

# 論 說 報 告

第十九卷第九號 日 和 八 年 九 月

## 長 波 の 變 形 に 就 て

准 員 工 學 士 本 間 仁

Deformation of Long Waves.

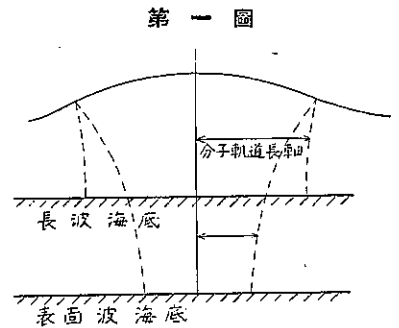
By Masashi Homma, C. E., Assoc. Member.

### 内 容 梗 概

本文は潮波又は津浪の如き長波が陸岸附近にて種々の地形の爲に波形の變化を來す状態を解析的方法によつて解き得る範圍に於て検討せんと試みたものである。

### 緒 論

長波 (long wave) の定義は水分子の鉛直加速度が水平加速度に對して無視し得るが如き重力波である。即ち同一鉛直線上の水分子の水平運動は同一と見做される(第一圖)。従つて長波と表面波の區別は明瞭なるものではないが、自然界に於ける長波の最も普通なるものは潮波 (tidal wave) であり、本論文に於てもその對稱とする所は潮波及び津浪である、之等は何れも典型的の長波であるから上の定義を採用することは相當の妥當性があると思ふ。以下に於ては種々の地形の水路又は水域に進入せる長波の變形を問題とする。



先づ一つの水路又は水域中に於ける直線的に進む長波の一般方程式を導入する。使用する記號の定義は次の如くである。

- $\eta$ : 水面の上昇
- $h$ : 静水面よりの水深
- $b$ : 水路幅
- $u$ :  $x$  方向の流速
- $\xi$ :  $x$  方向の變位
- $X$ : 外力又は  $\sqrt{x}$
- $T$ : 波の週期
- $\sigma$ :  $2\pi/T$

波の運動方程式は渦流 (turbulency) を無視すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \dots \dots \dots (1)$$

重力波であるから

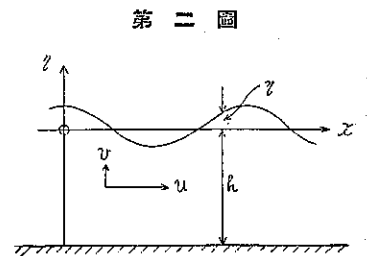
$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = g\rho \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$X$ はこの場合水路床の摩擦抵抗を表はし、之が各斷面に於てその場所の平均流速に比例するものとする。即ち

$X = fu = f \frac{\partial \xi}{\partial t}$ , ( $f = \text{const.}$ ) とすれば (1) 式は  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$  を無視すれば、

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + f \frac{\partial \xi}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

連續方程式は



$$\eta b = -\frac{\partial}{\partial x}(\xi h b) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$h$  及び  $b$  は  $t$  に無關係なるを以て (3) 式を  $t$  にて微分して (2) 式に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( b h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{b}{g} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + f \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

波の變形は常に地形の變化によるものとするのであるから時間的には常に正弦振動 (simple harmonic motion) と考へて差支へない。故に波の時間的減衰を無視すれば  $\eta$  の時間因數 (time factor) は  $e^{i\sigma t}$  である。siehe の如き自由振動に於ては振幅の時間的減衰は必要であるが今は専ら地形による變化のみを考慮した。

時間因數  $e^{i\sigma t}$  を用ふれば (4) 式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( b h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{b}{g} (\sigma^2 - i \sigma f) \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$f = \sigma \tan \theta$  ( $\theta = \text{const.}$ ) と置けば

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( b h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{b}{g} \sigma^2 (1 - i \tan \theta) \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (5')$$

更に  $\frac{\sigma^2}{g} (1 - i \tan \theta) = k^2 = (k_1 - i k_2)^2$  と置けば

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( b h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + k^2 b \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

以下に列擧する解法は何れも (6) 式の成立することを前提とする。摩擦抵抗を無視する場合は  $\theta = 0$ , 従つて  $k^2 = \sigma^2/g$  であり, 摩擦抵抗を考慮する場合は

$$k = \frac{\sigma}{\sqrt{g \cos \theta}} e^{i \frac{\theta}{2}}, \quad k_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{g \cos \theta}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad k_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{g \cos \theta}} \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

長波を進行波, 合成波及びセイシュに分つて各々その變形の状態を調べんとするのであるが, 波形が甚しく變化して長波の性質を失つた場合に對してはその解法は相當の補正を要し, 更に甚しき場合は他に解法を求めめる必要がある。又津浪の波が水深の非常に浅き方に向つて進行する時は碎波の現象を伴ふものと見做されてゐる。従つて碎波を生じたる後の水分子の運動は他の方法によらねばならない。

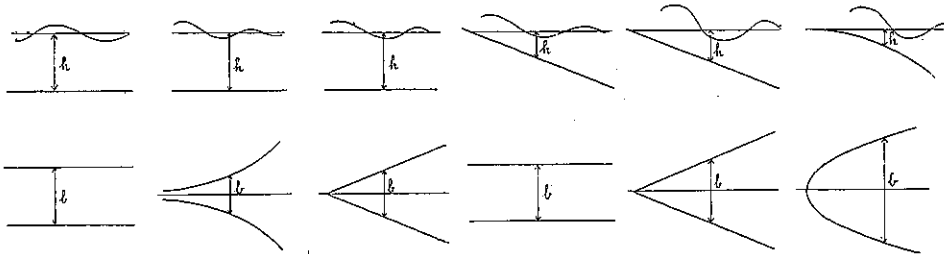
地形の變化は一つとして幾何學的に表はし得るものはないが, 茲に取り扱ふものは勿論比較的簡單な幾何學的圖形を以て表はされる地形のみである。即ち次の如き 6 種の地形に就き夫々基本方程式 (6) の解法を示した。

- i) 幅及び水深の一樣なる水路
- ii) 水深一樣にて側壁が鉛直なる exponential surface をなすもの
- iii) 水深一樣にて幅が直線的に變化する水路
- iv) 幅が一樣にて水深が直線的に變化する水路
- v) 幅及び水深が共に直線的に變化する水路
- vi) 幅及び水深の一方又は兩方が拋物線形に變化する水路

1) Lamb: Hydrodynamics P. 236.

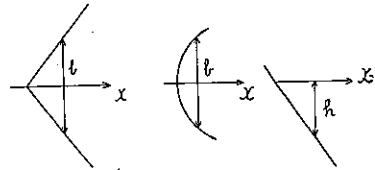
2) 土木學會誌第十七卷第三號, 楠宗道氏 “感潮水路の水流に就て”

第三圖



何れの場合にも側壁は常に鉛直である。又断面變化の極度に急激なるもの(第四圖)は(1)式にて  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$  を無視し得ないから、かゝるものは除くこととする。

第四圖



第一章 進行波の變形

進行波は各地點に於ける振幅は夫々に變形することなく、而も一定の方向に波形の傳播するものである。灣に進行波が進入すれば最前端の波が灣奥に達して反射したる後は合成波となるが、かゝる場合に就ては第二章に於て詳述する。

1. 水路床の摩擦抵抗を無視する場合

(1) 幅、水深共に一樣なる水路

一樣水路に於ては波形は變化しないが比較の爲に茲に擧げる。(6)式より

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{k^2}{h} \eta = 0$$

この解は  $\eta = [A_1 e^{iXx} + B_1 e^{-iXx}] e^{i\sigma t}$ , 但し  $X = \frac{k}{\sqrt{h}}$

然し傳播性の波の一般解は

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波ならば} & \quad \eta = B_1 e^{-i(Xx - \sigma t)} \\ \text{逆行波}(-x \text{ 方向に傳播す)ならば} & \quad \eta = A_1 e^{i(Xx + \sigma t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

境界條件として  $x=l$  にて  $\eta = \eta_0 e^{i\sigma t}$  とすれば

$$B_1 = \eta_0 e^{iXl}, \quad A_1 = \eta_0 e^{-iXl}$$

この場合振幅は常に  $2\eta_0$  である。又かくして得たる  $\eta$  は複素數を以て表はされるが、水面の昇降はその中の實部にて示されることは勿論である。

(2) 水深一樣にて幅が exponential curve をなして變化する場合

水路幅を  $b = b_0 e^{ax}$  にて表はせば(6)式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + a \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{k^2}{h} \eta = 0$$

茲に  $\eta = A e^{(m_1 + im_2)x}$  ( $m_1, m_2$  は實數) と置けば

$$(m_1 + im_2)^2 + a(m_1 + im_2) + \frac{k^2}{h} = 0$$

故に  $\frac{k^2}{h} > \frac{a^2}{4}$  ならば  $m_1 = -\frac{a}{2}$  }  
 $m_2 = \pm \sqrt{\frac{k^2}{h} - \frac{a^2}{4}}$  } .....(9a)

$\frac{k^2}{h} \leq \frac{a^2}{4}$  ならば  $m_1 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{k^2}{h}}$  }  
 $m_2 = 0$  } .....(9b)

即ち  $\frac{k^2}{h} \leq \frac{a^2}{4}$  ならば水面は波状とならず。一般解は  $k^2/h > a^2/4$  に對し。

進行波ならば  $\eta = B_2 e^{-\frac{a}{2}x - i(m_2x - \sigma t)}$  }  
 逆行波ならば  $\eta = A_2 e^{-\frac{a}{2}x + i(m_2x + \sigma t)}$  } .....(10)  
 但し  $m_2 = \sqrt{\frac{k^2}{h} - \frac{a^2}{4}}$  }

水路の中心線に沿ふ振幅變化の割合は  $-\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}x}$  である。

(1) と同じ境界条件を用ふれば

$$B_2 = \eta_0 e^{\left(\frac{a}{2} + im_2\right)l} \quad A_2 = \eta_0 e^{\left(\frac{a}{2} - im_2\right)l}$$

振幅は進行波、逆行波の何れに於ても  $2\eta_0 e^{\frac{a}{2}(l-x)}$  である。故に  $x_1$  及び  $x_2$  に於ける水路幅を夫々  $b_1, b_2$  とし振幅を夫々  $2\eta_1, 2\eta_2$  とすれば

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{e^{ax_1}}{e^{ax_2}}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{e^{-\frac{a}{2}x_1}}{e^{-\frac{a}{2}x_2}}$$

$$\therefore \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$$

(3) 水深一樣にて幅が直線的に變化する場合 (以下本節にては  $x \leq 0$  を含まず。)

水路幅を  $b = b_0 \frac{x}{a}$  にて表はせば (6) 式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{k^2}{h} \eta = 0$$

