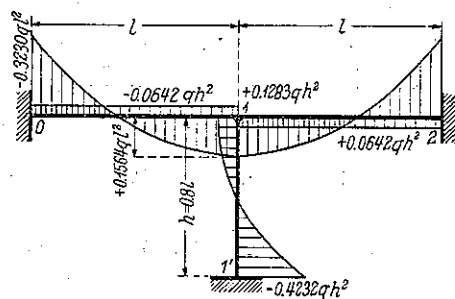


Abb. 29.

X. ABSCHNITT.

DER ZWEISTIELIGE RAHMEN.

1. Der zweistielige Rahmen mit Kragarmen.

Wir werden im folgenden die in **Abb. 30** skizzierten, zweistieligen Rahmen für beliebige Belastung in der Querrichtung untersuchen. Wie es im vorigen VII.

Abschnitte erwähnt ist, können wir uns allgemein mit den Rahmen mit Kragarmen beschäftigen, weil wir bloss die Anschlussmomente der Kragarmen M_1' und M_2' gleich Null zu setzen brauchen, wenn es sich um den Rahmen ohne Kragarmen handelt.

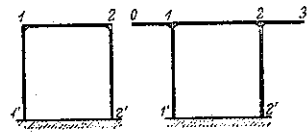


Abb. 30.

Wir wollen zuerst den in **Abb. 31** dargestellten, zweistieligen Rahmen mit beiden Kragarmen untersuchen. Wie es aus der **Abb. 31** ersichtlich ist, haben wir in diesem Falle mit folgenden 17 Unbekannten zu tun:

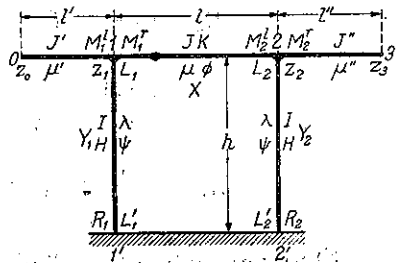


Abb. 31.

- $M_1^r, M_1^l, M_2^r, M_2^l$: die Biegemomente in Riegeln,
- L_1, L_1', L_2, L_2' : die Biegemomente an Köpfen bzw. Füßen der Stiele,
- z_0, z_1, z_2, z_3 : der Verschiebungen der Enden der Krägarne bzw. der Knotenpunkte,
- X, Y_1, Y_2 : die Torsionsmomente im Riegel und in Stielen,
- R_1 und R_2 : die Auflagerkräfte.

Vorerst erhalten wir aus Gl. (VII, 1):

$$M_1^r = -P_0 l', \quad M_2^r = -P_3 l'', \dots \dots \dots (1)$$

dabei die P_0 bzw. P_3 nicht die direkt an die Enden der Kragarmen angreifenden Kräfte sondern die Auflagerdrücke infolge der äusseren Lasten an den Enden der als einfache Balken gedachten Kragarmen bedeuten. Mit Beachtung von obigen Gleichungen erhalten wir für die übrigen 15 Unbekannten folgende Gleichungen:

$$\text{aus Gl. (VII, 2):} \quad + (M_2^r - M_1^r) - \frac{l}{h} (L_1 - L_1') = - (P_0 + P_1) l, \dots \dots \dots (2)$$

$$- (M_2^l - M_1^l) - \frac{l}{h} (L_2 - L_2') = - (P_2 + P_3) l, \dots \dots \dots (2a)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 3):} \quad \lambda (L_1 + 2L_1') + \frac{6}{h} z_1 + \frac{6\lambda}{h} T_1' = 0, \dots \dots \dots (3)$$

$$\lambda (L_2 + 2L_2') + \frac{6}{h} z_2 + \frac{6\lambda}{h} T_2' = 0, \dots \dots \dots (3a)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 4):} \quad L_1 - L_1' = (R_1 - P_1') h, \dots \dots \dots (4)$$

$$L_2 - L_2' = (R_2 - P_2') h, \dots \dots \dots (4a)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 5):} \quad Y_1 = M_1^r - M_1^l = + M_1^r + P_0 l', \dots \dots \dots (5)$$

$$Y_2 = M_2^r - M_2^l = - M_2^r - P_3 l'', \dots \dots \dots (5a)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 6):} \quad X = + L_1, \dots \dots \dots (6)$$

$$X = -L_2, \dots \dots \dots (6a)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 7a): } \psi Y_1 = -\frac{1}{l}(z_2 - z_1) - \frac{\mu}{6}(2M_1^r + M_2^l) - \frac{\mu}{l}S_1^r, \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 7): } \psi Y_2 = -\frac{1}{l}(z_2 - z_1) + \frac{\mu}{6}(2M_2^l + M_1^r) + \frac{\mu}{l}S_2^l, \dots \dots \dots (7a)$$

$$\text{aus Gl. (VII, 8): } \phi X = -\frac{1}{h}(z_2 - z_1) + \frac{\lambda}{6}(2L_2 + L_2' - 2L_1 - L_1') + \frac{\lambda}{h}(T_2 - T_2') \dots (8)$$

