

論 說 報 告

第十九卷第八號 昭和八年八月

切口の漸變する桁板の Kipperscheinung の解に就て

准員 工學士 遠 藤 徹 治

On Stability of Bend and Twisted Beam with Variable Cross Sections.

By Syozi Endo, C. E., Assoc. Member.

内 容 梗 概

本文は切口の漸變する桁板の Kipperscheinung の解に對する著者の研究の report であつて、著者が東京帝國大學土木科大學院在學中、指導教授田中博士の御指導のもとになしたるものである。

1. 緒 言

Kipperscheinung の研究は 1899 年獨の L. Prandtl 氏並に英國に於ては A. G. M. Michell 氏が殆んど時を同うして初めて發表せられたるものであつて、其後に至りては、J. Prescott 氏、Föppl 氏等の貴重なる研究がある。又 Prof. Timoschenko は工字型桁に對する實用上極めて有益なる研究がある。

以上の如く諸大家の研究があるのであるが、變斷面を有する桁板の場合は column に於る場合と異りて、殆ど取扱れて居らず、僅に Case 氏著の Strength of Material の中に二三の場合に於ける解を見出し得る程度と思はれる。我が國に於てもこの問題に對する研究はすくないのであるが、變斷面を有する桁板に Constant Bending Moment を apply せる場合の該問題に對する有益なる研究のあるとの御教示を受けた。

著者、もとより淺學菲才にして本文の杜撰極りなきことをよく知るものであるが、讀者諸賢の御叱正と御高教を賜りて更に其正鵠を期し得るなれば、幸甚の至りである。

文末ながら、本文を稿するにあたり御懇切なる御指導を賜つた田中先生、物部先生に對して、厚く感謝の意を表するものである。

2. 基 本 式

今自由端に W なる荷重を加載せられたる突桁を取り W が critical に達せる時に桁板は第一圖の如く Kipperscheinung が生ずる。然る時には

$$z = u \sin \theta - v \cos \theta$$

$$y = u \cos \theta + v \sin \theta$$

θ は Torsionswinkel にして、 θ が小なれば、

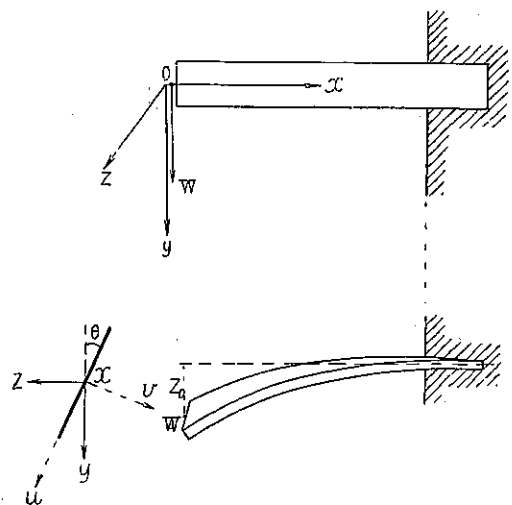
$$\left. \begin{aligned} z &= u\theta - v \\ y &= u + v\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

板桁に對する moment of inertia

$$I_1 = \text{moment of inertia about } u \text{ axis}$$

$$I_2 = \text{moment of inertia about } v \text{ axis}$$

第 一 圖



E = 桁板の modulus of elasticity

$$I_2 \gg I_1$$

$$\left. \begin{aligned} EI_2 \frac{d^2 u}{dx^2} &= Wx \cos \theta \doteq Wx \\ EI_1 \frac{d^2 v}{dx^2} &= Wx \sin \theta \doteq Wx\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(1)式より

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \theta - \frac{d^2 v}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{d\theta}{dx} + u \frac{d^2 \theta}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} \theta + 2 \frac{dv}{dx} \frac{d\theta}{dx} + v \frac{d^2 \theta}{dx^2}$$

軸心に於ける curve を知ればよい故に N. A. に於ては

$$\frac{du}{dx} = 0, \frac{dv}{dx} = 0, u = 0, v = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{d^2 u}{dx^2} \theta - \frac{d^2 v}{dx^2} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

(2)式と(3)式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= -\frac{W}{E} \frac{I_2 - I_1}{I_2 I_1} x \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{W}{E} \left(\frac{1}{I_2} + \frac{\theta^2}{I_1} \right) x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

これが桁板の equation of elastic line になる。但し (4) 式の第二式はこれを neglect する。然るに torsional moment m_t に對して次ぎの関係あり、即ち

$$cK \frac{d\theta}{dx} = -m_t$$

こゝに

c = 桁板の剛性率

K = 桁板の捩力に對する Drillungswiderstand

virtual deflection z 極めて微量なれば第二圖より

$$m_t = W \left(z - x \frac{dz}{dx} \right)$$

$$\therefore cK = W \left(x \frac{dz}{dx} - z \right)$$

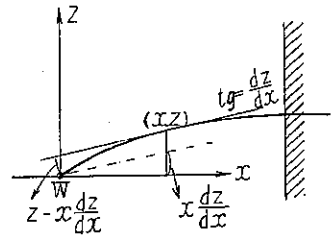
$\frac{I_2 - I_1}{I_2 I_1} \doteq \frac{1}{I_1}$ とせば (4) 式の第一式は次ぎの如くなる

$$EI_1 \frac{d^2 z}{dx^2} = -Wx\theta$$

今 I_1, K を x の variable とし夫々 I_x, K_x を以て表せば

$$\left. \begin{aligned} cK_x &= W \left(x \frac{dz}{dx} - z \right) \\ EI_x \frac{d^2 z}{dx^2} &= -Wx\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

第 二 圖



兩式より z を eliminate すれば

$$EI_x \left(c \frac{dK_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + cK_x \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) = -W^2 x^2 \theta$$

or $\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d \log K_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \frac{W^2 x^2}{EI_x c K_x} \theta = 0 \dots\dots\dots (6)$

Wx は桁板に對する bending moment ならばこれを M にて表はせば

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d \log K_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \frac{M^2}{EI_x c E_x} \theta = 0 \dots\dots\dots (7)$$

上式を基本式とし、この解を求むるにあたり、

1. $M = \text{constant}$ bending moment なる場合
2. $M = aWx^s$ なる form をなす場合 (こゝに a, s は或る常數)