之は零次の Bessel 微分方程式であるが、その一般解を次の如く Hankel の函数を用ひて表はす。

$$\eta = [A_3 H_0^1(\chi x) + B_3 H_0^2(\chi x)] e^{i\sigma t}$$

$$\text{但し } H_0^1(x) = J_0(x) + iY_0(x)$$

$$H_0^2(x) = J_0(x) - iY_0(x)$$

第二種圓嚮函数  $Y_n(x)$  は Neumann の定義によるものとする。

即ち 
$$Y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin n\pi} \{ \cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x) \}$$

$H_0^1(\chi x)$  と  $H_0^2(\chi x)$  は總ての點に於て絶對値が等しく偏角 (argument) は符號のみ異なる。故にその何れかと  $e^{i\sigma t}$  の積が進行波を表はすことを知れば他のものと  $e^{i\sigma t}$  の積は逆行波を表はす。今  $Y_0(x)$  に上の定義を用ひて  $H_0^2(\chi x)$  の漸近展開を行へば<sup>1)</sup>

$$H_0^2(\chi x)e^{i\sigma t} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi x}} e^{i(\chi x - \frac{\pi}{4})} \{P_0(\chi x) - iQ_0(\chi x)\} e^{i\sigma t}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi x}} \{P_0(\chi x) - iQ_0(\chi x)\} e^{-i(\chi x - \sigma t - \frac{\pi}{4})}$$

但し  $P_n(x)$ ,  $Q_n(x)$  は Legendre の球面調和函数である。然るにある函数が  $f(x \pm ct)$  の形にて表はされる時はこの函数は逆行波又は進行波を表はすものであるから、 $H_0^2(\chi x)e^{i\sigma t}$  は  $x$  が大なる時は進行波を表はす。而て連續函数にて表はされる波が  $x$  の相當大なる所にて進行波ならば總ての  $x$  に於て進行波でなければならぬ。故に一般解は

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波 } \eta &= B_2 H_0^2(\chi x) e^{i\sigma t} \\ \text{逆行波 } \eta &= A_2 H_0^1(\chi x) e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

境界條件を  $x=l$  にて  $\eta = \eta_0 e^{i\sigma t}$  とすれば

$$A_2 = \frac{\eta_0}{H_0^1(\chi l)}, \quad B_2 = \frac{\eta_0}{H_0^2(\chi l)}$$

従つて進行波は

$$\eta = \eta_0 \frac{H_0^2(\chi x)}{H_0^2(\chi l)} e^{i\sigma t}$$

$$= \frac{\eta_0}{J_0^2(\chi l) + Y_0^2(\chi l)} \left[ \{J_0(\chi l)J_0(\chi x) + Y_0(\chi l)Y_0(\chi x)\} + i \{Y_0(\chi l)J_0(\chi x) - J_0(\chi l)Y_0(\chi x)\} \right] e^{i\sigma t}$$

逆行波は

$$\eta = \frac{H_0^1(\chi x)}{H_0^1(\chi l)} e^{i\sigma t}$$

$$= \frac{\eta_0}{J_0^2(\chi l) + Y_0^2(\chi l)} \left[ \{J_0(\chi l)J_0(\chi x) + Y_0(\chi l)Y_0(\chi x)\} - i \{Y_0(\chi l)J_0(\chi x) - J_0(\chi l)Y_0(\chi x)\} \right] e^{i\sigma t}$$

..... (12)

之より見れば振幅の變化は Hankel の函数の絶對値の變化と全く同形であるから、進行波、逆行波によつて異なることなく、唯  $\chi$  及び  $l$  が關係する。その關係は第五圖に示した。縦軸には  $|H_0^1(\chi x)|$  の値を示す。

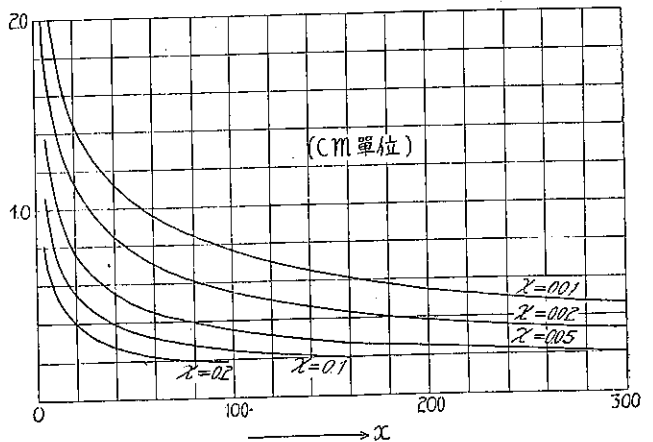
(4) 水路幅一樣にて水深が直線的に變化する場合

水深を  $h = h_0 x/a$  とすれば (6) 式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{ak^2}{h_0} \frac{\eta}{x} = 0$$

此處にて  $2k\sqrt{\frac{a}{h_0}} = \kappa$ ,  $\sqrt{x} = X$  とおけば

第五圖



<sup>1)</sup> 小平吉男氏, 物理數學第一卷 421 頁に同様の證明法がある。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \kappa^2 \eta = 0$$

この一般解を前と同様に表はす。

$$\eta = [A_4 H_0^{(1)}(\kappa X) + B_4 H_0^{(2)}(\kappa X)] e^{i\sigma t}$$

この中にて  $H_0^{(1)}(\kappa X) e^{i\sigma t}$  が進行波を表はすことは (3) の場合と全然同一であるから、同じ境界条件を用ひれば

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波は } \eta &= \eta_0 \frac{H_0^{(2)}(\kappa\sqrt{x})}{H_0^{(2)}(\kappa\sqrt{l})} e^{i\sigma t} \\ \text{逆行波は } \eta &= \eta_0 \frac{H_0^{(1)}(\kappa\sqrt{x})}{H_0^{(1)}(\kappa\sqrt{l})} e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} (13)$$

併し乍らこの場合の振幅變化の状況は前の場合とは異り第六圖の如き形となる。

(5) 幅と水深が共に直線的に變化する場合

幅を  $b = b_0 x/a$ , 水深を  $h = h_0 x/a$  とすれば

(6) 式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{ak^2}{h_0} x \eta = 0$$

前と同じく  $2k\sqrt{\frac{a}{h_0}} = \kappa$ ,  $\sqrt{x} = X$  と置けば

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{3}{X} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \kappa^2 \eta = 0$$

更に  $\eta = \frac{Y}{X} = \frac{Y}{\sqrt{x}}$  とおけば基本方程式は

$$\left[ \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial Y}{\partial X} + \left( \kappa^2 - \frac{1}{X^2} \right) Y \right] = 0$$

この一般解を

$$Y = [A_5 H_1^{(1)}(\kappa X) + B_5 H_1^{(2)}(\kappa X)] \text{ と書けば}$$

$$\eta = [A_5 H_1^{(1)}(\kappa\sqrt{x}) + B_5 H_1^{(2)}(\kappa\sqrt{x})] \frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$$

この場合も (3) 及び (4) と同様に  $H_1^{(2)}(\kappa\sqrt{x}) \frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$  が進行波を表はし、 $H_1^{(1)}(\kappa\sqrt{x}) \frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$  が逆行波を表はすことが證明される。但し第二種圓壩函数には Neumann の函数を用ふる。前と同じ境界条件を用ひて

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波 } \eta &= \eta_0 \frac{H_1^{(2)}(\kappa\sqrt{x})}{H_1^{(2)}(\kappa\sqrt{l})} \sqrt{\frac{l}{x}} e^{i\sigma t} \\ \text{逆行波 } \eta &= \eta_0 \frac{H_1^{(1)}(\kappa\sqrt{x})}{H_1^{(1)}(\kappa\sqrt{l})} \sqrt{\frac{l}{x}} e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

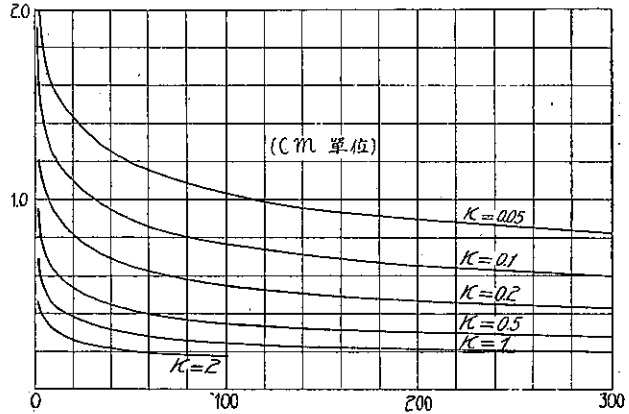
この場合の振幅の變化は  $H_1^{(1)}(\kappa\sqrt{x})/\sqrt{x}$  の絶對値を以て表はされ之は第七圖に示す如き形となる。

かくの如く波形が圓壩函数を以て表はされることは波高の變化に伴ふ波長の變化が比較的少いことを示すものである。従つて波の波長及び勢力の不變なることより導入した公式

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(但し數字 1, 2 は夫々  $x_1$  及び  $x_2$  に於ける値なることを示す。) は上の計算の結果と甚しき差異を興へないことが想像される。

第六圖



第七圖

(6) 幅及び水深が拋物線形に變化する場合  
幅及び水深を  $b = dx^m, h = cx^m (m > 0, n > 0)$   
を以て表はす。(3), (4) 及び (5) は何れも  
 $m, n$  が 1 又は零なる場合としてこの中に  
含まれる。(6) 式を變化すれば

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2} + \frac{m+n}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{k^2}{cx^m} \eta = 0 \dots\dots\dots(15)$$

$x^p = X$  と置けば

$$p^2 x^{2(p-1)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \{p(p-1) + p(m+n)\} x^{p-2} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{k^2}{cx^m} \eta = 0$$

$p \neq 0$  として

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{m+n+p-1}{pX} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{k^2}{cp^{2p}x^{m+2(p-1)}} \eta = 0 \dots\dots\dots(16)$$

$m+2(p-1)=0$  となる様に  $p$  を擇ぶ。

$$\therefore p = 1 - \frac{m}{2} \neq 0 \text{ 故に } m \neq 2$$

(16) 式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{\mu}{X} \frac{\partial \eta}{\partial X} + k'^2 \eta = 0, \quad k' = \frac{k}{\sqrt{cp}}, \quad \mu = \frac{m+2n}{2-m}$$

次に  $\eta = X^q Y$  と置く。

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \frac{\mu+2q}{X} \frac{\partial Y}{\partial X} + \left[ k'^2 + \frac{\mu q + q(q-1)}{X^2} \right] Y = 0$$

茲にて  $\mu+2q=1$  となる様に  $q$  を擇ぶ。

$$\therefore q = \frac{1-\mu}{2} = \frac{1-m-n}{2-m}, \quad \mu q + q(q-1) = -q^2$$