Setzen wir nun (5) und (5a) in (7) bzw. (7a) ein, so ergeben sich:

$$z_2 - z_1 = -\frac{1}{6} \left[(2\mu + 6\psi)M_1^r + \mu M_2^l \right] l - \psi P_0 U - \mu S_1^r, \dots \dots \dots (a)$$

$$\text{und } z_2 - z_1 = +\frac{1}{6} \left[(2\mu + 6\psi)M_2^l + \mu M_1^r \right] l + \psi P_3 U'' + \mu S_2^l \dots \dots \dots (b)$$

Aus Gl. (3) und (3a) ergibt sich:

$$z_2 - z_1 = -\frac{\lambda h}{6} \left[(L_2 - L_1) + 2(L_2' - L_1') \right] - \lambda(T_2' - T_1') \dots \dots \dots (c)$$

Setzen wir die Werte von X aus Gl. (6) in (8) ein, so folgt:

$$z_2 - z_1 = +\frac{h}{6} \left[(2\lambda + 3\phi)(L_2 - L_1) + \lambda(L_2' - L_1') \right] + \lambda(T_2 - T_1) \dots \dots \dots (d)$$

Eliminieren wir nun $z_2 - z_1$ aus obigen vier Gleichungen (a) bis (d), so ergeben sich:

$$M_1^r + M_2^l = -\frac{2}{1 + 2\alpha} \left[\alpha(P_0 U' + P_3 U'') + \frac{1}{l}(S_1^r + S_2^l) \right], \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{und } (1 + \varepsilon)(L_2 - L_1) + L_2' - L_1' = \frac{2}{h}(T_1 + T_1' - T_2 - T_2'), \dots \dots \dots (e)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l}(1 + 6\alpha)(M_1^r - M_2^l) + \frac{1}{h} \left[(\beta + 3\gamma)(L_2 - L_1) - \beta(L_2' - L_1') \right] \\ & = -\frac{6\alpha}{l}(P_0 U' - P_3 U'') - \frac{6}{l^2}(S_1^r - S_2^l) + \frac{6\beta}{h^2}(T_1 - T_1' - T_2 + T_2'), \dots (f) \end{aligned}$$

mit der Abkürzung:

$$\alpha = \frac{\psi}{\mu} = \frac{hEJ}{lGH}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = \frac{J}{I} \left(\frac{h}{l} \right)^3,$$

$$\gamma = \frac{\phi}{\mu} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = \frac{EJ}{GK} \left(\frac{h}{l} \right)^2, \quad \varepsilon = \frac{\phi}{\lambda} = \frac{lEI}{hGK}.$$

Aus Gl. (6) und (6a) erhalten wir

$$L_1 + L_2 = 0 \quad \text{oder} \quad L_2 = -L_1 \dots \dots \dots (10)$$

und aus Gl. (2) und (2a) mit Benutzung obiger Gleichung

$$L_2' = -L_1' - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)h \dots \dots \dots (11)$$

Setzen wir jetzt diese Werte von L_2 und L_2' in Gl. (e) und (f) ein, so ergeben

sich:

$$(1 + \varepsilon) L_1 + L_1' = -\frac{h}{2}(P_0 + P_1 + P_2 + P_3) - \frac{1}{h}(T_1 + T_1' - T_2 - T_2'), \dots (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}(1 + 6\alpha)(M_1^r - M_2^s) - \frac{2}{h}[(\beta + 3\gamma)L_1 - \beta L_1'] &= -S(P_0 + P_1 + P_2 + P_3) \\ -\frac{6\alpha}{l}(P_0 l' - P_3 l'') - \frac{6}{l^2}(S_1^r - S_2^s) + \frac{6\beta}{h^2}(T_2 + T_2' - T_1 - T_1') &\dots (13) \end{aligned}$$