に分けて求むるを便とす。

(A) $M = \text{Constant}$

(a) 今 $I_x = I_0 x^m$
 $K_x = K_0 x^q$ } とせば基本式は次の如くなる

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + qx \frac{d\theta}{dx} + \lambda x^{-m-q+2} \theta = 0 \dots\dots\dots (8)^{(1)}$$

$$\lambda = \frac{M^2}{EI_0 c K_0} \dots\dots\dots (9)$$

$$z = \lambda \frac{x^{-m-q+2}}{-m-q+2} \text{ とせば}$$

$$z \frac{d^2\theta}{dz^2} + \left(\frac{q-1}{-m-q+2} + 1 \right) \frac{d\theta}{dz} + \theta = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{q-1}{-m-q+2} = n \text{ とせば上式は}$$

$$x \frac{d^2 F_n}{dx^2} + (n+1) \frac{dF_n}{dx} + F_n = 0$$

と同等なる式となりこの式の解は $F_n(x)$ にして

$$F_n(x) = x^{-\frac{1}{2}n} J_n(2\sqrt{x})$$

なる關係がある。 $F_n(x)$ は Sir George Greenhill の define せる function にして (10) 式の解は

$$\theta = a F_n(z) = a F_n \left\{ \lambda \frac{x^{-m-q+2}}{-m-q+2} \right\}$$

$$= a' x^{-\frac{q-1}{2}} J_n \left(2 \sqrt{\frac{\lambda}{-m-q+2} x^{-m-q+2}} \right), \text{ if } -m-q+2 > 0$$

今 $-m-q+2 = p > 0, q-1 = r, \lambda = (\alpha p)^2, \frac{r}{p} = n, \text{ とせば}$

(8) 式は $x \frac{d^2\theta}{dx^2} + (r+1) \frac{d\theta}{dx} + (\alpha p)^2 x^{p-1} = 0 \dots\dots\dots (11)$

(1) Gray & Mathews; Treatise on Bessel function p. 239

その解は
$$\theta = x^{-\frac{1}{2}r} \{AJ_n(2\alpha\sqrt{x^p}) + BJ_{-n}(2\alpha\sqrt{x^p})\} \dots\dots\dots(12)$$

A, B は integration constant

$J_n(x), J_{-n}(x)$ は Bessel Function を表はし n が整数ならば $N_n(x)$ 即ち Neumann Function とならねばな

らぬ。 $\frac{d\theta}{dx}$ を求めれば次の如し。

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha p x^{-\frac{r}{2}-1+\frac{p}{2}} \left\{ \frac{-nAJ_n(2\alpha x^{\frac{p}{2}}) - nBJ_{-n}(2\alpha x^{\frac{p}{2}})}{2\alpha x^{\frac{p}{2}}} + AJ_n'(2\alpha x^{\frac{p}{2}}) + BJ_{-n}'(2\alpha x^{\frac{p}{2}}) \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} J_{\pm n-1} + J_{\pm n+1} &= \frac{\pm 2n}{z} J_{\pm n}(z) \\ J_{\pm n-1} - J_{\pm n+1} &= 2J_{\pm n}'(z) \end{aligned} \right\}$$

なれば

$$\frac{d\theta}{dx} = -\alpha p x^{-\frac{r}{2}-1+\frac{p}{2}} \{AJ_{n+1}(2\alpha\sqrt{x^p}) - BJ_{-n-1}(2\alpha\sqrt{x^p})\} \dots\dots\dots(13)$$

(b)

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_0 e^{-mx} \\ K_x &= K_0 e^{-ax} \end{aligned} \right\}$$

$$-q = r, \quad +(q+m) = p, \quad \frac{r}{p} = n, \quad \lambda = (\alpha p)^2 \quad \text{とせば}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + q \frac{d\theta}{dx} + (\alpha p)^2 \theta e^{mx} = 0$$

$e^x = z$ として上式を transform せば (12) 式と同様な式を得れば解は直に

$$\theta = e^{-\frac{1}{2}rx} \{AJ_n(2\alpha\sqrt{e^{px}}) + BJ_{-n}(2\alpha\sqrt{e^{px}})\} \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -pe^{-\frac{r}{2}x} \{AJ_{n+1}(2\alpha\sqrt{e^{px}}) - BJ_{-n-1}(2\alpha\sqrt{e^{px}})\} \dots\dots\dots(15)$$

(c)

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_0(a+bx)^m \\ K_x &= K_0(a+bx)^n \end{aligned} \right\}$$

$$-m - q + 2 = p > 0, \quad q - 1 = r, \quad \frac{r}{p} = n, \quad \lambda = (\alpha p)^2 \quad \text{とせば}$$

$$(a+bx) \frac{d^2\theta}{dx^2} + (r+1) \frac{d\theta}{dx} + (\alpha p)^2 (a+bx)^{p-1} \theta = 0 \dots\dots\dots(16)$$

$$\therefore \theta = (a+bx)^{-\frac{1}{2}r} \{AJ_n(2\alpha\sqrt{(a+bx)^p}) + BJ_{-n}(2\alpha\sqrt{(a+bx)^p})\} \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -b\alpha p (a+bx)^{-\frac{r}{2}-1+\frac{p}{2}} \{AJ_{n+1}(2\alpha\sqrt{(a+bx)^p}) - BJ_{-n-1}(2\alpha\sqrt{(a+bx)^p})\} \dots\dots\dots(18)$$

Boundary Condition

Both end simply supported

(i) 桁板の形状が桁の中央線に對して對稱形をなす場合

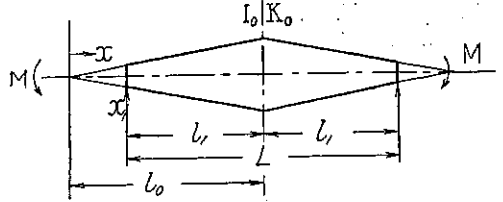
第三圖に於ける如き場合は

$$\left. \begin{aligned} x=x_1 \text{ にて } \theta &= 0 \\ x=l_0 \text{ にて } \frac{d\theta}{dx} &= \theta' = 0 \end{aligned} \right\}$$

一般に對稱形をなす部材に於て θ 及 θ' に對して次ぎの二式が成立する時は次の labile condition が成立す。

$$\begin{aligned} \theta &= AF_1(x) + BF_2(x) \\ \theta' &= AF_1'(x) + BF_2'(x) \\ \left| \begin{array}{cc} F_1(x_1) & F_2(x_1) \\ F_1'(l_0) & F_2'(l_0) \end{array} \right| &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)^{(2)}$$

第三圖



(a) の場合

$$\begin{aligned} x=x_1=0 \text{ にて } \theta &= 0 \\ x=l_0 \text{ にて } \theta' &= 0 \end{aligned}$$

