

参 考 資 料

第十九卷第九號 昭和八年九月

コンクリート或は石材の鉸の解法

(A. Freudenthal, Beitrag zur Berechnung von Wälzgelenken aus Beton und Stein, B. u. E. 1933, Heft 9, S. 139-144; Heft 10, S. 157-162.)

譯者序 支承、鉸のやうな構造物の部分に於て、2個の弾性物體が接觸し、之に依つて一方の物體から他方の物體に壓力が傳はる場合の該接觸面の廣さ、變形、或は其の應力の分布に關する問題は、既に有名な Hertz の理論で解決されて居る。然しコンクリートや石材のやうな脆性材料の鉸に起る最初の破壊現象は、其の接觸面の破壊でなく、鉸の内部に生ずる縦の龜裂である。それで此のやうな材料の鉸では横方向の張應力或は引張歪が問題となるのであるが、之に關しては既に Krüger⁽¹⁾、Mörsch⁽²⁾、Krebitz⁽³⁾ 等が公式或は理論を發表して居る。Krüger の公式 $T = 0.28 P$ (T は横方向の全張力、 P は鉸の軸方向の壓力) は單に彼の實驗結果に基づくものであり、また Mörsch の公式 $T = P(a - 2b)/4d$ (第一圖参照) も甚だ任意的の假定から出發したものであつて、共に縦の龜裂の引裂破壊を最大張應力に依つて起るものとし、且つ張應力の分布を拋物線狀と假定して居る。之に反し Krebitz は、縦の龜裂が張應力に依つて起るのではなく、引張歪に依つて起るものと考え、一般弾性理論から出發して鉸の安全度を判斷する公式を誘導した。Krebitz の理論に於ては、Krüger 或は Mörsch のやうに不確實な抗張強度を基準とせず、抗壓強度を基準とするものであつて、實用上可成り信頼し得るものと思はれるが、最初一般の弾性理論から出發したに拘はらず、最後の結果に到達する途中に於て、多數の任意的な假定をしたので、聊か龍頭蛇尾の觀がある。

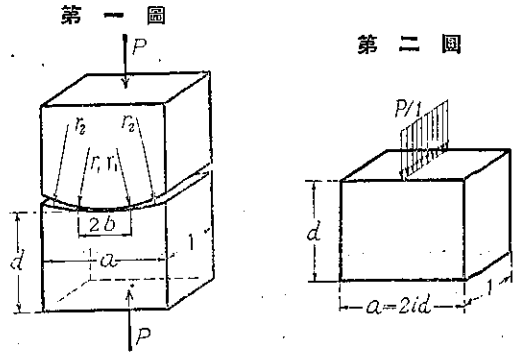
此の問題を成る可く嚴密に解かうとしたのは、茲に抄譯せんとする Freudenthal である。勿論彼の解法も一つの近似解法に過ぎないが、鉸の内部の應力状態に關する限り、前3者よりは遙かに嚴密に近いものである。然し Freudenthal が彼の論文の後半に於て鉸の破壊に就て論じて居ることは、甚だ譯者の意に滿たない所である。即ち彼が、脆性材料では一般に最大剪應力に依つて滑りに依る破壊が起り、最大張應力に依つて引裂破壊が起ると考へて、鉸には一般に引裂破壊が先に起ることを證明したのはよいが、此の引裂破壊に Krüger 或は Mörsch 同様に最大張應力説を採用したのは納得出来ない。Krüger の説明して居る様に、最大張應力説に従ふよりも、最大歪説に従ふ方が此の場合妥當と考へられるからである。鉸の寸法の普通の割合の範圍では、Krüger 或は Mörsch の公式も、張應力の最大値に關する限り、Freudenthal の理論的近似解に大體一致した結果を與へるから、最大張應力説によつて鉸を取扱ふ場合には、Freudenthal の面倒な式に依るより、Krüger 或は Mörsch の公式に依る方が早道であり、且つそれで充分である。尙、故意か偶然か Freudenthal は Krebitz の解法に對して一言も言及して居ない。以下の抄譯中の算式の記號或は式の形は Freudenthal の原式と些少異なる所がある。それは原文の式が徒に複雑な形で書かれ、且つ座標の採り方が不統一であるので、之等を簡單に且つ判り易く書き換へた爲である。

第一圖の場合を取扱ふ。問題をすべて平面應力状態の問題とする。解法の第一段として、先づ第二圖の解を求め。即ち壓力 P が接觸面 $2b$ に分布せず、第二圖の様に線荷重(集中荷重)として作用するものとする。之

(1) Deutsche Bauzeitung 1906, S. 262; (2) B. u. E. 1924, Heft 12, S. 156; (3) B. u. E. 1926, Heft 5, S. 89.