Lösen wir hierauf vier Gleichungen (2), (9), (12) und (13) nach vier Unbekannten, M_1^r , M_2^s , L_1 und L_1' auf, so ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_1^r}{M_2^s} &= -\frac{1}{1 + 2\alpha} \left[\alpha(P_0 l' + P_3 l'') + \frac{1}{l}(S_1^r + S_2^s) \right] \\ &\pm \frac{l}{N} \left[\beta(\beta + 2\gamma)(P_0 + P_1 - P_2 - P_3) - \frac{3\alpha}{l}(P_0 l' - P_3 l'') \right. \\ &\left. - \frac{3}{l^2}(2\beta + \gamma)(S_1^r - S_2^s) - \frac{6\beta}{h^2} \{ \beta(T_1 - T_2) - (\beta + \gamma)(T_1' - T_2') \} \right], \\ L_1 &= +\frac{\beta h}{N} \left[\frac{1}{2}(1 + 6\alpha)(P_0 + P_1 - P_2 - P_3) + \frac{6\alpha}{l}(P_0 l' - P_3 l'') \right. \\ &\left. + \frac{6}{l^2}(S_1^r - S_2^s) - \frac{1}{h^2}(1 + 6\alpha + 8\beta)(T_1 - T_2) - \frac{1}{h^2}(1 + 6\alpha - 4\beta)(T_1' - T_2') \right], \\ L_1' &= -\frac{h}{N} \left[\frac{1}{2} \{ (1 + 6\alpha)(3\beta + 2\gamma) + 4\beta(\beta + 2\gamma) \} (P_0 + P_1) \right. \\ &+ \frac{\beta}{2}(1 + 6\alpha + 4\beta + 8\gamma)(P_2 + P_3) + \frac{6\alpha}{l}(\beta + \gamma)(P_0 l' - P_3 l'') \\ &+ \frac{6}{l^2}(\beta + \gamma)(S_1^r - S_2^s) + \frac{\beta}{h^2}(1 + 6\alpha - 4\beta)(T_1 - T_2) \\ &\left. + \frac{\beta}{h^2}(1 + 6\alpha + 8\beta + 12\gamma)(T_1' - T_2') \right], \end{aligned} \right\} (14)$$

wobei

$$N = (1 + 6\alpha)(2\beta + \gamma) + 4\beta(\beta + 2\gamma) \dots (15)$$

Sind M_1^r , M_2^s , L_1 und L_1' gefunden, so gelten den übrigen Unbekannten;

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= -L_1, & X &= +L_1, & L_2' &= -L_1' - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)h, \\ Y_1 &= M_1^r + P_0 l', & Y_2 &= -M_2^s - P_3 l'', \\ R_1 &= P_1' + \frac{1}{h}(L_1 - L_1'), & R_2 &= P_2' + \frac{1}{h}(L_2 - L_2'), \\ z_1 &= -\frac{\lambda h}{6}(L_1 + 2L_1') - \lambda T_1', & z_2 &= -\frac{\lambda h}{6}(L_2 + 2L_2') - \lambda T_2'. \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Zur Ermittlung der Verschiebungen der Enden beider Kragarmen stehen uns die folgenden, aus Gl. (I, 12) sich ergebenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu(2M_1^r + M_1^i) + 2\mu' M_1^i + 6 \left[(z_2 - z_1) / l - (z_1 - z_0) / l' \right] + 6 U_1 &= 0, \\ \mu(2M_2^i + M_2^r) + 2\mu'' M_2^r + 6 \left[(z_3 - z_2) / l'' - (z_2 - z_1) / l \right] + 6 U_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

zur Verfügung.

2. Der zweistielige Rahmen ohne Kragarmen.

Wenn es sich mit dem **Abb. 32** dargestellten, zweistieligen Rahmen ohne Kragarmen handelt, so haben wir bloss

$$M_1^i = M_2^r = P_0 = P_3 = 0$$

zu setzen. Es ist dann nach Gl. (14)

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_1^r \\ M_2^i \end{aligned} \right\} &= -\frac{1}{(1+2\alpha)l} (S_1^r + S_2^i) \pm \frac{l}{N} \left[\beta(\beta+2\gamma)(P_1 - P_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{l^2} (2\beta + \gamma)(S_1^r - S_2^i) - \frac{6\beta}{h^2} \left\{ \beta(T_1 - T_2) - (\beta + \gamma)(T_1' - T_2') \right\} \right], \\ L_1 &= -\frac{\beta h}{N} \left[\frac{1}{2} (1 + 6\alpha)(P_1 - P_2) + \frac{6}{l^2} (S_1^r - S_2^i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h^2} (1 + 6\alpha + 8\beta)(T_1 - T_2) - \frac{1}{h^2} (1 + 6\alpha - 4\beta)(T_1' - T_2') \right], \\ L_1' &= -\frac{h}{N} \left[\frac{1}{2} \left\{ (1 + 6\alpha)(3\beta + 2\gamma) + 4\beta(\beta + 2\gamma) \right\} P_1 + \frac{\beta}{2} (1 + 6\alpha + 4\beta + 8\gamma) P_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{l^2} (\beta + \gamma)(S_1^r - S_2^i) + \frac{\beta}{h^2} (1 + 6\alpha - 4\beta)(T_1 - T_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{h^2} (1 + 6\alpha + 8\beta + 12\gamma)(T_2' - T_1') \right]; \end{aligned} \right\} (18) \end{aligned}$$

und nach Gl. (16):

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= -X = -L_1, & L_2' &= -L_1' - (P_1 + P_2)h, \\ Y_1 &= M_1^r, & Y_2 &= -M_2^i; \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

für R und z gelten dieselben Gleichungen wie (16).