第一條件より

$$A = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\therefore \theta = Bx^{-\frac{1}{2}r} J_{-n}(2\alpha\sqrt{x^p})$$

$$\theta' = B'x^{-\frac{1}{2}r-1-\frac{n}{2}} J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{x^p})$$

第二條件より安定條件式は

$$J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{l_0^p}) = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{if } q=m=0 \quad J_{\frac{1}{2}-n-1}(2\alpha\sqrt{l_0^p}) = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

(b) の場合

$$(18) \text{ 式より } \left| \begin{array}{cc} J_n(2\alpha e^{\frac{m_1}{2}}) & J_{-n}(2\alpha e^{\frac{m_2}{2}}) \\ J_{n+1}(2\alpha e^{\frac{m_0}{2}}) & -J_{-n-1}(2\alpha e^{\frac{m_0}{2}}) \end{array} \right| = 0$$

この式を解き若し $x_1=0$ なる場合を求めれば

$$J_n(2\alpha)J_{-n-1}(\alpha e^{\frac{m_0}{2}}) + J_{-n}(2\alpha)J_{n+1}(2\alpha e^{\frac{m_0}{2}}) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

特に $q=m=1$ なる時は

$$J_{-\frac{1}{2}}(2\alpha)J_{\frac{1}{2}-n-1}(2\alpha e^{\frac{m_0}{2}}) + J_{\frac{1}{2}}(2\alpha)J_{-\frac{1}{2}-n-1}(2\alpha e^{\frac{m_0}{2}}) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

(c) の場合

$$\text{同様にして } \left| \begin{array}{cc} J_n(2\alpha\sqrt{(a+bx_1)^p}) & J_{-n}(2\alpha\sqrt{(a+bx_1)^p}) \\ J_{n+1}(2\alpha\sqrt{(a+bl_0)^p}) & -J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{(a+bl_0)^p}) \end{array} \right| = 0$$

$x_1=0$ なる時は

(2) 田中 豊: On Strength of Columns with Variable Cross Sections 土木學會誌第十五卷第三號

$$J_n(2\alpha\sqrt{a^p})J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{(a+bl_0)^p}) + J_{-n}(2\alpha\sqrt{a^p})J_{n+1}(2\alpha\sqrt{(a+bl_0)^p}) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

上式を解けばよし。

(ii) 桁板の形が對稱形をなさざる場合

Boundary condition

$$x=x_1 \text{ にて } \theta=0$$

$$x=l \quad \theta=0$$

l = 桁の全徑間長

この場合の labile condition を與へる式は

$$\begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) \\ F_1(l) & F_2(l) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

(a) の場合

(26) 式により

$$\begin{vmatrix} J_n(2\alpha\sqrt{x_1^p}) & J_{-n}(2\alpha\sqrt{x_1^p}) \\ J_n(2\alpha\sqrt{l^p}) & J_{-n}(2\alpha\sqrt{l^p}) \end{vmatrix} = 0$$

上式を解けばよい。特に $x_1=0$ ならば

$$J_{-n}(2\alpha l^{\frac{p}{2}}) = 0 \dots\dots\dots(27)$$

(b) の場合

$$\begin{vmatrix} J_n(2\alpha\sqrt{e^{px_1}}) & J_{-n}(2\alpha\sqrt{e^{px_1}}) \\ J_n(2\alpha\sqrt{e^{pl}}) & J_{-n}(2\alpha\sqrt{e^{pl}}) \end{vmatrix} = 0$$

(c) の場合

$x_1=0$ なる時は

$$J_n(2\alpha\sqrt{a^p})J_{-n}(2\alpha\sqrt{(a+bl)^p}) = J_{-n}(2\alpha\sqrt{a^p})J_n(2\alpha\sqrt{(a+bl)^p}) \dots\dots\dots(28)$$

特に $q=m=1$ なる時

$$(a+bx)^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + b(a+bx) \frac{d\theta}{dx} + \frac{M^2}{EI_0 c K_0} \theta = 0$$

$(a+bx) = e^x$ とせば

$$b^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{M^2 l^2 \theta}{EI_0 c K_0} = 0$$

$$\theta = A \cos \frac{Ml}{b\sqrt{EI_0 c K_0}} \log(a+bx) + B \sin \frac{Ml}{b\sqrt{EI_0 c K_0}} \log(a+bx)$$

$$x=0 \quad \theta=0$$

$$\therefore A=0$$

$$\therefore M = \frac{b\pi\sqrt{EI_0 c K_0}}{l \log(a+bl)} \dots\dots\dots(29)^{(3)}$$

(3) Case; Strength of Material.

3. 數値計算例

前論に於ては桁板の moment of inertia I_x の變化 Drillungswiderstand K_x との變化は互に相異なるものとせるが、實際の場合に於ける問題として rectangular section や elliptic section をなす桁板に就ては桁の depth が breath にくらべて相當大なる高さを有する場合には I_x の變化と K_x の變化とはよく一致するものと見てよい。

Rectangular section の部材に對する Drillungswiderstand K は

$$K = \frac{1}{3} \delta^3 (h - 0.63 \delta) \dots \dots \dots (30)^{(4)}$$

breath δ が depth h にくらべて小なる故に

$$\left. \begin{aligned} K &\doteq \frac{1}{3} \delta^3 h \\ \text{然るに } I &= \frac{1}{12} \delta^3 h \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

故に數値計算に於ては $q = m$ としてよい。

$$\begin{aligned} \therefore q = m = \mu \text{ ならば} \\ I_x = I_0 x^\mu, \quad K_x = K_0 x^\mu \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

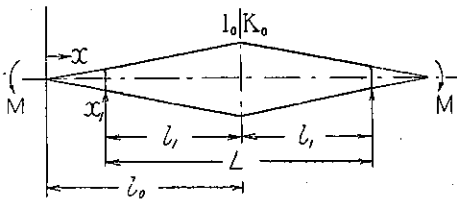
(i) $\mu = 1$. 即ち beam with truncated rhombic flanges

$$\begin{aligned} \therefore I_x = I_0 \frac{x}{l_0}, \quad K_x = K_0 \frac{x}{l_0} \\ x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} + \frac{M^2 l^2}{EI_0 c K_0} \theta = 0 \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