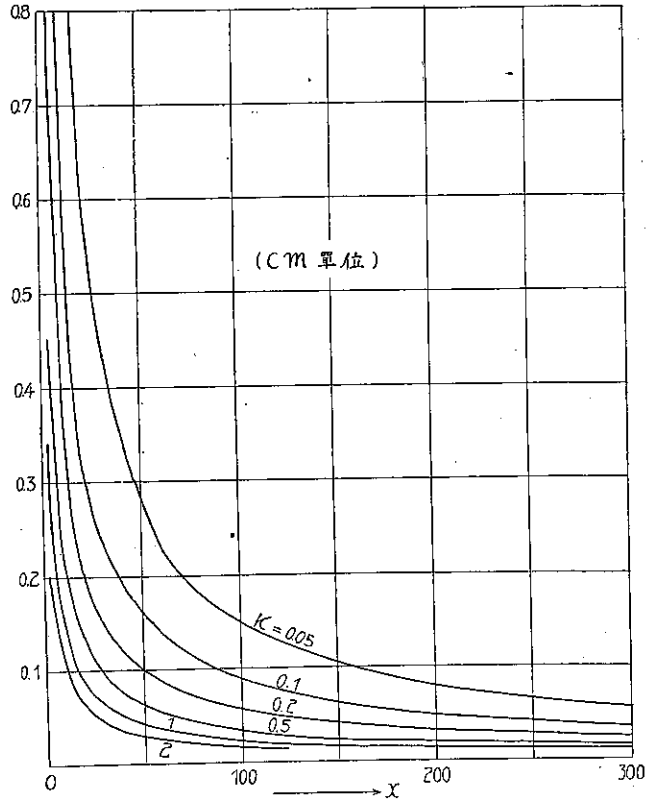
$$\therefore \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial Y}{\partial X} + \left[ k'^2 - \frac{q^2}{X^2} \right] Y = 0 \dots\dots\dots(17)$$

(17) は  $q$  次の Bessel 微分方程式であるからその一般解は

$$Y = A_0 J_q(k'X) + B_0 Y_q(k'X)$$

又は  $Y = A_0 H_q^{(1)}(k'X) + B_0 H_q^{(2)}(k'X)$

然し實際は  $J_q(x), Y_q(x)$  の數値が表として與へられたるものとなる様に  $q$  を擇ぶのでなければこの解は事實上不可能である。 $\eta$  の一般解は次の如く書かれる。



$$\eta = x^{m2} \left[ A_0 J_q \left( \frac{k}{\sqrt{c p}} x^p \right) + B_0 Y_q \left( \frac{k}{\sqrt{c p}} x^p \right) \right] e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (18)$$

又は  $\eta = x^{m2} \left[ A_0 H_q^{(1)} \left( \frac{k}{\sqrt{c p}} x^p \right) + B_0 H_q^{(2)} \left( \frac{k}{\sqrt{c p}} x^p \right) \right] e^{i\sigma t}$

但し  $q$  が整数でなければ  $Y_q(x)$  の代わりに  $J_{-q}(x)$  を用ふる。

$m=2$  の場合に對しては未だ解が與へてない。この場合は (15) 式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{n+2}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{k^2}{c x^2} \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

この微分方程式は  $p$  を適當に擇べば  $\eta = C x^p$  に依て満足される。即ち之を代入すれば

$$p(p-1) + p(n+2) + \frac{k^2}{c} = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{2} \left\{ -(n+1) \pm \sqrt{(n+1)^2 - \frac{4k^2}{c}} \right\}$$

$n+1 \geq \frac{2k}{\sqrt{c}} > 0$  ならば  $p$  は實數にて之等を  $p_1, p_2$  とする。

$$\eta = [C x^{p_1} + D x^{p_2}] e^{i\sigma t}$$

即ち水面は波状を呈することがない。 $0 < n+1 \leq \frac{2k}{\sqrt{c}}$  ならば  $p$  は  $p_1 \pm i p_2$  の形になる。但し  $p_1, p_2$  は實數である。

$$\begin{aligned} \eta &= x^{p_1} [C x^{i p_2} + D x^{-i p_2}] e^{i\sigma t} \\ &= x^{p_1} [C e^{i p_2 \ln x} + D e^{-i p_2 \ln x}] e^{i\sigma t} \end{aligned}$$

従つてこの場合は水面は波形を呈する。之等の解法に於て進行波は次の如く表はされる。

$$\left. \begin{aligned} m \neq 2 \quad \eta &= B_0 x^{m2} H_q^2 \left( \frac{k}{\sqrt{c p}} \right) e^{i\sigma t} \\ m = 2 \quad \eta &= B_0 x^{m2} e^{-i(p_2 \ln x - \sigma t)} \\ \text{逆行波は} \\ m \neq 2 \quad \eta &= A_0 x^{m2} H_q^{(1)} \left( \frac{k}{\sqrt{c p}} \right) e^{i\sigma t} \\ m = 2 \quad \eta &= A_0 x^{m2} e^{i(p_2 \ln x + \sigma t)} \quad \text{但し } \frac{2k}{\sqrt{c}} \geq n+1 > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

一様水深の場合は  $m=0$

$$n = \frac{1}{2} \text{ ならば } q = \frac{1}{4}, \quad n = \frac{1}{3} \text{ ならば } q = \frac{1}{3}, \quad n = \frac{1}{5} \text{ ならば } q = \frac{2}{5}, \quad n = 2 \text{ ならば } q = -\frac{1}{2}$$

一様幅の場合は  $n=0$

$$m = \frac{1}{2} \text{ ならば } q = \frac{1}{3}, \quad m = \frac{3}{2} \text{ ならば } q = -1$$

幅、水深が共に變化する時は  $m=n = \frac{1}{2}$  ならば  $q=0, p = \frac{3}{4}$ ;  $m=1, n = \frac{1}{2}$  ならば  $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$ ;

$$m=1, n = \frac{1}{3} \text{ ならば } p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$$

**2. 摩擦抵抗を考慮する場合**

(1) 幅、水深の一様なる水路

(6)式的一般解は



$$\eta = [C_1 e^{\frac{k_2}{\sqrt{h}}x} + D_1 e^{\frac{k_2}{\sqrt{h}}x}] e^{i\sigma t} \quad \text{但し} \quad k = k_1 - ik_2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波は} \quad \eta &= D_1 e^{-\frac{k_2}{\sqrt{h}}x - i(\frac{k_1}{\sqrt{h}}x - \sigma t)} \\ \text{逆行波は} \quad \eta &= C_1 e^{\frac{k_2}{\sqrt{h}}x + i(\frac{k_1}{\sqrt{h}}x + \sigma t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

境界条件を  $x=l$  にて  $\eta = \eta_0 e^{i\sigma t}$  とすれば

$$D_1 = \eta_0 e^{\left(\frac{k_2}{\sqrt{h}} + i\frac{k_1}{\sqrt{h}}\right)l}, \quad C_1 = \eta_0 e^{-\left(\frac{k_2}{\sqrt{h}} + i\frac{k_1}{\sqrt{h}}\right)l}$$

即ち振幅は何れも  $e^{-\frac{k_2}{\sqrt{h}}x}$  の割合にて波の進む方向に減少する。

(2) 水深一様、幅が exponential に變化する場合

基本方程式は 1. (2) の場合と同様であり、その一般解は

$$\frac{k_1^2 - k_2^2}{h} - i\frac{k_1 k_2}{h} - \frac{\alpha^2}{4} = r e^{-i\phi} \quad \text{とおけば}$$

$$\eta = \left[ C_2 e^{\left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}\right)x + i\sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2}x} + D_2 e^{\left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}\right)x - i\sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2}x} \right] e^{i\sigma t}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波は} \quad \eta &= D_2 e^{\left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}\right)x - i\left(\sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2}x - \sigma t\right)} \\ \text{逆行波は} \quad \eta &= C_2 e^{\left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}\right)x + i\left(\sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2}x + \sigma t\right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

(1) と同じ境界条件により

$$D_2 = \eta_0 e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}\right)l}, \quad C_2 = \eta_0 e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}\right)l}$$

従つて進行波と逆行波にて振幅變化の割合を異にする。その關係は本章 4. の數值計算例中にて示す。

(3) 水深一様にて幅が直線的に變化する場合

この時の一般解の導入及び證明は 1. (3) の場合と全く同一で、唯

$$\chi = \chi_1 - i\chi_2 = (k_1 - ik_2)/\sqrt{h}$$

であるから、 $J_0(\chi x)$  及び  $Y_0(\chi x)$  は何れも複素數となる。即ち境界条件を  $x=l$  にて  $\eta = \eta_0 e^{i\sigma t}$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波は} \quad \eta &= \eta_0 \frac{H_0^2(\chi x)}{H_0^2(\chi l)} e^{i\sigma t} \\ \text{逆行波は} \quad \eta &= \eta_0 \frac{H_0^1(\chi x)}{H_0^1(\chi l)} e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

然るに  $J_0(\chi_1 x - i\chi_2 x) = J_0(\chi_1 x) J_0(i\chi_2 x) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(\chi_1 x) J_s(i\chi_2 x), \quad s=1, 2, 3, \dots\dots$

$$\begin{aligned} &= J_0(\chi_1 x) J_0(i\chi_2 x) + 2 \sum_{s=\text{偶數}} J_s(\chi_1 x) J_s(i\chi_2 x) - i 2 \sum_{s=\text{奇數}} J_s(\chi_1 x) i J_s(i\chi_2 x) \\ &= f_1(\chi x) - i f_2(\chi x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_0(\chi_1 x - i\chi_2 x) &= Y_0(\chi_1 x) J_0(i\chi_2 x) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} Y_s(\chi_1 x) J_s(i\chi_2 x) \\ &= Y_0(\chi_1 x) J_0(i\chi_2 x) + 2 \sum_{s=\text{偶數}} Y_s(\chi_1 x) J_s(i\chi_2 x) - i 2 \sum_{s=\text{奇數}} Y_s(\chi_1 x) i J_s(i\chi_2 x) \\ &= g_1(\chi x) - i g_2(\chi x) \end{aligned}$$

$$H_0^1(\chi x) = \{f_1(\chi x) + g_2(\chi x)\} - i\{f_2(\chi x) - g_1(\chi x)\}$$

$$H_0^2(\chi x) = \{f_1(\chi x) - g_2(\chi x)\} - i\{f_2(\chi x) + g_1(\chi x)\}$$

之等を (23) 式に代入して實數部と虚數部に分つことに依て  $\eta$  を表はす一般式を得る。即ち進行波は

$$\eta = \eta_0 \frac{\{f_1(\chi x) + g_2(\chi x)\} - i\{f_2(\chi x) - g_1(\chi x)\}}{\{f_1(\chi l) + g_2(\chi l)\} - i\{f_2(\chi l) - g_1(\chi l)\}} e^{i\sigma t}$$

逆行波は

$$\eta = \eta_0 \frac{\{f_1(\chi x) - g_2(\chi x)\} - i\{f_2(\chi x) + g_1(\chi x)\}}{\{f_1(\chi l) - g_2(\chi l)\} - i\{f_2(\chi l) + g_1(\chi l)\}} e^{i\sigma t}$$