3. Bei der symmetrischen Belastung.

Bei der symmetrischen Belastung ist:

$$P_1 = P_2, \quad P_1' = P_2', \quad S_1^r = S_2^i, \quad T_1 = T_2, \quad T_1' = T_2', \quad P_0 l' = P_3 l''.$$

1) Der Rahmen mit Kragarmen.

$$\left. \begin{aligned} M_1^r = M_2^i &= -\frac{2}{1+2\alpha} \left(\alpha P_0 l' + \frac{1}{l} S_1^r \right), & Y_1 &= -Y_2 = M_1^r + P_0 l', \\ L_1' = L_2' &= -(P_0 + P_1)h, & L_1 &= L_2 = X = 0, \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

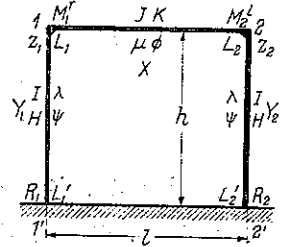


Abb. 32.

$$z_1 = z_2 = \frac{\lambda}{3} (P_0 + P_1) h^2 - \lambda T_1', \quad R_1 = R_2 = P_0 + P_1 + P_1' \Big\}$$

2) Der Rahmen ohne Kragarmen.

$$\left. \begin{aligned} M_1^r = M_2^s = Y_1 = -Y_2 = -\frac{2}{(1+2\alpha)l} S_1^r, \quad L_1 = L_2 = X = 0, \\ L_1' = L_2' = -P_1 h, \quad R_1 = R_2 = P_1 + P_1', \\ z_1 = z_2 = \frac{\lambda}{3} P_1 h^2 - \lambda T_1'. \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

4. Bei der Belastung durch Einzellasten.

1) Eine Einzellast P im Riegel.

Wie es in **Abb. 33** dargestellt ist, greift eine Einzellast P auf den Riegel an, so ist:

$$\begin{aligned} P_1 &= (1-\xi) P, \quad S_1^r = \frac{\xi}{6} (1-\xi) (2-\xi) Pl^2, \\ P_2 &= \xi P, \quad S_1^s = \frac{\xi}{6} (1-\xi) (1+\xi) Pl^2. \end{aligned}$$

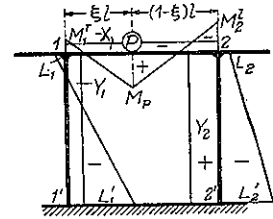


Abb. 33.

Da in diesem Falle P_0 und P_3 verschwinden, so ergeben sich ohne Unterschied für den Rahmen mit oder ohne Kragarmen die folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_1^r = +Y_1 \\ M_2^s = -Y_2 \end{aligned} \right\} = \pm \frac{1}{N} (1-2\xi) \left[\beta(\beta+2\gamma) - \frac{\xi}{2} (1-\xi) (2\beta+\gamma) \right] Pl - \frac{\xi(1-\xi)Pl}{2(1+2\alpha)}, \\ L_1 = -L_2 = X = +\frac{\beta}{N} (1-2\xi) \left[\frac{1}{2} (1+6\alpha) + \xi(1-\xi) \right] Ph, \\ L_1' = -\frac{1}{N} \left[\frac{\beta}{2} (1+6\alpha) + 2\beta(\beta+2\gamma) + (1-\xi) (\beta+\gamma) \left\{ 1+6\alpha + \xi(1-2\xi) \right\} \right] Ph, \\ L_2' = -L_1' - Ph, \quad R_1 = (L_1 - L_1')|h, \quad R_2 = (L_2 - L_2')|h, \\ z_1 = -\frac{\lambda h}{6} (L_1 + 2L_1'), \quad z_2 = -\frac{\lambda h}{6} (L_2 + 2L_2'). \end{aligned} \right\} (22)$$

2) Eine Einzellast P an einem Stiele.

Es wirke z. B. an linken Stiel im Abstände ηh vom Einspannungspunkte eine Einzellast P , wie in **Abb. 34**. Es ist dann:

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta P, \quad T_1 = \frac{\eta}{6} (1-\eta) (1+\eta) Ph^2, \\ P_2 &= (1-\eta) P, \quad T_1' = \frac{\eta}{6} (1-\eta) (2-\eta) Ph^2. \end{aligned}$$

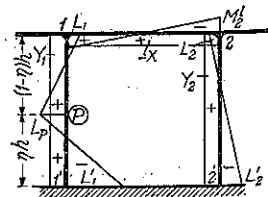


Abb. 34.