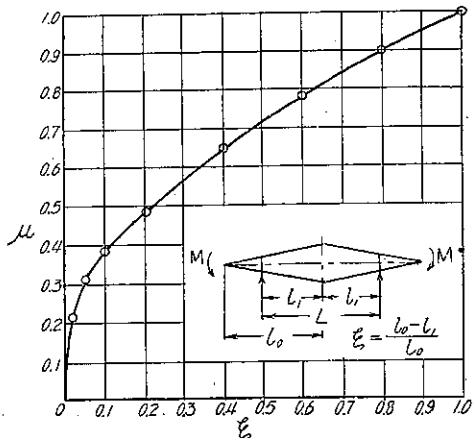
$$\lambda^2 = \frac{M^2 l^2}{EI_0 c K_0} \dots \dots \dots (34)$$

$$\therefore \theta = A \cos \lambda \log x + B \sin \lambda \log x \dots \dots \dots (35)$$

第 四 圖



第 五 圖



(4) Föppl; Drang u. Zwang II S. 94

$$\theta' = -A \frac{\lambda \sin \lambda \log x}{x} + B \frac{\lambda \cos \lambda \log x}{x} \dots\dots\dots (36)$$

$$x = x_1 \quad \theta = 0$$

$$x = l_0 \quad \theta' = 0$$

(18) 式より $A=0$ を求めこれを解けば

$$\lambda \sin \lambda \log x_1 \sin \lambda \log l_0 + \lambda \cos \lambda \log x_1 \cos \lambda \log l_0 = 0$$

$$\therefore \cos(\lambda \log l_0 - \lambda \log x_1) = 0 \dots\dots\dots (37)$$

$$\therefore \cos \lambda \log \frac{l_0}{x_1} = 0 \dots\dots\dots (38)$$

$$\therefore \lambda \log \frac{l_0}{x_1} = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (39)$$

$$\text{or } \frac{M l_0}{\sqrt{E I_0 c K_0}} \log \frac{l_0}{x_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\xi = \frac{x_1}{l_0}$$

$$\begin{aligned} \therefore M &= \pi \frac{1}{\log \frac{1}{\xi}} \frac{\sqrt{E I_0 c K_0}}{2 l_0} \frac{L}{L} \\ &= \pi \frac{1}{\log \frac{1}{\xi}} (1 - \xi) \frac{\sqrt{E I_0 c K_0}}{L} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{1}{\log \frac{1}{\xi}} (1 - \xi)$$

$$\text{とせば } M = \mu \pi \frac{\sqrt{E I_0 c K_0}}{L} \dots\dots\dots (41)$$

ここに L = effective length of beam

種々の ξ に対する μ を計算すれば、次表の如し、

ξ	0.00	0.01	0.05	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
μ	0.00	0.215	0.317	0.391	0.497	0.655	0.789	0.903	1.000

これ等の μ の値を plot すれば 第五圖 の如し

(ii) $\mu=2$ 即ち beam with symmetrically concave flanges.

$$I_x = I_0 \frac{x^2}{l_0^2} \quad K_x = K_0 \frac{x^2}{l_0^2}$$

$$x^4 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 2x^2 \frac{d \theta}{dx} + \lambda^2 \theta = 0 \dots\dots\dots (42)$$

$$\lambda^2 = \frac{M^2 l_0^4}{E I_0 c K_0}$$

$$\therefore \theta = A \cos \lambda \frac{1}{x} + B \sin \lambda \frac{1}{x} \dots\dots\dots(43)$$

$$\theta' = -\lambda \frac{1}{x^2} \left(A \sin \lambda \frac{1}{x} - B \cos \lambda \frac{1}{x} \right) \dots\dots\dots(44)$$

前題と同様にして (18) 式により $A=0$ を解けば

$$\cos \lambda \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{l_0} \right) = 0 \dots\dots\dots(45)$$

$$\lambda \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{l_0} \right) = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots(46)$$

$$\frac{M^2 l^2}{\sqrt{EI_0 c K_0}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{l_0} \right)}$$

$$\begin{aligned} \therefore M &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{x} - 1 \right)} \sqrt{EI_0 c K_0} \frac{L}{l_0} \frac{1}{L} \\ &= \pi \frac{\xi}{(1-\xi)} \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \\ &= \pi \xi \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

ここに

$$\xi = \frac{x_1}{l_0}$$

$$\therefore M = \mu \pi \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \dots\dots\dots(48)$$

ここに

$$\mu = \xi$$

種々なる ξ に對して μ の値を計算して見れば次表の如し。

ξ	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
μ	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1

μ の値を plot して圖示すれば第七圖の如し。

(iii) Symmetrically truncated lenticular beam

$$I_x = I_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right\}$$

$$K_x = K_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right\}$$

$$\xi = \frac{x}{l_0} \quad \text{と置けば}$$

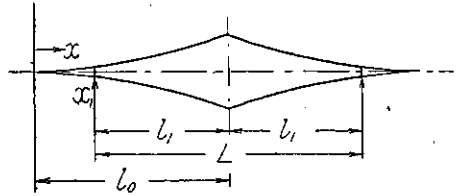
$$(1-\xi^2)^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - 2\xi(1-\xi^2) \frac{d\theta}{d\xi} + \lambda^2 \theta = 0 \dots\dots\dots(49)$$

$$\lambda^2 = \frac{M^2 l_0^2}{EI_0 c K_0}$$

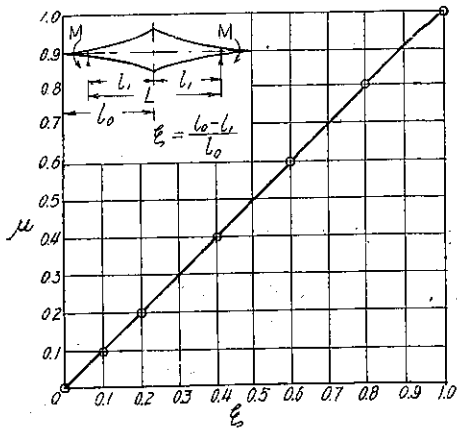
$$\therefore \theta = A \cos \lambda \operatorname{arctanh} \xi + B \sin \lambda \operatorname{arctanh} \xi \dots\dots\dots(50)$$

$$\theta' = -\frac{\lambda}{1-\xi^2} (A \sin \lambda \operatorname{arctanh} \xi - B \cos \lambda \operatorname{arctanh} \xi) \dots\dots\dots(51)$$