は荷重作用点から充分に遠い所の応力状態が、荷重分布の有様に無関係であると言ふ、Saint Venant の假説に従つたものである。従つて鉸の接觸面附近の応力状態は之を別に考慮しなければならない。

扱て第二圖の場合の解の第一段として、幅が $2d$ である無限の帶狀平板の兩側に集中壓力 P が作用する場合の應力を求める(第三圖)。之は既に Filon, Timpe, Seewald, E. Melan, Bleich 等に依つて求められて居るが、之等の嚴密解は非常に複雑であるので、茲では Pigeaud の近似解を採用する。之に依れば

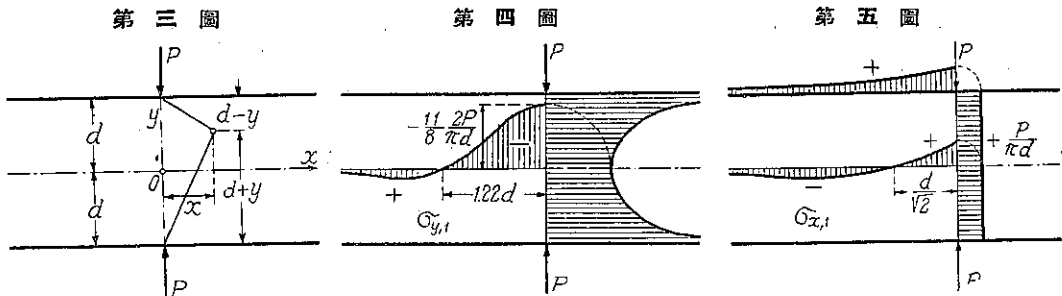


$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,1} &= -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{x^2(d-y)}{\{x^2+(d-y)^2\}^2} + \frac{x^2(d+y)}{\{x^2+(d+y)^2\}^2} - \frac{2d}{x^2+4d^2} \right], \\ \sigma_{y,1} &= -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{(d-y)^3}{\{x^2+(d-y)^2\}^2} + \frac{(d+y)^3}{\{y^2+(d+y)^2\}^2} - \frac{8d^3}{(a^2+4d^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2d(d^2-y^2)(4d^2-3y^2)}{(x^2+4d^2)^3} \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{x(d-y)^2}{\{x^2+(d-y)^2\}^2} - \frac{x(d+y)^2}{\{x^2+(d+y)^2\}^2} + \frac{4dxy}{(x^2+4d^2)^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

であつて、張應力を正、壓應力を負とする。之は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{及び} \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

の條件を満足するが、 $\Delta \Delta F = 0$ を満足しない。



(1) 式の $\sigma_{x,1}$ 及び $\sigma_{y,1}$ の分布は第四圖及び第五圖の如くであつて、剪應力 τ_{xy} は $x=0$ の垂直断面、及び $y=0, y=t, y=-t$ の水平断面に於て零である。特に對稱断面 $x=0$ では

$$\sigma_{x,1} = +\frac{P}{\pi d^2} \quad \sigma_{y,1} = -\frac{P}{\pi d} \cdot \frac{11d^4 + 6d^2y^2 - y^4}{4t^2(t^2 - y^2)}, \quad \tau_{xy} = 0 \dots (2)$$

となり、 $\sigma_{x,1}$ は張應力、 $\sigma_{y,1}$ は壓應力である。第四圖及び第五圖に示す様に、荷重作用点から充分に遠い所では $\sigma_{x,1}, \sigma_{y,1}$ が共に殆んど零に近いから、鉸の幅 a が d に比べて充分に大であれば、(1) 式を第二圖の場合の近似解と見ることが出来るが、普通のやうに a と d とが略々等しい様な場合には、次のやうに補正しなければならない。