之等の絶對値即ち振幅は次の如く表はされる。

$$\left. \begin{aligned} \text{逆行波} & \quad 2\eta_0 \left[ \frac{\{f_1(\chi x) + g_2(\chi x)\}^2 + \{f_2(\chi x) - g_1(\chi x)\}^2}{\{f_1(\chi l) + g_2(\chi l)\}^2 + \{f_2(\chi l) - g_1(\chi l)\}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{逆行波} & \quad 2\eta_0 \left[ \frac{\{f_1(\chi x) - g_2(\chi x)\}^2 + \{f_2(\chi x) + g_1(\chi x)\}^2}{\{f_1(\chi l) - g_2(\chi l)\}^2 + \{f_2(\chi l) + g_1(\chi l)\}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

#### (4) 水路幅一樣にて水深が直線的に變化する場合

前節 (4) の (13) 式と同一の解であるが只

$$\kappa = 2\sqrt{\frac{\alpha}{h_0}}(k_1 - ik_2) = \kappa_1 - i\kappa_2$$

であるから、之を代入して書き直せば (24) にて  $\chi x$  の代りに  $\kappa\sqrt{x}$  とせるものとなる。

#### (5) 水深と幅が共に直線的に變化する場合

之も前節と同様にして

$$\left. \begin{aligned} \text{進行波は} & \quad \eta = \eta_0 \frac{H_1^2(\kappa\sqrt{x})}{H_1^2(\kappa\sqrt{l})} \sqrt{\frac{l}{x}} e^{i\sigma t} \\ \text{進行波は} & \quad \eta = \eta_0 \frac{H_1^1(\kappa\sqrt{x})}{H_1^1(\kappa\sqrt{l})} \sqrt{\frac{l}{x}} e^{i\sigma t} \\ \text{但し} & \quad \kappa = 2\sqrt{\frac{\alpha}{h_0}}(k_1 - ik) = \kappa_1 - i\kappa_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

然るに  $\sqrt{x} = z$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$  として

$$\begin{aligned} J_1(\kappa_1 z - i\kappa_2 z) &= -J_0(\kappa_1 z) J_1(i\kappa_2 z) + J_1(\kappa_1 z) J_0(i\kappa_2 z) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} J_s(\kappa_1 z) J_{s+1}(i\kappa_2 z) + \sum_{s=1}^{\infty} J_{s+1}(\kappa_1 z) J_s(i\kappa_2 z) \\ &= J_1(\kappa_1 z) J_0(i\kappa_2 z) - \sum_{s=\text{奇数}} J_s(\kappa_1 z) J_{s+1}(i\kappa_2 z) + \sum_{s=\text{偶数}} J_{s+1}(\kappa_1 z) J_s(i\kappa_2 z) \\ &+ i \left\{ J_0(\kappa_1 z) i J_1(i\kappa_2 z) + \sum_{s=\text{偶数}} J_s(\kappa_1 z) i J_{s+1}(i\kappa_2 z) - \sum_{s=\text{奇数}} J_{s+1}(\kappa_1 z) i J_s(i\kappa_2 z) \right\} \\ &= \varphi_1(\kappa z) + i\varphi_2(\kappa z) \\ Y_1(\kappa_1 z - i\kappa_2 z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{s+1}(\kappa_1 z) Y_s(i\kappa_2 z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Y_1(\kappa_1 z) J_0(i\kappa_2 z) - \sum_{s=\text{奇数}} Y_s(\kappa_1 z) J_{s+1}(i\kappa_2 z) + \sum_{s=\text{偶数}} Y_{s+1}(\kappa_1 z) J_s(i\kappa_2 z) \\
 &\quad + i \left\{ Y_0(\kappa_1 z) i J_1(i\kappa_2 z) + \sum_{s=\text{偶数}} Y_s(\kappa_1 z) i J_{s+1}(i\kappa_2 z) - \sum_{s=\text{奇数}} Y_{s+1}(\kappa_1 z) i J_s(i\kappa_2 z) \right\} \\
 &= \psi_1(\kappa z) + i \psi_2(\kappa z) \\
 H_1^1(\kappa z) &= \{ \varphi_1(\kappa z) - \psi_2(\kappa z) \} + i \{ \varphi_2(\kappa z) + \psi_1(\kappa z) \} \\
 H_1^2(\kappa z) &= \{ \varphi_1(\kappa z) + \psi_2(\kappa z) \} + i \{ \varphi_2(\kappa z) - \psi_1(\kappa z) \}
 \end{aligned}$$

従つて進行波は

$$\eta = \eta_0 \frac{\{ \varphi_1(\kappa z) + \psi_2(\kappa z) \} + i \{ \varphi_2(\kappa z) - \psi_1(\kappa z) \}}{\{ \varphi_1(\kappa \sqrt{l}) + \psi_2(\kappa \sqrt{l}) \} + i \{ \varphi_2(\kappa \sqrt{l}) - \psi_1(\kappa \sqrt{l}) \}} \frac{\sqrt{l}}{z} e^{i\sigma t}$$

逆行波は

$$\eta = \eta_0 \frac{\{ \varphi_1(\kappa z) - \psi_2(\kappa z) \} + i \{ \varphi_2(\kappa z) + \psi_1(\kappa z) \}}{\{ \varphi_1(\kappa \sqrt{l}) - \psi_2(\kappa \sqrt{l}) \} + i \{ \varphi_2(\kappa \sqrt{l}) + \psi_1(\kappa \sqrt{l}) \}} \frac{\sqrt{l}}{z} e^{i\sigma t}$$

之等の波の振幅は

$$\left. \begin{aligned}
 \text{進行波} & 2\eta_0 \left[ \frac{l}{x} \frac{\{ \varphi_1(\kappa \sqrt{x}) + \psi_2(\kappa \sqrt{x}) \}^2 + \{ \varphi_2(\kappa \sqrt{x}) - \psi_1(\kappa \sqrt{x}) \}^2}{\{ \varphi_1(\kappa \sqrt{l}) + \psi_2(\kappa \sqrt{l}) \}^2 + \{ \varphi_2(\kappa \sqrt{l}) - \psi_1(\kappa \sqrt{l}) \}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 \text{逆行波} & 2\eta_0 \left[ \frac{l}{x} \frac{\{ \varphi_1(\kappa \sqrt{x}) - \psi_2(\kappa \sqrt{x}) \}^2 + \{ \varphi_2(\kappa \sqrt{x}) + \psi_1(\kappa \sqrt{x}) \}^2}{\{ \varphi_1(\kappa \sqrt{l}) - \psi_2(\kappa \sqrt{l}) \}^2 + \{ \varphi_2(\kappa \sqrt{l}) + \psi_1(\kappa \sqrt{l}) \}^2} \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

### 3. 長波の相似律

相似形に近き 2 箇所の地形に於ける波の比較、又は模型試験の結果との比較の爲に、上に得たる進行波の一般解を用ひてその相似律を導入する。合成波又はセイシュの場合の相似律も全く同一である。

今鉛直方向の諸量を總て  $n_1$  倍し水平方向の諸量を總て  $n_2$  倍せる地形に於ける波の週期は元のもの  $\frac{1}{m}$  倍となるものとする。

#### (1) 摩擦抵抗なき場合

縮尺を變へたる後の地形に對する  $k$  及び  $\eta$  の値を夫々  $K, H$  とすれば

$$K = 2\pi(mT\sqrt{g}) = k/m$$

従つて  $\chi = \frac{k}{\sqrt{h}}$  は  $\frac{K}{m\sqrt{n_1}}$  となる。一樣水路の場合は進行波に對して

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_0 e^{-i[\chi(x-l) - \sigma t]} \\
 H &= H_0 e^{-i\left[ \frac{n_2}{m\sqrt{n_1}} \chi(x-l) - \sigma t \right]}
 \end{aligned}$$

故に  $n_2/(m\sqrt{n_1}) = 1$  となる様に擇べば

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\eta}{\eta_0}$$

となり相似律が成立する。逆行波に對しても全く同様である。又幅が exponential に變化する場合は上の條件の他に  $a$  を  $1/(m\sqrt{n_1})$  倍すれば  $\frac{a}{2}x$  及び  $\sqrt{\frac{k^2}{h} - \frac{a^2}{4}}x$  は  $\frac{n_2}{m\sqrt{n_1}} = 1$  倍となり相似律は成立する。幅のみが直線的に變化する時も進行波を例に取れば

$$\eta = \eta_0 \frac{H_0^2(\chi x)}{H_0^2(\chi l)} e^{i\sigma t}$$

であるから  $n_2/(m\sqrt{n_1})=1$  となる様に擇べば  $\chi x$  又は  $\chi l$  に變化なく、従つて相似律は成立する。

水深のみが直線的に變化する時は

$$\kappa = 2\sqrt{\frac{\alpha}{h_0}} \text{ 従つて } \kappa \text{ は } \frac{\sqrt{n_2}}{m\sqrt{n_1}} \kappa \text{ となる。然るに解は}$$

$$\eta = \eta_0 \frac{H_0^2(\kappa\sqrt{x})}{H_0^2(\kappa\sqrt{l})} e^{i\sigma t}$$

の形であるから  $n_2/(m\sqrt{n_1})=1$  となる様にすれば相似律は成立する。水深及び幅が共に直線的に又は拋物線狀に變化する場合も同様の關係が必要なることが證明される。

例へば模型試験に於て  $n_1=1/100, n_2=1/1000$  となる様に模型を作れば、相似律が成立する爲に必要な波の週期は

$$m = \frac{n_2}{\sqrt{n_1}} = \frac{\sqrt{100}}{1000} = \frac{1}{100}$$

即ち 1/100 倍である。

(2) 摩擦抵抗のある場合

この場合は縮尺の變化に伴ひ  $\tan \theta$  が變化することがなければ相似律は (1) に於けると全く同一である。

$$\tan \theta = f/\sigma = Tf/(2\pi)$$

之を變化させぬ爲には  $T$  が  $m$  倍になる時に  $f$  を  $1/m$  倍にすればよい。之は小型の模型を用ひ  $m$  の値が小さき時は  $f$  は著しく大なるを必要とする事を示す。従て逆に模型にて現はれる摩擦損失は實際上極めて輕微なる値と對應するものなることを示す。 $f$  を  $1/m$  倍せずして完全なる相似律を得るには  $\sigma$  と  $\theta$  の關係を適當に擇んで  $k$  が  $k/m$  となる様にする必要がある。従て  $n_1$  又は  $n_2$  が自由に擇び得ぬこととなる。