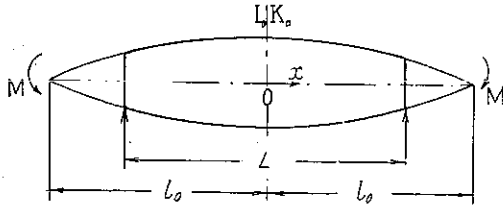
第六圖



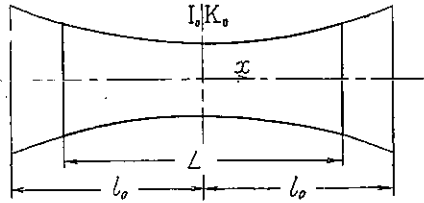
第七圖



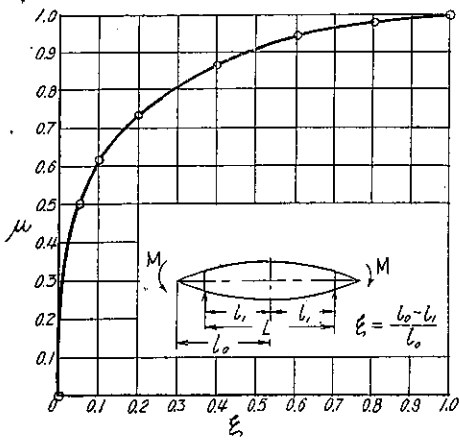
第八圖



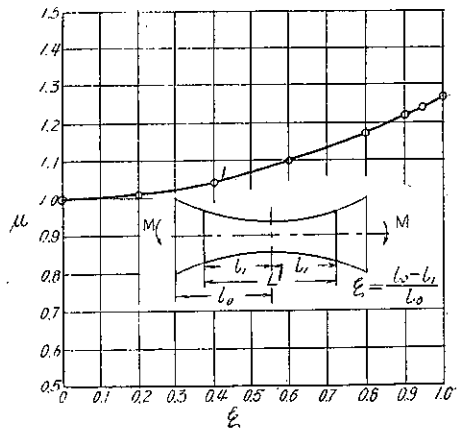
第十圖



第九圖



第十一圖



Condition of stability を與ふる式は

$$\cos \lambda \left(\operatorname{arctanh} \frac{l_1}{l_0} - \operatorname{arctanh} 0 \right) = 0$$

$$\therefore M = \pi \sqrt{EI_0 c K_0} \frac{1}{\operatorname{arctanh} \frac{l_1}{l_0}} \frac{L}{2l_0} \frac{1}{L}$$

$$= \pi \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \frac{l_1}{l_0} \frac{1}{\operatorname{arctanh} \frac{l_1}{l_0}} \dots \dots \dots (52)$$

$$M = \mu \pi \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \dots \dots \dots (53)$$

ここに

$$\mu = \frac{l_1}{l_0} \frac{1}{\operatorname{arctanh} \frac{l_1}{l_0}}$$

種々なる l_1/l_0 の値に對する μ の値を計算すれば

$\frac{l_1}{l_0}$	1.00	0.95	0.90	0.8	0.6	0.4	0.2	0
$\xi = \frac{l_0 - l_1}{l_0}$	0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
μ	0	0.510	0.612	0.729	0.863	0.943	0.981	1

μ の値を plot して圖示すれば第九圖の如し。

(iv) 桁板の形が對稱にして $I_x = I_0 \left\{ 1 + \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right\}$, $K_x = K_0 \left\{ 1 + \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right\}$ にて與へられる場合 (第十圖)

$\xi = \frac{x}{l_0}$ と置けば

$$(1 + \xi^2)^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + 2\xi(1 + \xi^2) \frac{d\theta}{d\xi} + \lambda^2 \theta = 0 \dots\dots\dots (54)$$

$$\lambda^2 = \frac{M^2 l_0^2}{EI_0 c K_0}$$

$$\theta = A \cos \lambda \tan^{-1} \xi + B \sin \lambda \tan^{-1} \xi \dots\dots\dots (55)$$

$$\theta' = \frac{-\lambda}{1 + \xi^2} (A \sin \lambda \tan^{-1} \xi - B \cos \lambda \tan^{-1} \xi) \dots\dots\dots (56)$$

Condition of stability を與ふる式は

$$\cos \lambda (\tan^{-1} \xi - \tan^{-1} 0) = 0$$

$\xi = \frac{x_1}{l_0} = \frac{l_1}{l_0}$ と置けば

$$M = \pi \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \frac{\xi}{\tan^{-1} \xi} \dots\dots\dots (57)$$

$$M = \mu \frac{\pi \sqrt{EI_0 c K_0}}{L} \dots\dots\dots (58)$$

$$\mu = \frac{\xi}{\tan^{-1} \xi}$$

上式より μ を計算すれば次表を得る

ξ	1	0.95	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0
μ	1.275	1.250	1.225	1.183	1.107	1.044	0.010	1

μ の値を圖示すれば第十一圖の如し。

以上にて數値計算を終るが、この外 symmetry なると unsymmetry なる場合とを問はず、任意の形の場合が解き得る。殊に I_x, K_x の變化が suddenly change をなす場合も容易に解ける。

(B) $M = aW^2 \alpha^s$ なる形をなす場合

a, s 任意の常數, 基本式は次の如し。

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d \log K_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \frac{a^2 W^2 \alpha^{2s}}{EI_x c K_x} \theta = 0 \dots\dots\dots (59)$$

$$I_x = I_0 x^m, \quad K_x = K_0 x^q$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + q x \frac{d\theta}{dx} + \lambda x^{-m-q+2s} \theta = 0 \dots\dots\dots (60)$$

$$\lambda = \frac{a^2 W^2}{EI_0 c K_0}$$

$$\left. \begin{aligned} -m - q + 2s = p - 2 > 0 & \quad q - 1 = r \\ \lambda = (\alpha p)^2 & \quad \frac{r}{p} = n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

とせば

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + (r+1) \frac{d\theta}{dx} + (\alpha p)^2 x^{p-1} \theta = 0 \dots\dots\dots(62)$$

$$\theta = x^{-\frac{1}{2}r} \{AJ_n(2\alpha\sqrt{x^p}) + BJ_{-n}(2\alpha\sqrt{x^p})\} \dots\dots\dots(63)$$

ここに J_n, J_{-n} は n 次の Bessel function, n が integer なら $J_{-n} = N_n$ 即ち Neumann function にせねばならぬは勿論である。

(A) 突 桁

終端条件

$$x=0 \text{ で } \frac{d\theta}{dx}=0, \quad x=l \text{ で } \theta=0$$

第一条件式より第二解 J_{-n} を捨てる。

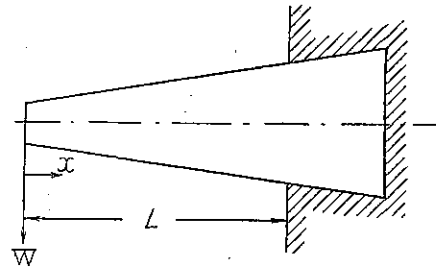
$$\therefore \theta = Ax^{-\frac{1}{2}r} J_n(2\alpha\sqrt{x^p}) \dots\dots\dots(64)$$