Damit erhalten wir ohne Unterschied für den Rahmen mit oder ohne Kragarmen:

$$\begin{aligned}
 M_1^r = -M_2^r = Y_1 = Y_2 &= \frac{\beta\eta}{N} \left[\beta + 2\gamma + 3(1-\eta)\beta - (1-\eta)(2-\eta)(2\beta + \gamma) \right] Pl, \\
 L_1 = -L_2 = X &= \frac{\beta\eta^2}{2N} \left[1 + 6\alpha - 4(1-\eta)\beta \right] Ph, \\
 L_1' = -\frac{\eta}{N} \left[(\beta + \gamma)(1 + 6\alpha + 4\beta) + \beta(2-\eta) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{2}(1 + 6\alpha) - 2\beta + 2(1-\eta)(\beta + \gamma) \right\} \right] Ph, \\
 L_2' = -L_1' - \eta Ph, \quad R_1 &= (1-\eta)P + (L_1 - L_1')/h, \quad R_2 = (L_2 - L_2')/h, \\
 z_1 = -\frac{\lambda h}{6}(L_1 + 2L_1') - \frac{\lambda\eta}{6}(1-\eta)(2-\eta)Ph^2, \quad z_2 &= -\frac{\lambda h}{6}(L_2 + 2L_2').
 \end{aligned} \tag{23}$$

3) Eine Einzellast P in einem Kragarme.

Wirkt eine Einzellast P z.B. an linken Kragarme im Abstände ξl vom Knoten 1, **Abb. 35**, so ist:

$$P_0 = \xi \frac{l}{l'} P, \quad P_1 = \left(1 - \xi \frac{l}{l'}\right) P.$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 M_1^r &= \pm \left[\frac{\beta}{N}(\beta + 2\gamma) - \xi\alpha \left\{ \frac{3}{N}(2\beta + \gamma) \pm \frac{1}{1 + 2\alpha} \right\} \right] Pl, \\
 M_2^r & \\
 L_1 = -L_2 = X &= \frac{\beta}{N} \left[\frac{1}{2}(1 + 6\alpha) + 6\xi\alpha \right] Ph, \\
 L_1' &= -\frac{1}{N} \left[\frac{1}{2}(3\beta + 2\gamma)(1 + 6\alpha) + 2\beta(\beta + 2\gamma) + 6\xi\alpha(\beta + \gamma) \right] Ph, \\
 L_2' &= -L_1' - Ph, \quad Y_1 = M_1^r + \xi Pl, \quad Y_2 = -M_2^r, \\
 R_1 &= (L_1 - L_1')/h, \quad R_2 = (L_2 - L_2')/h, \\
 z_1 &= -\frac{\lambda h}{6}(L_1 + 2L_1'), \quad z_2 = -\frac{\lambda h}{6}(L_2 + 2L_2').
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)
 \end{aligned}$$

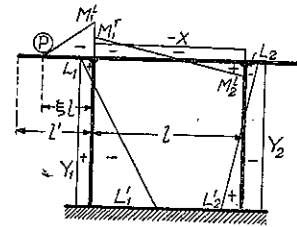


Abb. 35.

4) Eine Einzellast P in einem Knotenpunkt.

Wenn eine Einzellast P z.B. in Knotenpunkt 1 angreift, wie in **Abb. 36**, so ist

$P_1 = P$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 M_1^r = -M_2^r = Y_1 = Y_2 &= \frac{\beta}{N}(\beta + 2\gamma) Pl, \\
 L_1 = -L_2 = X &= \frac{\beta}{2N}(1 + 6\alpha) Ph, \\
 L_1' &= -\frac{1}{N} \left[\frac{1}{2}(3\beta + 2\gamma)(1 + 6\alpha) + 2\beta(\beta + 2\gamma) \right] Ph, \\
 L_2' &= -\frac{\beta}{2N} \left[1 + 6\alpha + 4(\beta + 2\gamma) \right] Ph,
 \end{aligned} \tag{25}$$

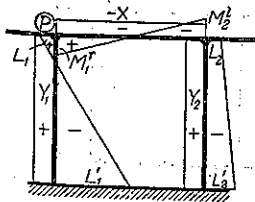


Abb. 36.

$$R_1 = \frac{1}{N} \left[(2\beta + \gamma)(1 + 6\alpha) + 2\beta(\beta + 2\gamma) \right] P,$$

$$R_2 = \frac{2\beta}{N} (\beta + 2\gamma) P,$$

$$z_1 = -\frac{\lambda h}{6} (L_1 + 2L_1'), \quad z_2 = -\frac{\lambda h}{6} (L_2 + 2L_2').$$

5. Bei der Belastung durch verteilte Last.

1) Gleichmässig verteilte Last über einem Stiele.

Erstreck sich eine gleichmässig verteilte Last q über den ganzen linken Stiel, wie in **Abb. 37**, so ist:

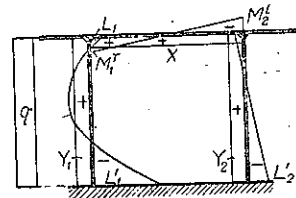


Abb. 37.

$$P_1 = P_1' = \frac{qh}{2}, \quad T_1 = T_1' = \frac{qh^3}{24}.$$

Damit erhalten wir:

$$M_1 = -M_2 = Y_1 = Y_2 = \frac{\beta}{4N} (3\beta + 2\gamma) qlh,$$

$$L_1 = -L_2 = X = \frac{\beta}{6N} (1 + 6\alpha - \beta) qh^2,$$

$$L_1' = -\frac{\beta}{6N} \left[(5\beta + 3\gamma)(1 + 6\alpha) + 7\beta \right] qh^2,$$

$$L_2' = -L_1' - \frac{1}{2} qh^2, \quad R_2 = \frac{1}{h} (L_2 - L_2'),$$

$$R_1 = \frac{1}{h} (L_1 - L_1') + \frac{1}{2} qh,$$

$$z_1 = -\frac{\lambda h}{6} (L_1 + 2L_1') - \frac{\lambda}{24} qh^3,$$

$$z_2 = -\frac{\lambda h}{6} (L_2 + 2L_2').$$

..... (26)

2) Gleichmässig verteilte Last über ganzen Riegel.