4. 數値計算例

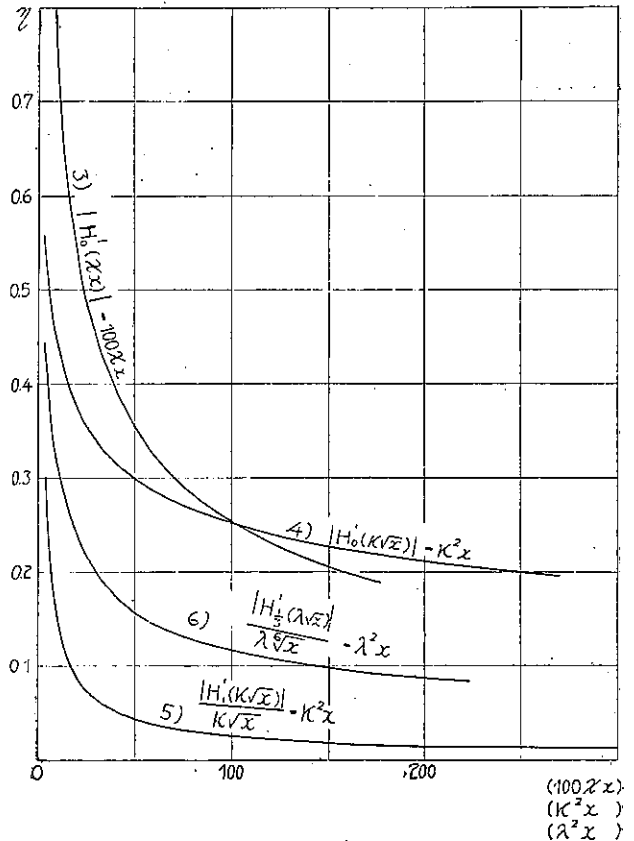
(1) 摩擦抵抗なき場合

第八圖に於て (3), (4), (5) の三例及び (6) の中で  $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$  の例に就き進行波又は逆行波の振幅變化の狀況を示す。

振幅の大きさは之に依て直接に比較することは出来ないが、(3) の曲線以外は境界條件の與へられた位置  $x=l_1$  に對する  $\kappa^2 l_1$  の處にて縦坐標の讀みを一致させる様に、縦軸に平行に移動すればよい。

第九圖は  $T = 2\text{sec}, h = 30\text{cm}, l = 80\text{cm}$  の値

第 八 圖



を有する、幅のみ直線的に變化する水路中の進行波の計算例である。

$$\eta = \eta_0 F(x) e^{i\sigma t}$$

$$= \eta_0 \{ R(F) \cos \sigma t - I(F) \sin \sigma t \},$$

但し  $F = R(F) + iI(F)$

の形にて表はした時の  $R(F)$  及び  $I(F)$  を圖中に示す。

計算例は模型的の小さき寸法の場合に就て行つたが、本章 3. の相似律によつて、この計算値より直ちに大規模の灣、水路等に於ける長波の形狀を知り得る。

次に實地への應用の一例として岩手縣綾里灣の地形につきて上の計算を行へる例を示す。この地形は第十圖中に示す如く

$$l = 5520 \text{ m}$$

$$h_0 = 70 \text{ m}$$

$$h = cx^m = \frac{1.703}{10^4} x^{\frac{3}{2}}$$

$$b = da^n, \quad n = 1$$

週期  $T = 11.5 \text{ min} = 690 \text{ sec}$  の波を考へれば

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}, \quad k^2 = \frac{8.46}{10^6}, \quad k = \frac{3.905}{10^3}$$

$$p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad q = -3$$

$$pq = -\frac{3}{4}, \quad \sqrt{c} = \frac{1.305}{10^2}$$

$$\frac{k}{\sqrt{cp}} = 0.8904$$

従て進行波は

$$\eta = \eta_0 \frac{x^{-\frac{3}{4}} \left\{ J_{-\frac{3}{4}}(0.8904 x^{\frac{1}{4}}) - i Y_{-\frac{3}{4}}(0.8904 x^{\frac{1}{4}}) \right\}}{i^{\frac{3}{4}} \left\{ J_{-\frac{3}{4}}(0.8904 l^{\frac{1}{4}}) - i Y_{-\frac{3}{4}}(0.8904 l^{\frac{1}{4}}) \right\}} e^{i\sigma t}$$

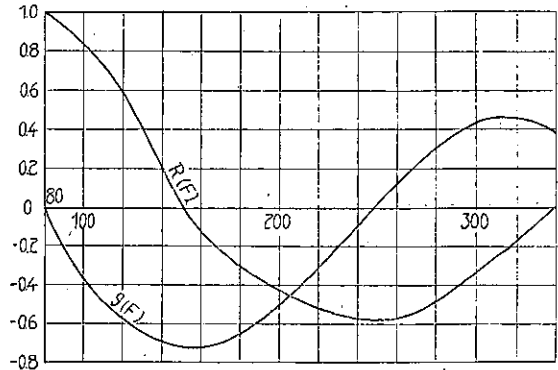
時間因數を除きたる絶対値即ち振幅を考へて、之を  $2\eta$  にて表はせば  $\eta/\eta_0$  は第十圖に示す如く

變化する。然し實際の水深は圖中に點線にて示す如き形であるから波の振幅も又  $\eta/\eta_0$  の曲線中にて點線に示す如き傾向となる。

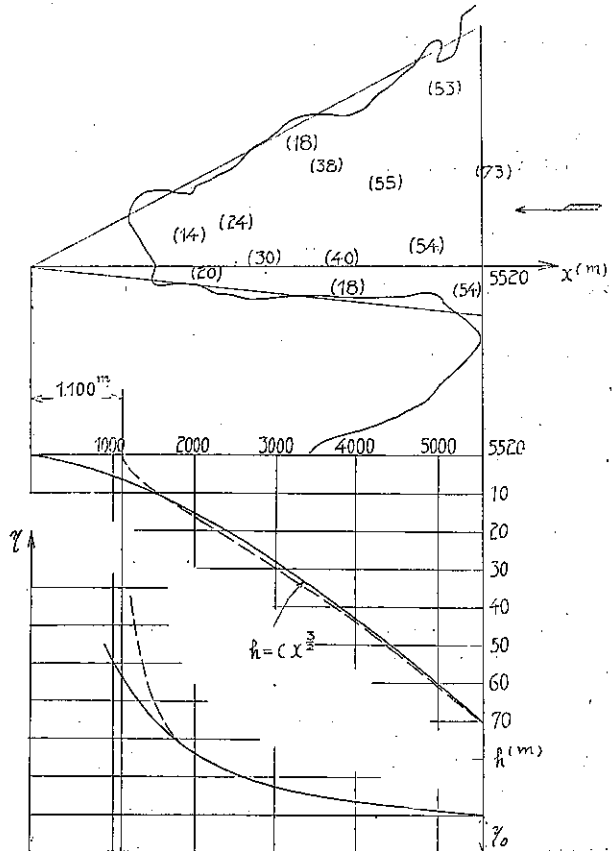
(2) 摩擦抵抗ある場合

先づ  $f$  を決定する必要があるが、抵抗はむしろ Chézy の平均流速公式の如き形となるものと考へられる。従

第九圖



第十圖



つて

$$fv = X = I_f = \frac{v^2 \eta}{C^2 h}, \quad C \text{ は平均流速の公式の係数}$$

今  $h=30 \text{ cm}$ ,  $C=500$  とすれば

$$I_f = \frac{1.307}{10^4} v^2$$

$v$  は毎秒數十種程度のものであるから、第十一圖より  $f=0.006$  と取つて大差ない

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \left( \frac{0.006}{\pi} \right) = 0.0019$$

$$\therefore k_1 = 0.1003, \quad k_2 = 0.95285 \times 10^{-4}$$

$$X_2 = \frac{k_2}{\sqrt{h}} = 1.741 \times 10^{-5}$$

一樣水路に於ける振幅減少の割合を次の表に示す。

$x(\text{cm})$	4	10	50	100	150	200	300	500	1000
$e^{-\lambda_2 x}$	1	.9998	.9991	.9983	.9974	.9965	.9948	.9914	.9827

即ち摩擦抵抗の影響は甚だ少い。

次に幅が exponential に變化する場合には  $a=0.015$  とすれば

$$r e^{-i\phi} = 0.0002797 - i 3.186 \times 10^{-7}$$

振幅は次の割合を以て變化する。

$$\text{進行波} \quad e^{\left( -\frac{0.015}{2} - \frac{9.341}{106} \right) x} = e^{-0.00751 x}$$

$$\text{逆行波} \quad e^{\left( -\frac{0.015}{2} - \frac{9.341}{106} \right) x} = e^{-0.00749 x}$$

之を表にて示せば

$x(\text{cm})$	4	10	50	100	150	200	300	500	1000
$e^{-0.00751 x}$	.9704	.9277	.6869	.4724	.3242	.2227	.1051	.0234	.00055
$e^{-0.00749 x}$	.9705	.9278	.6876	.4728	.3251	.2236	.1057	.0236	.00056

この兩者の差は摩擦抵抗によるものであるが、その影響は輕微である。この他の場合に對しても摩擦抵抗は波形に大なる影響を及ぼさぬことが推察される。

## 第二章 合成波の變形

合成波は進行波が反射せる逆行波と合成せるもの、又は水路の兩端より反對の方向に進行する 2 種の波の合成せるものである。之等の解法は第一章の進行波の場合と殆ど同じ方法を用ふるのであるから重複する箇所は多く之を省略した。尙相似律に關しては進行波と同一の關係が成立する。

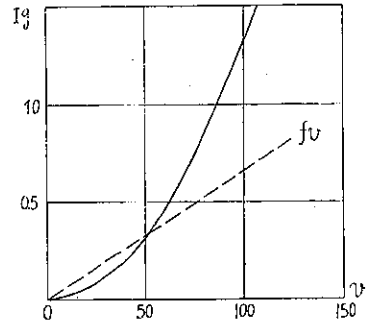
### 1. 摩擦抵抗を無視する場合

#### (1) 断面一樣なる水路

一樣水路に於ける合成波の一般解は

$$\eta = [A_1 e^{iXx} + B_1 e^{-iXx}] e^{i\omega t} \dots \dots \dots (27)$$

第十一圖



海峡に於ける潮波の加く兩端より異なる波が進入し來る時は兩端に於ける水位を境界條件として

$$\begin{aligned} x=l_1 \quad \text{にて} \quad \eta &= \eta_1 e^{i\sigma t} \\ x=l_2 \quad \text{にて} \quad \eta &= \eta_2 e^{i(\sigma t - \varepsilon)} \end{aligned}$$

但し  $\varepsilon$  は常數である。

$$\begin{aligned} \therefore A_1 e^{iXl_1} + B_1 e^{-iXl_1} &= \eta_1 \\ A_1 e^{iXl_2} + B_1 e^{-iXl_2} &= \eta_2 e^{-i\varepsilon} \end{aligned}$$

之より

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & e^{-iXl_1} \\ \eta_2 e^{-i\varepsilon} & e^{-iXl_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{iXl_1} & e^{-iXl_1} \\ e^{iXl_2} & e^{-iXl_2} \end{vmatrix}}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} e^{iXl_1} & \eta_1 \\ e^{iXl_2} & \eta_2 e^{-i\varepsilon} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{iXl_1} & e^{-iXl_1} \\ e^{iXl_2} & e^{-iXl_2} \end{vmatrix}} \dots \dots \dots (28)$$

進行波が水路に垂直なる壁面 ( $x=0$ ) に當りて反射する時は

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 [e^{iXx} + e^{-iXx}] e^{i\sigma t} \\ &= 2\eta_0 \cos Xx \cdot e^{i\sigma t} \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