第二条件式より桁板の安定の限界を定むるには次式の最小値を有する根を求むることにより定まる。

$$J_n(2\alpha\sqrt{l^p}) = 0 \dots\dots\dots(65)$$

$I_x = I_0 e^{mx}, K_x = K_0 e^{mx}$ なる時, 又 $I_x = I_0(a+bx)^m, K_x = K_0(a+bx)^m$ なる時には基本式を解き得ない。このことは桁板が truncated form をなす時は解き得ないことを知る。この場合には近似値的解法によるを便とす (第十二圖)。

第十二圖



數値計算例

(a) 突桁の自由端に集中荷重 W を桁板の中軸に載せる場合

$$M = Wx$$

$$\alpha = 1, \quad s = 1$$

1° Uniform section を有する桁板

$$m = q = 0$$

$$p = 4, \quad r = -1$$

$$\therefore J_{-\frac{1}{4}}(2\alpha l^2) = 0 \dots\dots\dots(66)$$

$$2\alpha l^2 = 2.006$$

$$W_{K_0} = \frac{4.012\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots(67)^{(5)}$$

2° 三角形をなす桁板

$$I_x = I_0 \frac{x}{l}, \quad K_x = K_0 \frac{x}{l}$$

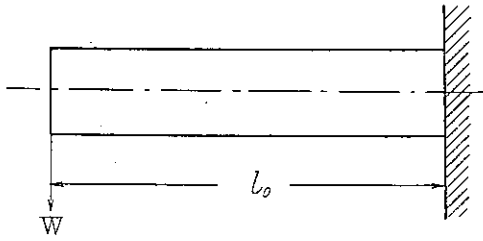
$$m = q = 1$$

$$(\alpha p)^2 = \frac{Wx^2}{EI_0 c K_0}$$

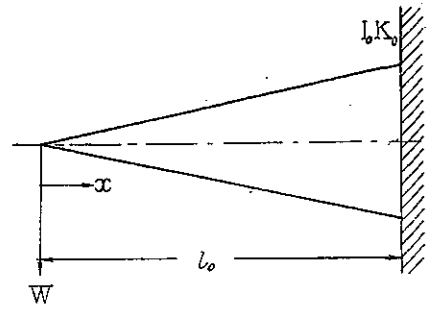
$$r = 0 \quad \therefore n = 0$$

(5) Föppl: Drang u. Zwang. II. S. 323.

第十三圖



第十四圖



$$\therefore J_0(2\alpha l) = 0 \dots\dots\dots (68)$$

$$2\alpha l = 2.405$$

$$\therefore W_k = \frac{2.405 \sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots (69)^{(6)}$$

3° Parabolic form をなす桁板

$$I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 3, \quad r = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore J - \frac{1}{6}(2\alpha l^{\frac{3}{2}}) = 0 \dots\dots\dots (70)$$

$$\frac{2}{3} \frac{Wl^2}{\sqrt{EI_0 c K_0}} = 2.142$$

$$\therefore W_k = 3.213 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots (71)$$

4° $I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$ なる桁板

$$J - \frac{1}{5}(2\alpha l^{\frac{5}{3}}) = 0$$

$$W_k = 3.447 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots (72)$$

$I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{4}}$ ならば

$$W_k = 3.78 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots (73)$$

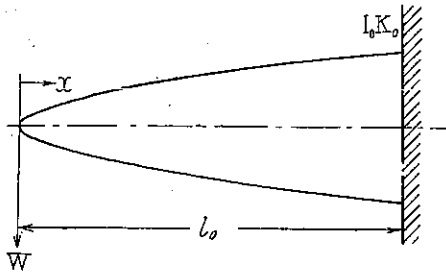
(b) w なる uniform load を加載せる場合

$$M = \frac{1}{2} wx^2, \quad a = \frac{1}{2}, \quad s = 2$$

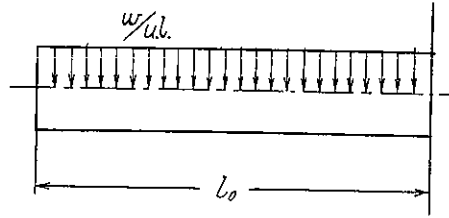
$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d \log K_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{4} \frac{w^2 x^4}{EI_x c K_x} = 0 \dots\dots\dots (74)$$

(6) Case: Strength of Material p. 378.

第十五圖



第十六圖



$$I_x = I_0 x^m, \quad K_x = K_0 x^q$$

$$-q - m + 6 = p, \quad r = q - 1$$

$$\frac{r}{p} = n, \quad (\alpha p)^2 = \frac{1}{4} \frac{w^2}{EI_0 c K_0}$$

桁板の安定條件式は

$$J_n(2\alpha\sqrt{l^3}) = 0 \dots\dots\dots(75)$$

1° Uniform section を有するならば

$$J_{-\frac{1}{6}}(2\alpha l^3) = 0$$

$$2\alpha l^3 = 2.1423$$

$wl = W$ とせば

$$W_k = 12.852 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots(76)^{(7)}$$

2° 三角形をなす場合

$$J_0(2\alpha l^3) = 0$$

$$W_k = 9.820 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots(77)$$

3° $I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^3, K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^3$ ならば

$$J_{\frac{1}{2}}(2\alpha l) = 0$$

$$W_k = 6.284 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots\dots(78)$$

(c) 水壓荷重を受ける場合

$$M = \frac{1}{6} W x^3, \quad W = \text{max. pressure}$$

$$-m - q + 8 = p, \quad q - 1 = r$$

$$\frac{r}{p} = n, \quad (\alpha p)^2 = \frac{1}{36l^2} \frac{W^2}{EI_0 c K_0}$$

となる。

(7) 前出 Case; p. 378.