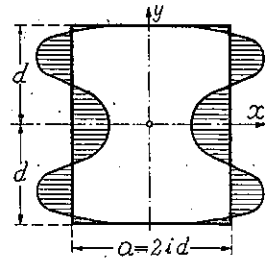
即ち $x = \pm a/2$ の垂直断面に作用する垂直應力は、(1) 式より

$$\sigma_{x,1} = \frac{4P}{\pi l} \left[\frac{1}{4+i^2} + i^2 d^4 \frac{3y^2 - 2(1-i^2)d^2y^2 - (1+i^2)d^4}{\{y^4 - 2(1-i^2)d^2y^2 + (1+i^2)d^4\}^2} \right] \dots \dots (3)$$

となる。但し i は a と $2d$ との比、即ち $a=2id$ である。此の $\sigma_{x,1}$ の分布は第六圖のやうになる。

然るに實際に於ては $x=\pm a/2$ に於ては $\sigma_x=0$ でなければならぬから、此の條件を満足するためには、第六圖に示すやうに、 $x=\pm a/2$ の面上上記の $\sigma_{x,1}$ と反對の荷重を作用せしめればよい。勿論 $x=\pm a/2$ で (1) 式の τ_x は零にはならないが、其の値が極めて小であるので之を無視する。

第六圖



即ち第二圖の解を得るためには、第三圖の解 (1) に第六圖の解を加へ合せればよい。之は $a \times 2d$ の矩形平板を

$$x = \pm a/2 = \pm id: \quad \sigma_x = -\sigma_{x,1} (3), \quad \sigma_y = \tau = 0;$$

$$y = \pm d: \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau = 0$$

の邊緣條件を満足する様に解けばよい。然し此の問題を嚴密に解くのは至難の業であつて、且つ (1) に於て既に近似解を採用したのであるから、茲では Ritz の方法に従つて、Airy の應力函数に上記の邊緣條件を満足する任意の函数:

$$F = \frac{2P}{\pi} \left[2id \left(\operatorname{arccot} \frac{y-d}{id} - \operatorname{arccot} \frac{y+d}{id} \right) - \frac{y^2}{(4+i^2)d} \right] + \alpha \cdot (x^2 - i^2 d^2)(y^2 - d^2) \dots \dots (4)$$

を假定し、之に依つて生ずる弾性變形を最小にするやうに任意の係數 α を決定すると、第六圖の近似解として

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,2} &= \frac{2P}{\pi} \left[\frac{i^2 d^2 (d+y)}{\{i^2 d^2 + (d+y)^2\}^2} + \frac{i^2 d^2 (d-y)}{\{i^2 d^2 + (d-y)^2\}^2} - \frac{2}{(4+i^2)d} \right] \\ &\quad - 4\alpha \cdot (i^2 d^2 - x^2)(d^2 - 3y^2), \\ \sigma_{y,2} &= -4\alpha \cdot (i^2 d^2 - 3x^2)(d^2 - y^2)^2, \quad \tau_x = 16\alpha \cdot xy(i^2 d^2 - x^2)(d^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

を得る。但し α は

$$\alpha = \frac{105}{64\pi} \cdot \frac{P}{d^7} \cdot \frac{\frac{3}{4} i^2 \ln \left(1 + \frac{4}{i^2} \right) - \frac{3}{2} i \operatorname{arccot} \frac{2}{i} + \frac{2}{4+i^2}}{1 + \frac{4}{7} i^2 + i^4} \dots \dots (6)$$

より決定されるもので、其の値は次の如くである。

$i =$	1/3	1/2	1.0	2.0	4.0
$\alpha =$	$+0.0413 \frac{P}{d^7}$	$+0.0032 \frac{P}{d^7}$	$-0.010 \frac{P}{d^7}$	$-0.009 \frac{P}{d^7}$	$-0.00020 \frac{P}{d^7}$