即ち定常波となる。

(2) 水深一樣にて幅が exponential に變化する場合

一般解は

$$\begin{aligned} \eta &= A_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x + i(m_2x + \sigma t)} + B_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x - i(m_2x - \sigma t)} \\ m_2 &= \sqrt{\frac{k^2}{h} - \frac{\alpha^2}{4}} \end{aligned}$$

前と同じ境界條件により

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & e^{(-\frac{\alpha}{2} - im_2)l_1} \\ \eta_2 e^{-i\varepsilon} & e^{(-\frac{\alpha}{2} - im_2)l_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{im_2l_1} & e^{-im_2l_1} \\ e^{im_2l_2} & e^{-im_2l_2} \end{vmatrix}} \frac{\alpha}{2}(l_1 + l_2), \quad B_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{(-\frac{\alpha}{2} + im_2)l_1} & \eta_1 \\ e^{(-\frac{\alpha}{2} + im_2)l_2} & \eta_2 e^{-i\varepsilon} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{im_2l_1} & e^{-im_2l_1} \\ e^{im_2l_2} & e^{-im_2l_2} \end{vmatrix}} \frac{\alpha}{2}(l_1 + l_2) \dots \dots \dots (30)$$

次に第十三圖の如く  $x=L$  の處より波が反射する場合は初めに  $x=0$  に向つて進行せる波が  $x=l$  にて  $\eta = \eta_0 e^{i\sigma t}$  なりしものとすれば

$$A_2 = \eta_0 e^{(\frac{\alpha}{2} - im_2)l}$$

$x=L$  に於ける條件は

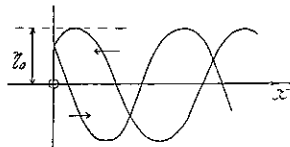
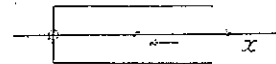
$$\begin{aligned} A_2 e^{-\frac{\alpha}{2}L + i(m_2L + \sigma t)} &= B_2 e^{-\frac{\alpha}{2}L - i(m_2L - \sigma t)} \\ \therefore A_2 e^{im_2L} &= B_2 e^{-im_2L} \\ \therefore \eta &= \eta_0 e^{(\frac{\alpha}{2} - im_2)l} [e^{im_2x} + e^{i(2m_2L - im_2x)}] e^{-\frac{\alpha}{2}x + i\sigma t} \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

この場合は碎波を生ずる限界の波高を  $\eta_c$  とすれば  $x=L$  にて

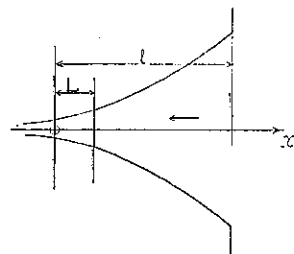
$$\eta < \eta_c$$

となることが必要である。潮波の場合は碎波を生ずることはないと考えて差支へないが、津波の場合は  $\eta_c$  を求めて之と比較する必要がある。

第十二圖



第十三圖



(3) 水深一樣にて幅が直線的に變化する場合

一般解は次の形で差支へない。

$$\eta = [A_3 J_0(\chi, x) + B_3 Y_0(\chi, x)] e^{i\sigma t}$$

境界條件は  $x=l_1$  にて  $\eta = \eta_1 e^{i\sigma t}$

$x=l_2$  にて  $\eta = \eta_2 e^{i(\sigma t - \varepsilon)}$

$$A_3 = \begin{vmatrix} J_0(\chi l_1) & Y_0(\chi l_1) \\ J_0(\chi l_2) & Y_0(\chi l_2) \end{vmatrix} \text{ と書けば}$$

$$A_3 = \frac{1}{A_3} \begin{vmatrix} \eta_1 & Y_0(\chi l_1) \\ \eta_2 e^{-i\varepsilon} & Y_0(\chi l_2) \end{vmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{A_3} \begin{vmatrix} J_0(\chi l_1) & \eta_1 \\ J_0(\chi l_2) & \eta_2 e^{-i\varepsilon} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \eta = \frac{1}{A_3} \left\{ \begin{vmatrix} J_0(\chi x) & Y_0(\chi x) \\ J_0(\chi l_2) & Y_0(\chi l_2) \end{vmatrix} \eta_1 + \begin{vmatrix} J_0(\chi l_1) & Y_0(\chi l_1) \\ J_0(\chi x) & Y_0(\chi x) \end{vmatrix} \eta_2 e^{-i\varepsilon} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

波が  $x=L$  の處より反射する時は (2) と同じ條件により

$$\eta = [A_3 H_0^1(\chi, x) + B_3 H_0^2(\chi, x)] e^{i\sigma t}$$

$$A_3 = \frac{\eta_0}{H_0^1(\chi l)}$$

$x=L$  に於ける條件より

$$A_3 H_0^1(\chi L) = B_3 H_0^2(\chi L)$$

$$\begin{aligned} \therefore \eta &= \frac{\eta_0}{H_0^1(\chi l)} \left[ H_0^1(\chi, x) + \frac{H_0^2(\chi L)}{H_0^1(\chi L)} H_0^2(\chi, x) \right] e^{i\sigma t} \\ &= \frac{2\eta_0 H_0^2(\chi l)}{J_0^2(\chi l) + Y_0^2(\chi l)} \left[ \left\{ J_0(\chi, x) + \frac{J_0(\chi L) Y_0(\chi L)}{J_0^2(\chi L) + Y_0^2(\chi L)} Y_0(\chi, x) \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{J_0(\chi L) Y_0(\chi L)}{J_0^2(\chi L) + Y_0^2(\chi L)} J_0(\chi, x) \right] e^{i\sigma t} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

(4) 幅一樣にて深さが直線的に變化する場合

一般解は

$$\eta = [A_4 J_0(\kappa \sqrt{x}) + B_4 Y_0(\kappa \sqrt{x})] e^{i\sigma t}, \quad \kappa = 2k \sqrt{\frac{ct}{h_0}}$$

前と同じ境界條件を用ひて

$$A_4 = \begin{vmatrix} J_0(\kappa \sqrt{l_1}) & Y_0(\kappa \sqrt{l_1}) \\ J_0(\kappa \sqrt{l_2}) & Y_0(\kappa \sqrt{l_2}) \end{vmatrix} \text{ と書けば}$$

$$\eta = \frac{1}{A_4} \left\{ \begin{vmatrix} J_0(\kappa \sqrt{x}) & Y_0(\kappa \sqrt{x}) \\ J_0(\kappa \sqrt{l_2}) & Y_0(\kappa \sqrt{l_2}) \end{vmatrix} \eta_1 + \begin{vmatrix} J_0(\kappa \sqrt{l_1}) & Y_0(\kappa \sqrt{l_1}) \\ J_0(\kappa \sqrt{x}) & Y_0(\kappa \sqrt{x}) \end{vmatrix} \eta_2 e^{-i\varepsilon} \right\} e^{i\sigma t} \dots\dots\dots (34)$$

波が  $x=L$  の處より反射する時も前と同じ條件を用ひて

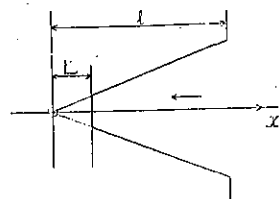
$$\eta = [A_4 H_0^1(\kappa \sqrt{x}) + B_4 H_0^2(\kappa \sqrt{x})] e^{i\sigma t}$$

而て

$$A_4 = \frac{\eta_0}{H_0^1(\kappa \sqrt{l})}$$

$x=L$  の處の條件より  $A_4 H_0^1(\kappa \sqrt{L}) = B_4 H_0^2(\kappa \sqrt{L})$

第十四圖





$$\begin{aligned} \therefore \eta &= \eta_0 \frac{1}{H_0^1(\kappa\sqrt{x})} \left[ H_0^1(\kappa\sqrt{x}) + \frac{H_0^1(\kappa\sqrt{L})}{H_0^2(\kappa\sqrt{L})} H_0^2(\kappa\sqrt{x}) \right] e^{i\sigma t} \\ &= \frac{2\eta_0 H_0^2(\kappa\sqrt{L})}{J_0^2(\kappa\sqrt{L}) + Y_0^2(\kappa\sqrt{L})} \left[ \left\{ J_0(\kappa\sqrt{x}) + \frac{J_0(\kappa\sqrt{L})Y_0(\kappa\sqrt{L})}{J_0^2(\kappa\sqrt{L}) + Y_0^2(\kappa\sqrt{L})} Y_0(\kappa\sqrt{x}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{J_0(\kappa\sqrt{L})Y_0(\kappa\sqrt{L})}{J_0^2(\kappa\sqrt{L}) + Y_0^2(\kappa\sqrt{L})} J_0(\kappa\sqrt{x}) \right] e^{i\sigma t} \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

(5) 幅と深さが共に直線的に變化する場合

一般解は

$$\eta = [A_0 J_1(\kappa\sqrt{x}) + B_0 Y_1(\kappa\sqrt{x})] \frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$$

前と同じ境界條件をひて

$$A_0 = \begin{vmatrix} J_1(\kappa\sqrt{l_1}) & Y_1(\kappa\sqrt{l_1}) \\ J_1(\kappa\sqrt{l_2}) & Y_1(\kappa\sqrt{l_2}) \end{vmatrix}$$

と書けば

$$\eta = \frac{1}{A_0 \sqrt{x}} \left\{ \begin{vmatrix} J_1(\kappa\sqrt{x}) & Y_1(\kappa\sqrt{x}) \\ J_1(\kappa\sqrt{l_2}) & Y_1(\kappa\sqrt{l_2}) \end{vmatrix} \sqrt{l_1} \eta_1 + \begin{vmatrix} J_1(\kappa\sqrt{l_1}) & Y_1(\kappa\sqrt{l_1}) \\ J_1(\kappa\sqrt{x}) & Y_1(\kappa\sqrt{x}) \end{vmatrix} \sqrt{l_2} \eta_2 e^{-i\epsilon} \right\} \dots\dots(36)$$

波が  $x=L$  の處より反射する場合に對しては

$$\eta = [A_0 H_1^1(\kappa\sqrt{x}) + B_1 H_1^2(\kappa\sqrt{x})] \frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$$

前と同様にして

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sqrt{l} \eta_0}{H_1^1(\kappa\sqrt{l})} \left[ H_1^1(\kappa\sqrt{x}) + \frac{H_1^1(\kappa\sqrt{L})}{H_1^2(\kappa\sqrt{L})} H_1^2(\kappa\sqrt{x}) \right] \frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{l} \eta_0 H_1^2(\kappa\sqrt{L})}{J_1^2(\kappa\sqrt{L}) + Y_1^2(\kappa\sqrt{L})} \left[ \left\{ J_1(\kappa\sqrt{x}) + \frac{J_1(\kappa\sqrt{L})Y_1(\kappa\sqrt{L})}{J_1^2(\kappa\sqrt{L}) + Y_1^2(\kappa\sqrt{L})} Y_1(\kappa\sqrt{x}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{J_1(\kappa\sqrt{L})Y_1(\kappa\sqrt{L})}{J_1^2(\kappa\sqrt{L}) + Y_1^2(\kappa\sqrt{L})} J_1(\kappa\sqrt{x}) \right] e^{i\sigma t} \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