1° Uniform section を有する場合

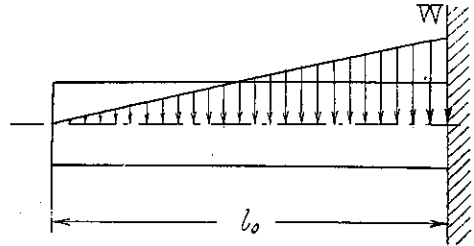
$$J_{-1}(2\alpha l)^4 = 0$$

$$2\alpha l^4 = 2.209$$

$$W_0 = \frac{1}{2} W l \quad \text{とせば}$$

$$W_0 = 26.52 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots(79)^{(9)}$$

第十七圖



2° 三角形をなす桁板

$$I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right), \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right), \quad m = \eta = 1$$

$$W_0 = 21.654 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} \dots\dots(80)$$

3° $I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^3$ ならば

$$J_1(2\alpha l) = 0$$

$$2\alpha l = 3.831$$

$$W_0 l^2 = 11.493 \sqrt{EI_0 c K_0} \dots\dots(81)$$

(d) 桁板自身の重さによりて生ずる Kipperscheinung

a) Uniform section を有する桁板

自重を w per unit length とすれば (76) 式より

$$W l^2 = 12.852 \sqrt{EI_0 c K_0}$$

$$\therefore l_k = 2.345 \sqrt[6]{\frac{EI_0 c K_0}{w^2}} \dots\dots(82)^{(9)}$$

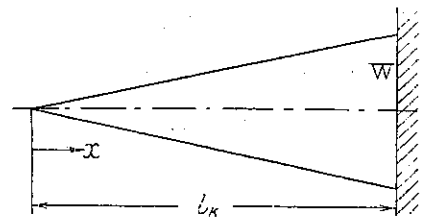
b) 三角形をなす桁板

$W =$ 固定端に於る自重とすれば (80) 式より

$$W l^2 = 43.308 \sqrt{EI_0 c K_0}$$

$$\therefore l_k = 3.51 \sqrt[6]{\frac{EI_0 c K_0}{W^2}} \dots\dots(83)$$

第十八圖



c) Parabolic form をなす桁板

$W =$ 固定端に於ける自重

$$M = \frac{4}{15} \frac{W}{l^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{5}{2}}, \quad s = \frac{5}{2}$$

$$I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

故に
$$x \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dx} + \left(\frac{4}{15} \frac{W}{\sqrt{l}}\right)^2 \frac{l x^5}{EI_0 c K_0} \theta = 0 \dots\dots(84)$$

(9) 前出 Case: p. 378. (9) 前出 Föppl; II. S. 334.

$$\therefore J_{\frac{1}{12}}(2\alpha l^3) = 0 \dots\dots\dots(85)$$

$$\alpha = \frac{1}{22.5} \frac{W}{\sqrt{EI_0 c K_0}}$$

$$2\alpha l^3 = 2.28$$

$$l_k = 2.950 \sqrt[6]{\frac{EI_0 c K_0}{W^2}} \dots\dots\dots(86)$$

d) Parabolic concave flange を有する桁板

$$I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

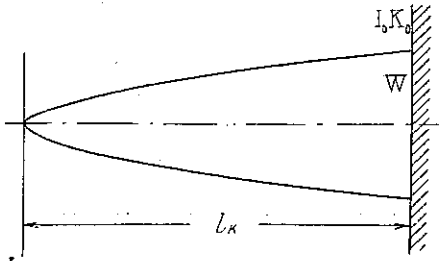
$$M = \frac{1}{12} \frac{W}{l^2} x^4, \quad s=4$$

$$J_{\frac{1}{6}}(2\alpha l^3) = 0 \dots\dots\dots(87)$$

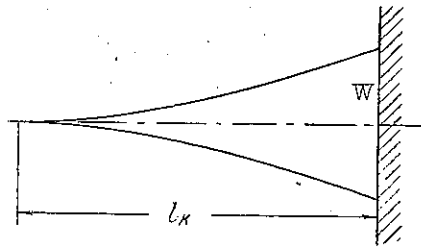
$$2\alpha l^3 = 2.858$$

$$\alpha = \frac{1}{72} \frac{W}{\sqrt{EI_0 c K_0}}$$

第十九圖



第二十圖



$$\therefore l_k = 4.573 \sqrt[6]{\frac{EI_0 c K_0}{W^2}} \dots\dots\dots(88)$$

(B) 桁の中央に集中荷重 W を加載し左右對稱形の單桁

$$M = \frac{1}{2} W x$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d \log K_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{4} \frac{W^2 x^2}{EI_x c K_x} \theta = 0 \dots\dots\dots(89)$$

$$I_x = I_0 x^m, \quad K_x = K_0 x^q \quad \text{なら}$$

$$\theta = x^{-\frac{1}{2}r} \{ A J_n(2\alpha\sqrt{x^p}) + B J_{-n}(2\alpha\sqrt{x^p}) \} \dots\dots\dots(90)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 2\alpha x^{-\frac{r}{2}-1+\frac{p}{2}} \{ A J_{n+1}(2\alpha\sqrt{x^p}) - B J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{x^p}) \} \dots\dots\dots(91)$$

終端條件

$$x=0 \quad \theta=0$$

$$x=l_1 \quad \frac{d\theta}{dx}=0$$

第一終端條件より

$$A=0 \dots \dots \dots (92)$$

故に安定條件式は第二終端條件より

$$0 = l_1^{-\frac{x}{2} - 1 + \frac{p}{2}} B J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{l_1^p})$$

$$\therefore J_{-n-1}(2\alpha\sqrt{l_1^p}) = 0 \dots \dots \dots (93)$$

即ち安定の限界を定むるには上式の最小根を求むればよし。

1° Uniform section を有する桁板

$$J_{-\frac{3}{4}}(2\alpha l_1^{\frac{3}{4}}) = 0 \dots \dots \dots (94)$$

上式の 1st. root を求むるに次式によつた。

$J_n(x)=0$ の任意の root $x_n^{(s)}$ は

$$x_n^{(s)} = \beta - \frac{m-1}{8\beta} - \frac{4(m-1)(7m-31)}{3(8\beta)^3} + \frac{32(m-1)(83m^2-782m+3779)}{15(8\beta)^9} \dots \dots \dots (95)^{(10)}$$

こゝに $\beta = \frac{1}{4}\pi(2n+4s-1), \quad m=4n^2$

1st. root ならば $s=1, \quad n = -\frac{3}{4}$

$$2\alpha l^2 = 1.045$$

$$\therefore W_k = 16.720 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2} \dots \dots \dots (96)$$

$$L = 2l_1 = \text{total span length}$$

J. Prescott: Applied Elasticity には

$$W_k = 16.940 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2} \dots \dots \dots (97)$$