Erstreckt sich eine Gleichmässig verteilte Last q über ganzen Riegel, wie in **Abb. 38**, so ist, wenn beide Kragarme gleichlang sind,

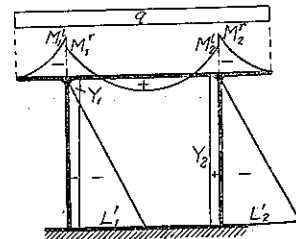


Abb. 38.

$$P_0 = P_3 = \frac{1}{2} ql', \quad P_1 = P_2 = \frac{q(l+l')}{2}, \quad S_1 = S_2 = \frac{ql^3}{24}.$$

Damit erhalten wir:

$$M = M_2 = -\frac{q}{12(1+2\alpha)} (12\alpha l'^2 + l^2), \quad L_1 = L_2 = X = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} L_1' = L_2' &= -\frac{qh}{2}(l+2l'), & Y_1 = -Y_2 &= \frac{q}{12(1+2\alpha)}(6l'^2 - l^2), \\ R_1 = R_2 &= \frac{q}{2}(l+2l'), & z_1 = z_2 &= \frac{\lambda}{6}(l+2l')qh^2. \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

6. Zahlenbeispiele.

1) Zahlenbeispiel I.

Die folgenden Ergebnisse ergeben sich mit der Annahme, dass

$$h=0.8l, \quad Il=Jh, \quad EJ=GK, \quad EI=GH,$$

d. i. $\alpha=\varepsilon=1, \quad \beta=\gamma=0.64.$

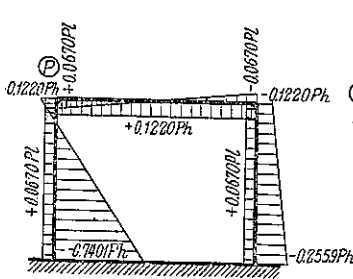


Abb. 39.

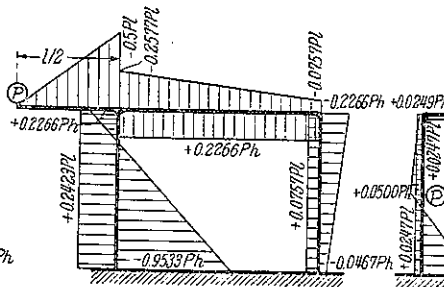


Abb. 40.

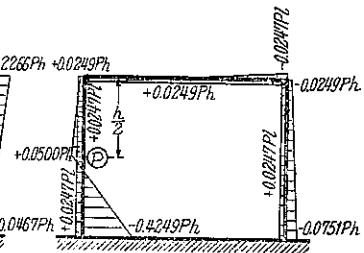


Abb. 41.

a) Eine Einzellast P im Knoten 1 (Abb. 39).

$$M_1' = -M_2' = Y_1 = Y_2 = +0.0670 Pl, \quad L_1 = +0.1220 Ph = +0.0976 Pl,$$

$$L_1' = -0.7401 Ph = -0.5953 Pl, \quad L_2 = -X = -L_1,$$

$$L_2' = -0.2559 Ph = -0.2047 Pl, \quad R_1 = +0.8661 P, \quad R_2 = +0.1339 P.$$

b) Eine Einzellast P am Kragarme im Abstande $l/2$ vom Knoten 1 (Abb. 40).

$$M_1' = -0.5 Pl, \quad M_1' = -0.2577 Pl, \quad M_2' = -Y_2 = -0.0757 Pl,$$

$$L_1 = -L_2 = X = +0.2266 Ph = +0.1813 Pl, \quad Y_1 = +0.2423 Pl,$$

$$L_1' = -0.9533 Ph = -0.7626 Pl, \quad L_2' = -0.0467 Ph = -0.0374 Pl,$$

$$R_1 = +1.1799 P, \quad R_2 = -0.1799 P.$$

c) Eine Einzellast P in der Mitte des linken Stieles (Abb. 41).

$$M_1' = -M_2' = Y_1 = Y_2 = +0.0247 Pl, \quad L_1 = +0.0249 Ph = +0.0199 Pl,$$

$$L_1' = -0.4249 Ph = -0.3399 Pl, \quad L_P = +0.0500 Ph = +0.0400 Pl,$$

$$L_2' = -0.0751 Ph = -0.0601 Pl, \quad L_2 = -X = -L_1,$$

$$R_1 = +0.9498 P, \quad R_2 = +0.0502 P.$$

2) Zahlenbeispiel II. Untersuchung eines Brückenpfeilers für die Bremskräfte.