之等の場合にも碎波の條件につきては (2) と同様である。

(6) その他の断面變化

第一章 1.6) の如き水深及び幅が拋物線形に變化する場合を考ふ。

$h=cx^m, b=dx^n$  とおき  $m \neq 2$  とすれば一般解は

$$\eta = x^{mq} [A_0 J_q(\lambda x^\mu) + B_0 Y_q(\lambda x^\mu)] e^{i\sigma t}$$

但し  $\lambda = \frac{k}{\sqrt{c^m q}}, \mu = 1 - \frac{m}{2}, q = \frac{1-m-n}{2-m}$

且  $q$  が整数ならざる時は  $Y_q(x)$  の代りに  $J_{-q}(x)$  を用ふる。前と同じ條件を用ひて

$$A_0 = \begin{vmatrix} J_q(\lambda l_1^\mu) & Y_q(\lambda l_1^\mu) \\ J_q(\lambda l_2^\mu) & Y_q(\lambda l_2^\mu) \end{vmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} l_1^{-mq} \eta_1 & Y_q(\lambda l_1^\mu) \\ l_2^{-mq} \eta_2 e^{-i\epsilon} & Y_q(\lambda l_2^\mu) \end{vmatrix}, \quad B_0 = \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} J_q(\lambda l_1^\mu) & l_1^{-mq} \eta_1 \\ J_q(\lambda l_2^\mu) & l_2^{-mq} \eta_2 e^{-i\epsilon} \end{vmatrix}$$

波が  $x=L$  の處より反射する時は

$$\eta = [A_0 H_0^1(\lambda x^{\nu}) + B_0 H_0^2(\lambda x^{\nu})] e^{i\mu t}$$

境界条件より

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1 - \nu \eta_0}{H_0^1(\lambda l^{\nu})} \\ A_0 H_0^1(\lambda L^{\nu}) &= B_0 H_0^2(\lambda L^{\nu}) \end{aligned} \right\}$$

之等より  $A_0, B_0$  を計算する。

$m=2$  の場合も第一章に示せる方法によりて解き得るが此處には省略する。

### 2. 摩擦抵抗を考慮する場合

#### (1) 断面一樣なる水路

一般解の形は第二章 1.(1) の (27), (29) 式と全然同一であるが、この場合は  $k$  が複素数であるから

$$\begin{aligned} \frac{k l_1}{\sqrt{h}} &= \frac{l_1}{\sqrt{h}} (k_1 - i k_2) = \chi_1 l_1 - i \chi_2 l_1 = m \\ \frac{k l_2}{\sqrt{h}} &= \frac{l_2}{\sqrt{h}} (k_1 - i k_2) = \chi_1 l_2 - i \chi_2 l_2 = n \end{aligned}$$

と置けば (27) 式に相當する解は

$$\eta = \frac{e^{i\sigma t}}{\begin{vmatrix} e^{im} & e^{-im} \\ e^{in} & e^{-in} \end{vmatrix}} \left\{ \begin{vmatrix} \eta_1 & e^{-im} \\ \eta_2 e^{-i\varepsilon} & e^{-in} \end{vmatrix} e^{\frac{mx}{l_1}} + \begin{vmatrix} e^{im} & \eta_1 \\ e^{in} & \eta_2 e^{-i\varepsilon} \end{vmatrix} e^{-\frac{mx}{l_1}} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

(29) 式に相當する解は

$$\eta = \eta_0 e^{(X_2 + iX_1)x} [e^{(X_2 + iX_1)x} + e^{-(X_2 + iX_1)x}] e^{i\sigma t} \dots \dots \dots (39)$$

従つて定常波とはならない。

#### (2) 水路断面が變化する場合

何れも本章 1. の (2), (3), (4), (5) 及び (6) に示せる解の中にて  $k, \alpha, \kappa$  等を複素数の形とせるものであり、その方法は第一章 2. の例より容易に知り得るから茲には總て省略する。何れにしても之等の解は甚しく煩雜なる爲に摩擦抵抗の影響が著しく大ならざる限り實際上用ひ難いものであるが、一樣水路又は幅の exponential type のものに於ては計算が比較的簡單であるから、その結果より他の場合に於ける摩擦抵抗の影響を推察し得る。

潮波が顯著なる潮流状態を呈した場合は摩擦抵抗は無視し得ないが、かゝる場合は他の近似的解法に據る必要がある。

### 3. 數値計算例

#### (1) 幅が exponential に變化する場合

$$T=2\text{秒}, h=30\text{ cm}, L=80\text{ cm}$$

として波が  $x=L$  の處にて反射したる合成波の振幅變化の割合を、摩擦抵抗なきものとして計算した。波の形は

$$\eta = \eta_0 e^{\left(\frac{\alpha}{2} - im_2 x\right)} [e^{-\frac{\alpha}{2} x + im_2 x} + e^{-\frac{\alpha}{2} x + im_2 (2L-x)}] e^{i\sigma t}$$

であるか大ききの比較をなすには

$$e^{-\frac{\alpha}{2} x} [e^{im_2 x} + e^{im_2 (2L-x)}]$$

の絶對値を計算すればよい。即ち

$$y = 4e^{-\frac{\alpha}{2}x} \cos^2 m_2(x-L), \quad m_2 = \sqrt{\frac{k^2}{h} - \frac{\alpha^2}{4}}$$

を計算した。第十五圖の (a) は  $\alpha=0.01$  の場合、(b) は  $\alpha=0.03$  の場合の  $y$  の値を示す。

(2) 幅のみが直線的に變化する場合

$$y = J_0(\alpha x) + \frac{J_0(\alpha L)Y_0(\alpha L)}{J_0^2(\alpha L) + Y_0^2(\alpha L)} Y_0(\alpha x) + i \frac{J_0(\alpha L)Y_0(\alpha L)}{J_0^2(\alpha L) + Y_0^2(\alpha L)} J_0(\alpha x)$$

と置けば振幅は  $|y|$  の大きさによって比較される。第十六圖にはこの  $|y|$  の値を (1) と同じ數値を用ひて計算せる結果を示す。

之等の計算より見れば  $x=L$  にて反射せる合成波は完全な定常波とはならないが、而もその振幅變化の割合も一樣ではない。(30), (32) 式も同様である。

摩擦抵抗の影響に関しては第一章と同様であるから省略した。又之等の計算結果に相似律を適用し得ることも前章と同じである。

### 第三章 種々の形の灣に於けるセイシュ

津浪の如きものは實際は孤立波 (solitary wave) と見做さるべきものであつて、之が灣の如き地形に進入して反射し、再び外洋に傳播し去れる後は、灣内の水はその灣の固有振動の週期を以てセイシュ (seiche) の運動をなすものである。而て之に對する解法は外洋の振動は灣口附近にて既に鎮まれるものとし、灣内にては灣口を節とする振動をなすと考へ得る。尙この場合は摩擦抵抗はむしろ振幅の時間的減衰に影響するものであるが茲に計算するものは自己振動の週期のみであるから之を無視する。

#### 1. セイシュの週期

##### (1) 一樣幅の灣

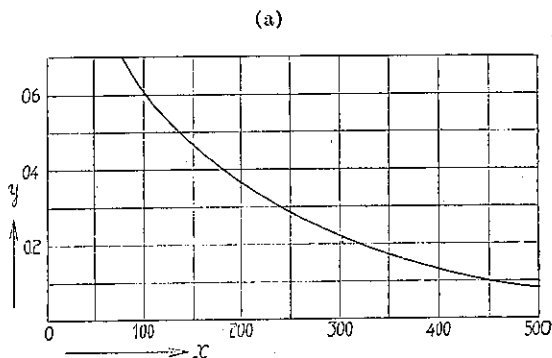
定常波の一般解は

$$\eta = \left( A_1 \sin \frac{k}{\sqrt{h}}x + B_1 \cos \frac{k}{\sqrt{h}}x \right) \sin \sigma t$$

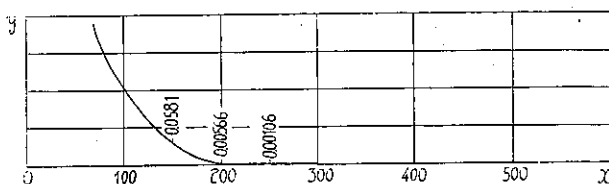
境界條件は  $x=0$  (灣口) にて  $\eta=0$

$$\therefore B_1=0$$

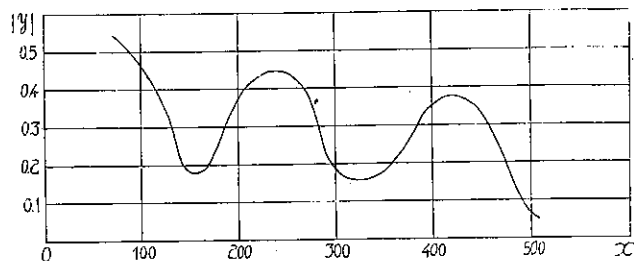
第十五圖



(b)



第十六圖



灣奥  $x=l$  には振動の腹となるのであるから

$$\sqrt{\frac{k}{h}}l = \frac{\sigma l}{\sqrt{gh}} = (1+2N)\frac{\pi}{2}, \quad N=0, 1, 2, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= (1+2N)\frac{\sqrt{gh}}{2l}\pi \\ T &= \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{4l}{\sqrt{gh}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

主要振動の週期は

(2) 幅が exponential に變化する灣

振動の一般解は

$$\eta = e^{-\frac{\alpha}{2}x} (A_2 \sin m_2 x + B_2 \cos m_2 x) \sin \sigma t$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{k^2}{h} - \frac{\alpha^2}{4}}$$

境界條件は

灣口  $x=l$  にて  $\eta=0 \quad \therefore A_2 \sin m_2 l + B_2 \cos m_2 l = 0$

灣奥  $x=L$  にて  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \therefore -\frac{\alpha}{2}(A_2 \sin m_2 L + B_2 \cos m_2 L) + m_2(A_2 \cos m_2 L - B_2 \sin m_2 L) = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} \sin m_2 l & \cos m_2 l \\ -\frac{\alpha}{2} \sin m_2 L + m_2 \cos m_2 L & -\frac{\alpha}{2} \sin m_2 L - m_2 \sin m_2 L \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m_2 = -\frac{\alpha}{2} \tan m_2 (l-L) \dots \dots \dots (41)$$

(41) 式を圖式解法にて解き  $m_2^2$  を求めれば

$$\frac{\sigma^2}{gh} - \frac{\alpha^2}{4} = m_2^2 \quad \therefore \sigma^2 = gh \left( m_2^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sqrt{gh \left( m_2^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right)}} \dots \dots \dots (42)$$