上記 (5) の應力を (1) の應力に加へ合せれば、第二圖の場合の近似解として

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{x^2(d-y)}{\{x^2 + (d-y)^2\}^2} + \frac{x^2(d+y)}{\{x^2 + (d+y)^2\}^2} - \frac{2d}{x^2 + 4d^2} - \frac{i^2 d^2 (d-y)}{\{i^2 d^2 + (d-y)^2\}^2} \right] \\ &\quad - \frac{i^2 d^2 (d+y)}{\{i^2 d^2 + (d+y)^2\}^2} + \frac{2}{(4+i^2)d} - 4\alpha \cdot (i^2 d^2 - x^2)(d^2 - 3y^2), \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{(d-y)^2}{\{x^2 + (d-y)^2\}^2} + \frac{(d+y)^2}{\{x^2 + (d+y)^2\}^2} - \frac{8d^3}{(x^2 + 4d^2)^2} \right] \\ &\quad - \frac{2i(4d^3 - 3x^2)(d^2 - y^2)}{(x^2 + 4d^2)^3} - 4\alpha \cdot (i^2 d^2 - 3x^2)(d^2 - y^2)^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

$$\tau = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{x(d-y)^2}{\{x^2+(d-y)^2\}^2} - \frac{x(d+y)^2}{\{x^2+(d+y)^2\}^2} + \frac{4dxy}{\{(x^2+4d^2)^2\}} \right] + 16\alpha \cdot xy(i^2d^2 - x^2)(d^2 - y^2)$$

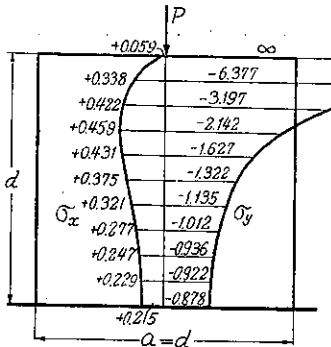
を得、特に對稱断面 $x=0$ に於ては

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= +\frac{2P}{\pi} \left[\frac{i^2}{2(4+i^2)} + \frac{i^2d^2(d+y)}{\{i^2d^2+(d+y)^2\}^2} + \frac{i^2d^2(d-y)}{\{i^2d^2+(d-y)^2\}^2} \right] - 4\alpha \cdot i^4d^2(d^2 - 3y^2)^2, \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{3d^2+y^2}{2i(d^2-y^2)} - \frac{d^2-y^2}{8d^3} \right] - 4\alpha \cdot i^2d^2(d^2 - y^2)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

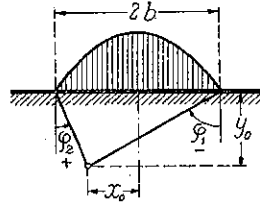
となる。此の式より對稱断面 $x=0$ に於ける σ_x 及び σ_y を、 $\alpha=d$ 、即ち $i=1/2$ として計算した結果は第七圖であつて、圖中の數字にはすべて P/d を乗すべきものである。

上記の結果は、すべて第二圖のやうに集中荷重に對するものであるが、鉸の接觸面附近で上記の式が當てはま

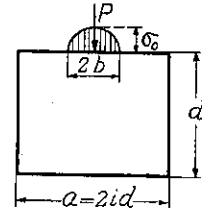
第七圖



第八圖



第九圖



らないのは當然である。それで接觸面に於ける荷重分布の影響を求めするために、Hertz の理論から求められる $2b$ の幅に荷重 P が分布するものとする。Hertz の理論に依れば、荷重は橢圓狀に分布するのであるが、茲では式を簡単にするために、第八圖のやうに、 P が拋物線狀に分布し、且つ鉸が半無限空間に互るものと假定する。即ち斯く考へれば、此の分布荷重に依つて生ずる應力として

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,3} &= -\frac{5P}{4\pi b^3} \left[\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(b^2 - x_0^2 + 3y_0^2) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)(b^2 - x_0^2 + y_0^2) \right. \\ &\quad \left. - (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1)y_0^2 + \frac{1}{2}(\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1)x_0y_0 \right], \\ \sigma_{y,3} &= -\frac{5P}{4\pi b^3} \left[\frac{1}{4}(b^2 - x_0^2 - y_0^2)(2\varphi_2 - 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1)x_0y_0 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

を得る。

扱て (7) 式を見れば、其の σ_x 及び σ_y の第一項、即ち

$$-\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2(d-y)}{\{x^2+(d-y)^2\}^2} \quad -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{(d-y)^2}{\{x^2+(d-y)^2\}^2}$$