Es soll ein in Abb. 42 dargestellter Brückenpfeiler aus Eisenbeton in einer zweigleisigen Eisenbahn für die Querbelastung durch Bremskräfte untersucht werden.

Auf diesem Pfeiler liegen vier offene, vollwandige Balkenträger mit der Spannweite von 25 m auf, davon die zwei mit festen Widerlagern und die anderen zwei mit rollenden Lager versehen sind. Der auf der Brücke rollende Zug wird in Schienenhöhe wagerechte, brückenlängs wirkende Kräfte übertragen, welche wir zu 10 v.H. des auf der Brücke befindlichen Zugsgewichtes und als in der Systemachse des Riegels wirkend annehmen wollen.

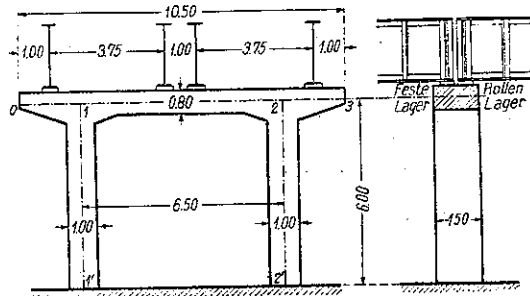


Abb. 42.

Für eine Brücke von 25 m Stützweite beträgt die grösstmögliche Belastung 210 t, wenn der Lastenzug K-18 der japanischen Regierungseisenbahnvorschriften zugrunde gelegt werden. Mit Vernachlässigung der Reibung der Rollenlager wird eine wagerechte Kraft von

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot 210 = 10.5 \text{ t}$$

in je einen Widerlager wirken.

Die Trägheitsmomente und Drillungswiderstände ergeben sich, mit Vernachlässigung der Eiseneinlage, zu:

$$\text{Riegel: } J = \frac{0.8 \cdot 1.5}{12} = 0.225 \text{ m}^4, \quad K = \frac{0.8}{3} (1.5 - 0.63 \cdot 0.8) = 0.170 \text{ m}^4,$$

$$\text{Stiele: } I = \frac{1.0 \cdot 1.5}{12} = 0.281 \text{ m}^4, \quad H = \frac{1.0}{3} (1.5 - 0.63 \cdot 1.0) = 0.290 \text{ m}^4.$$

Wir nehmen nun an, dass für Eisenbeton $E = 1750000 \text{ t/m}^2$, $G = E/2.5$, und erhalten damit

$$\alpha = \frac{E J h}{G H I} = 1.790, \quad \beta = \frac{J}{I} \left(\frac{h}{l} \right)^3 = 0.6283, \quad \gamma = \frac{E J}{G K} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = 2.659.$$

Wir werden nun den Fall untersuchen, wo nur ein Gleis belastet ist. Diesem Falle entspricht die in **Abb. 43** dargestellte Belastung. Wir erhalten also:

$$\xi = 2.75/6.5 = 0.423, \quad \xi' = 1/6.5 = 0.154,$$

$$P_0 = 0.5 \cdot 10.5 = 5.25 \text{ t},$$

$$P_1 = (0.5 + \xi) \cdot 10.5 = 11.06 \text{ t},$$

$$P_2 = \xi \cdot 10.5 = 4.44 \text{ t},$$

$$S_1 = \frac{\xi}{6} (1 - \xi) (2 - \xi) 10.5 \cdot 6.5^2 = 28.46 \text{ tm}^2,$$

$$S_2 = \frac{\xi}{6} (1 - \xi) (1 + \xi) 10.5 \cdot 6.5^2 = 25.68 \text{ tm}^2.$$

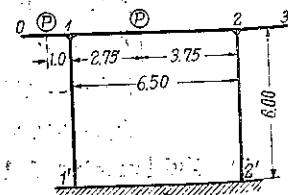


Abb. 43.

Somit ergibt sich aus Gl. (15) $N=60.916$, und aus Gl. (14) und (16):

$$\begin{aligned} M_1^i &= -10.5 \text{ tm}, & M_1^r &= +0.503 \text{ tm}, & M_P &= +12.869 \text{ tm}, & M_2^i &= -9.644 \text{ tm}, \\ L_1 &= -L_2 = +X = +0.541 \text{ tm}, & L_1' &= -90.539 \text{ tm}, & L_2' &= -35.461 \text{ tm}, \\ Y_1 &= +11.003 \text{ tm}, & Y_2 &= +9.644 \text{ tm}, & R_1 &= +15.180 \text{ t}, & R_2 &= +5.820 \text{ t}. \end{aligned}$$

Diese Zahlenwerte sind in **Abb. 45** aufgetragen.