$m_2=0$  は (41) 式の一つの根である。故に之に對しては

$$T_0 = \frac{4\pi}{\alpha\sqrt{gh}} \dots \dots \dots (42)'$$

$T_0$  の週期のセイシュにては水面は波狀を呈することがない。

(3) 水深一樣にて幅が直線的に變化する場合

水面の振動は次の如く表はされる。

$$\eta = \left\{ A_3 J_0(\chi x) + B_3 Y_0(\chi x) \right\} \sin \sigma t, \quad \chi = \frac{k}{\sqrt{h}}$$

境界條件は (2) と同様であるから

$$\begin{aligned} A_3 J_0(\chi l) + B_3 Y_0(\chi l) &= 0 \\ A_3 J_1(\chi L) + B_3 Y_1(\chi L) &= 0 \end{aligned}$$

之より  $A_3, B_3$  を消去すれば

$$J_0(\chi l)Y_1(\chi L) - J_1(\chi L)Y_0(\chi l) = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

(43) 式より求めたる  $\chi$  即ち  $k$  の値を  $T = 2\pi/(k\sqrt{g})$  に代入して  $T$  を計算する。

(4) 幅が一様にて水深が直線的に變化する場合

定常波の一般解は

$$\eta = \left\{ A_4 J_0(\kappa\sqrt{x}) + B_4 Y_0(\kappa\sqrt{x}) \right\} \sin \sigma t$$

但し  $\kappa = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{h_0g}}, \quad \therefore T = \frac{4\pi}{\kappa}\sqrt{\frac{a}{h_0g}} \quad \dots\dots\dots (44)$

前と同じ境界条件により

$$A_4 J_0(\kappa\sqrt{l}) + B_4 Y_0(\kappa\sqrt{l}) = 0$$

$$A_4 J_1(\kappa\sqrt{L}) + B_4 Y_1(\kappa\sqrt{L}) = 0$$

$$\therefore J_0(\kappa\sqrt{l})Y_1(\kappa\sqrt{L}) - J_1(\kappa\sqrt{L})Y_0(\kappa\sqrt{l}) = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

(45) より計算した  $\kappa$  を (44) 式に代入して固有振動週期  $T$  を求める。

(5) 幅と深さが共に直線的に變化する波

定常波の一般解は

$$\eta = \left\{ A_5 J_1(\kappa\sqrt{x}) + B_5 Y_1(\kappa\sqrt{x}) \right\} \frac{\sin \sigma t}{\sqrt{x}}$$

同じ境界条件により

$$A_5 J_1(\kappa\sqrt{l}) + B_5 Y_1(\kappa\sqrt{l}) = 0$$

$$-\frac{1}{2L} \left\{ A_5 J_1(\kappa\sqrt{L}) + B_5 Y_1(\kappa\sqrt{L}) \right\} + \frac{\kappa}{2L} \left[ A_5 \left\{ \frac{1}{\kappa\sqrt{L}} J_1(\kappa\sqrt{L}) - J_2(\kappa\sqrt{L}) \right\} \right.$$

$$\left. + B_5 \left\{ \frac{1}{\kappa\sqrt{L}} Y_1(\kappa\sqrt{L}) - Y_2(\kappa\sqrt{L}) \right\} \right] = 0$$

$$\therefore J_1(\kappa\sqrt{l})Y_2(\kappa\sqrt{L}) - J_2(\kappa\sqrt{L})Y_1(\kappa\sqrt{l}) = 0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

(46) 式より求めたる  $\kappa$  と (44) 式より  $T$  を決定する。之は次に示す (6) の中にて  $p = \frac{1}{2}, q = -1$  の場合に相當するものである。

(6) 幅及び水深が拋物線形に變化する場合

振動の一般解は (18) 式により  $m \neq 2$  の時は

$$\eta = x^{mq} [A_6 J_q(\lambda x^p) + B_6 Y_q(\lambda x^p)] e^{i\sigma t}, \quad \lambda = \frac{k}{\sqrt{cp}}$$

但し  $q$  が整数にあらざる時は  $Y_q(x)$  の代わりに  $J_{-q}(x)$  を用ふる。前と同じ境界条件により

$$A_6 J_q(\lambda l^p) + B_6 Y_q(\lambda l^p) = 0$$

$$p q L^{(mq-1)} [A_6 J_q(\lambda L^p) + B_6 Y_q(\lambda L^p)] + L^{mq+p-1} p \lambda \left[ A_6 \left\{ -\frac{q}{\lambda L^p} J_q(\lambda L^p) + J_{q-1}(\lambda L^p) \right\} \right.$$

$$\left. + B_6 \left\{ -\frac{q}{\lambda L^p} Y_q(\lambda L^p) + Y_{q-1}(\lambda L^p) \right\} \right] = 0$$

従つて

$$J_n(\lambda l^p) Y_{q-1}(\lambda L^p) - J_{q-1}(\lambda L^p) Y_q(\lambda l^p) = 0 \dots\dots\dots (47)$$

之より  $\lambda$  を決定すれば

$$T = \frac{2\pi}{k\sqrt{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{cg}\lambda p}$$

によりて  $T$  を計算し得る。

$m=2$  の時は

$$n = x^{2m} \{ A_0 \cos(p_2 \ln x) + B_0 \sin(p_2 \ln x) \} \cos \sigma t$$

之に上と同じ境界条件を用ひて  $p_1, p_2$  を決定し

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1 + ip_2 \\ p(p-1) + p(n+2) + \frac{k^2}{c} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

に代入して  $k$  従つて  $T$  を決定する。

2. 數値計算例

$l-L=80$  cm,  $h=h_0=30$  cm として各の場合のセイシュの主要振動週期を計算する。

(1) 一樣断面

$$T = \frac{4 \times 80}{\sqrt{980 \times 30}} = 1.866 \text{ sec.}$$

(2) 幅が exponential に變化する灣

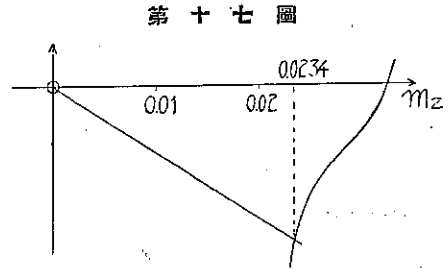
$\alpha = 0.015$  とすれば

$$T_0 = 4\pi / (\alpha \sqrt{gh}) = 2.885 \text{ sec.}$$

第十七圖より最小の  $m_2$  を求めれば

$$m_2 = 0.0234$$

$$\therefore T = 1.489 \text{ sec.}$$



第十七圖

(3) 水深一樣、幅が直線的に變化する灣

$l=100$  cm,  $L=20$  cm として第十八圖より  $\kappa$  を求める。

$$\kappa = 0.029$$

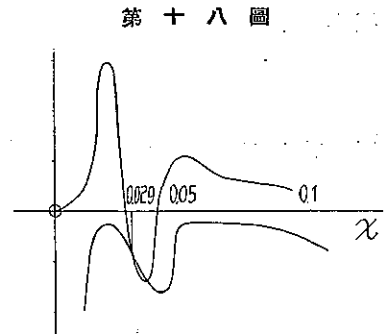
$$\therefore T = 1.261 \text{ sec.}$$

(4) 幅一樣、水深が直線的に變化する灣

$\alpha=l=100$  cm,  $L=20$  cm とすれば第十九圖より  $\kappa$  の最小値は

$$\kappa = 0.34$$

$$\therefore T = \frac{4\pi}{\kappa} \sqrt{\frac{\alpha}{h_0 g}} = 2.155 \text{ sec.}$$

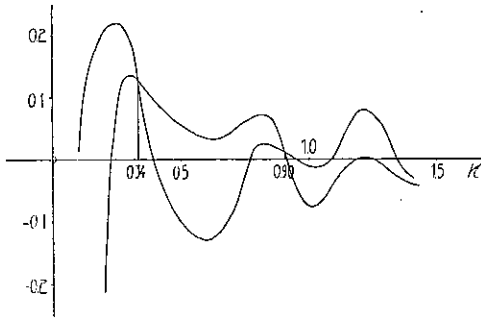


第十八圖

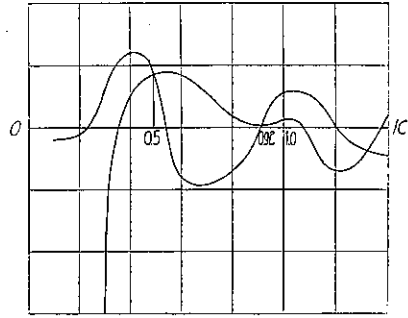
(5) 幅、水深共に直線的に變化する灣

前と同じ數値を用ひれば第二十圖より

第十九圖



第二十圖



$n$  の最小値は 0.50 である。

$$\therefore T = 1.465 \text{ sec.}$$

之等の計算に於ても第一章に述べたる相似律は同様に適用される。例へば(5)の例にてこの寸法を鉛直に 100 倍、水平に 5000 倍せる如き形の灣のセイシユの週期は

$$T = 1.465 \times \frac{5000}{\sqrt{100}} = 732.5 \text{ sec} \\ = 12.208 \text{ min.}$$

第一章 4. に於て岩手縣綾里灣の例を示したが、かゝる地形の自由振動週期を計算すれば、

$$\lambda = 1.16$$

$$\therefore T = 531 \text{ 秒} = 8.9 \text{ 分}$$

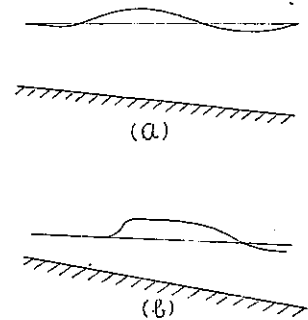
附 言

潮汐或は津浪の問題は之等の諸計算のみを以てしては未だ解決し得るものではない。波高以外にて次に問題となるものは何れの場合にも水分子の水平速度である。潮流の問題は場所により一々その趣を異にするのであるが、一つの潮流が海峡を通過する爲に生ずるものならば潮流の最大流速は波高の最大の附近にて起るものであるから、この附近にて定流と考へて近似解を求めることによつて大體を察し得るから、その點より論を進めるのが至當であらう。

津浪の問題に至つてはその解決は更に困難であるが、波が陸岸に近付けば長波の性質を失ふと共に第二十一圖(b)の如き形態となることは一般に考へられる處である。この状態は水深が浅ければ川津浪<sup>1)</sup>の波形に類似するもので、後者の法則がほぼ適用されるものと考へられ、又地形による波高の變化に關してはかゝる波形に對しても尙本論文中の諸法則が近似的に満たされるにあらずやと考へる。勿論之等に關しては更に慎重なる考究が進められねばならないが、以上詳述せし處は之等の今後に残された諸問題に對して基本的考察をなすものと考へて茲に發表することとした。

本文を纏めるに當つて内務省土木試験所長物部博士の御助言を戴いた。

第二十一圖



1) 物部博士「水理学」331 頁