は、夫々半平面に集中荷重が作用する場合の應力に他ならないから、(7) の σ_x 及び σ_y の第一項を (9) の $\sigma_{x,3}$ 及

び $\sigma_{y,3}$ で置き換へれば、第九圖の場合の解として、最も眞に近い近似解が得られる。特に鉸の對稱斷面 $x=0$ に作用する横方向の張應力は

$$x=x_0=0, \quad \varphi_2=-\varphi_1=\varphi, \quad \cot \varphi=y_0/b$$

となることに依つて

$$\sigma_x = \frac{5P}{4\pi b} \left[-\varphi(1+3\cot^2\varphi) + 3\cot\varphi \right] + \frac{2Pi^2}{\pi} \left[\frac{1}{2(4+i^2)d} + \frac{d^2(d-y)}{\{i^2d^2+(d-y)^2\}^2} + \frac{d^2(d+y)}{\{i^2d^2+(d+y)^2\}^2} \right] - 4\alpha \cdot i^4 \cdot i^3(d^2-3y^2) \quad (10)$$

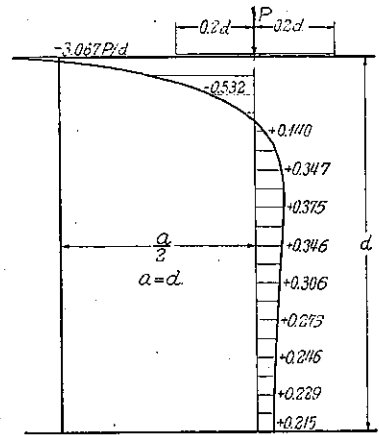
となる。(4) 今此の σ_x の分布を知るために、 $a=d(i=0.5)$ 、 $b=0.2a$ として計算した結果は第十圖(5)であつて、接觸面附近には壓應力が生じ、其の下方に生ずる張應力の値が甚だ小であることがわかる。また之から見ても Krüger 或は Mörsch のやうに張應力の分布を拋物線と考へ得られないことがわかる。然し普通の場合、即ち $a \equiv d$ 、 $b=(0\sim 0.2)a$ の範圍では、横方向の張應力の最大値は

$$\sigma_{x, \max} = (0.2\sim 0.4) \frac{P}{d}$$

であつて、横方向の張應力の最大値に関する限り、Krüger 或は Mörsch の公式も著しく間違つた結果を與へない。

(福田武雄抄譯)

第十圖

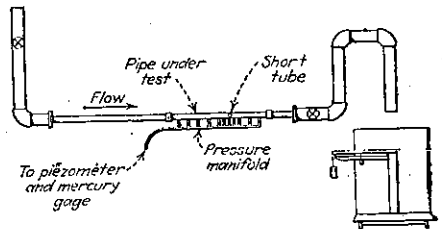


短管中に於ける損失水頭の實驗

(Hydraulic Losses in Short Tubes Determined by Experiments by John A. Oakey. "Eng. News-Record" June 1, 1933. page 717~718)

Wisconsin 大學の水利實驗所では、パイプの側部に取り付けた短管中の損失水頭に就て研究資料を發表した。其の實驗裝置は第一圖に示す如くである。全長 5 呎で兩側に鐵管のついて居る眞鍮のパイプが此の實驗に用ひられた。何の短管も長さは短い所で直徑の 3 倍あり、上流端から 3 呎のところまでパイプに取りつけられてゐる。その口は鋭端 (sharp edge) である。何れの場合でも試験に用ひたパイプには之と内徑の等しい鐵管が 1 組前後部に付けられた。其の中上流側の鐵管は、制水弁の起す渦流から生ずる誤謬を取り除く爲のものである。

第一圖



(4) 之に對し Freudenthal が與へた原文の (21) 式は 3 ケ所に於て間違つて居る。即ち Freudenthal の式では $\varphi=0$ 、即ち 無限遠點に於て σ_x が無限大になり、また (10) 式の第三項は其の第二項と獨立して居るものであるが、Freudenthal の式では此の第三項が第二項の括弧の中に入つて居る。
 (5) 之は譯者が (10) 式から計算したものである。