Denken wir uns für die Näherungslösung den Riegel als an beiden Köpfen der Stiele gelagerte Balken an (**Abb. 44**), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_1^i &= M_1^r = -10.5 \text{ tm}, & M_P &= +10.601 \text{ tm}, & L_1' &= -107.039 \text{ tm}, \\ L_2' &= -16.9614 \text{ tm}, & R_1 &= +18.173 \text{ t}, & R_2 &= +2.827 \text{ t}, \\ M_2^i &= L_1 = L_2 = Y_1 = Y_2 = X = 0. \end{aligned}$$

Die punktierten Linien in **Abb. 45** zeigen die obigen Näherungswerte.

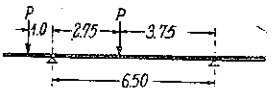


Abb. 44.

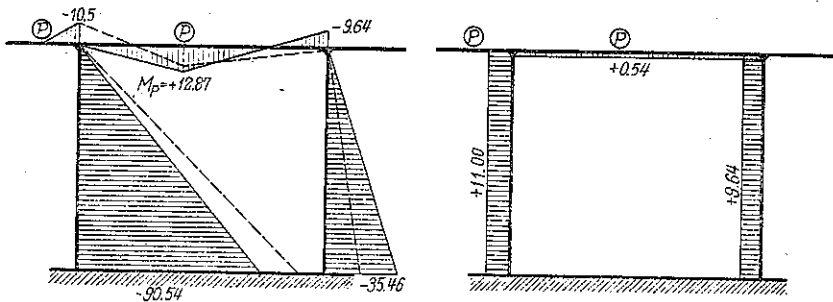


Abb. 45.

Wenn nun zwei in entgegengesetzter Richtung gegenseitig vorbeifahrende Züge gleichzeitig die Bremskräfte auf den Pfeiler ausüben, so entsteht der in **Abb. 43** dargestellte Belastungszustand. Für diesen polarsymmetrischen Belastungszustand erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_1^i &= -M_2^r = -10.5 \text{ tm}, & M_1^r &= -M_2^i = +10.147 \text{ tm}, \\ M_P &= -M_P' = +2.138 \text{ tm}, & R_1 &= -R_2 = +9.361 \text{ t}, \\ L_1' &= -L_2' = -55.079 \text{ tm}, & Y_1 &= +Y_2 = +20.647 \text{ tm}, \\ L_1 &= -L_2 = +X = +1.082 \text{ tm}. \end{aligned}$$

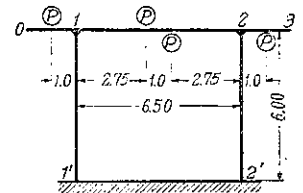


Abb. 46.

Berechnet man den Riegel als an beiden Köpfen der Stiele gelagerte Balken, wie **Abb. 47**, so ergeben sich:

$$\begin{aligned} M_1^i &= M_1^r = M_2^i = -M_2^r = -10.5 \text{ tm}, \\ M_P &= M_P' = +2.827 \text{ tm}, & R_1 &= -R_2 = +15.346 \text{ t}, \\ L_1' &= -L_2' = -92.077 \text{ tm}, & L_1 &= L_2 = X = Y_1 = Y_2 = 0. \end{aligned}$$

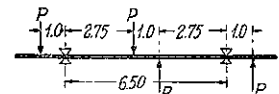


Abb. 47.

Aus obigen Werten sind die **Abb. 48** aufgetragen, wobei zu beachten ist, dass auch

in diesem Falle die im obigen angeführte Näherungslösung stark von den strengen Werten abweicht, wie es mit punktierten Linien dargestellt ist.

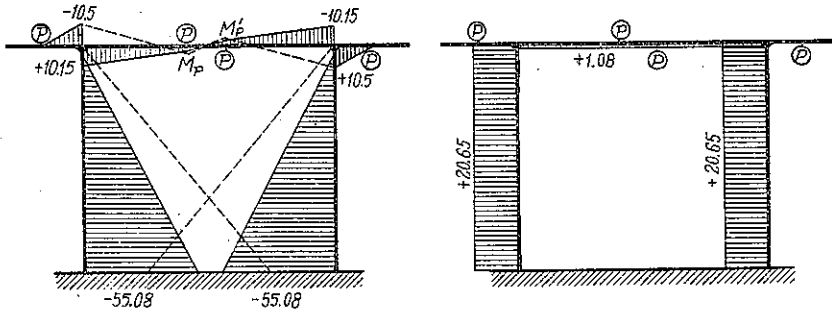


Abb. 48.

Aus obigen Untersuchungen erhellt vor allem, dass die in den Stielen auftretenden Torsionsmomente nicht als unbedeutend betrachtet werden dürfen; und man muss bei den Entwerfen solcher Brückenpfeilern diese Torsionsmomente zweckmässig in Rechnung tragen.

(Schluss).