が與へられてある。

2° Rhombic form をなせる桁板

$$I_x = I_0 \frac{x}{l}, \quad K_x = K_0 \frac{x}{l}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{Wl}{\sqrt{EI_0 c K_0}}$$

$$\theta = A J_0(2\alpha x) + B N_0(2\alpha x) \dots \dots \dots (98)$$

$$\theta' = A' J_0(2\alpha x) + B' N_0(2\alpha x) \dots \dots \dots (99)$$

なる解を得るが、 $x=0$ で $\theta=0$ なるためには第二解を捨て、更に $J_0(2\alpha x)_{x=0}=1$ ならば $A=0$ でなければならぬ。故に第一終端條件をを満足する解を有せず。

3° Symmetrical parabolic form をなす桁板

$$I_x = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2, \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

(10) Gray & Mathews; 前出 (1) appendix III. p. 260.

$$J - \frac{5}{6} \left(2\alpha l_1^{\frac{3}{2}} \right) = 0 \dots\dots\dots (100)$$

$$2\alpha l_1^{\frac{3}{2}} = 0.7935$$

$$2\alpha l = \frac{1}{3} W \sqrt{\frac{l}{EI_0 c K_0}}$$

$$\therefore W_k = \frac{9.522 \sqrt{EI_0 c K_0}}{I^2} \dots\dots\dots (101)$$

$$L = 2l_1$$

4. 近似值的計算

桁板が variable cross section を有する場合 truncated form をなすとなさざるとによらず, constant bending moment を apply する case には一般に解ける。

然れども bending moment M が, $M=F(x)$ なる形をなす場合は桁板が uniform section を有する場合の外は, 極く特別の場合に限り解けるにすぎない。殊に truncated form をなす桁板の場合には今のところ全く解けない。

併しながら, これは全く數學的に解けないのであつて, これを工學的には解く方法がある。即ち實驗的解法と近似值的解法である。こゝでは近似值的解法に就て述べる。

近似值的解法には二方法が知られて居る。

a) Principle of energy の idea より誘導せられたる公式で J. Prescott 教授の方法。

b) Differenzen の idea による解法で H. Hencky 氏の方法。

(a) J. Prescott は次ぎの公式を與へて居る。

$$\int \frac{EI_x}{G^2} \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 dx = \int \frac{Q^2}{cK_x} \dots\dots\dots (102)$$

こゝに G = bending moment due to given vertical load

$$Q = \text{torque} = \frac{d\theta}{dx}$$

I_x, K_x が常數にして I_0, K_0 であるなれば

$$EI_0 c K_0 \int \frac{1}{G^2} \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 dx = \int Q^2 dx \dots\dots\dots (103)$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$EI_0 c K_0 \int \frac{1}{G^2} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \dots\dots\dots (104)$$

計算例

自由端に W を加载せる突桁

1° Uniform section を有する場合

$$\theta = \frac{x^3}{l^3} + c \frac{x^4}{l^4} - (1+c) \dots\dots\dots (105)$$

こゝに c = some constant to be determined, l = span length = L

とすれば上式は終端條件を満足す。 θ を (104) 式に代入して計算すれば

$$\frac{137^2 + 924c + 231c^2}{308/15 + 28c + 11c^2} = \frac{W^2 l^4}{EI_0 c K_0}$$

こゝで左邊を minimum にすべき c を決定すれば $c = -5.155$

$$\therefore W_k = 4.037 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2} \dots\dots\dots(106)$$

誤差は約 0.3% にすぎず。

2° 三角形をなす桁板

$$I_x = J_0 \left(\frac{x}{l} \right), \quad K_x = K_0 \left(\frac{x}{l} \right), \quad \theta = \frac{x^3}{l^3} + c \frac{x^4}{l^4} - (1+c)$$

として計算の結果

$$c = -3.897$$

$$\therefore W_k = \frac{2.761 \sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2} \dots\dots\dots(107)$$

これは exact value に対して誤差約 15%.

3° Truncated Triangular Form をなす桁板

$$I_x = I_0 \frac{a+x}{l}, \quad K_x = K_0 \frac{a+x}{l}$$

$L =$ effective span

$$\theta = \frac{x^3}{L^3} + c \frac{x^4}{L^4} - (1+c)$$

として計算の結果次の式を得た。

$$\frac{a}{L} = \xi$$

$$\frac{WL^4}{EI_0 c K_0} = \frac{L^2}{l^2} \frac{49}{33} (11 + 12\xi) + \frac{3}{2} c (7 + 8\xi) + \frac{3}{4} c^2 (3 + 4\xi) \dots\dots\dots(108)$$

$$\left[\begin{aligned} & 4 \left(\xi^{14} \log \frac{l}{a} - \xi^{13} + \frac{1}{2} \xi^{12} - \frac{1}{3} \xi^{11} + \frac{1}{4} \xi^{10} - \frac{1}{5} \xi^9 \right. \\ & \quad + \frac{1}{6} \xi^8 - \frac{1}{7} \xi^7 + \frac{1}{8} \xi^6 - \frac{1}{9} \xi^5 + \frac{1}{10} \xi^4 - \frac{1}{11} \xi^3 \\ & \quad + \frac{1}{12} \xi^2 - \frac{1}{13} \xi + \frac{1}{14} \Big) + 4c \left(\xi^{10} \log \frac{l}{a} - \xi^9 + \frac{1}{2} \xi^8 \right. \\ & \quad - \frac{1}{3} \xi^7 + \frac{1}{4} \xi^6 - \frac{1}{5} \xi^5 + \frac{1}{6} \xi^4 - \frac{1}{7} \xi^3 \\ & \quad + \frac{1}{8} \xi^2 - \frac{1}{9} \xi + \frac{1}{10} \Big) + c^2 \left(\xi^8 \log \frac{l}{a} - \xi^7 + \frac{1}{2} \xi^6 \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{3} \xi^5 + \frac{1}{4} \xi^4 - \frac{1}{5} \xi^3 - \frac{1}{5} \xi + \frac{1}{6} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

右邊を簡單なる形に書けば

$$\frac{p + qc + rc^2}{4p' + 4q'c + r'c^2}$$

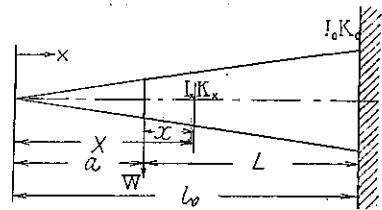
これを minimum にするには

$$c^2 + 2 \frac{4rp' - pr'}{4q'r - qr'} + 4 \frac{qr - pq'}{4q'r - qr'} = 0 \dots\dots\dots(109)$$

上式より c の最小値を求めこれを z とすれば、これを代入して簡單なる形にて表せば、

$$W_k L^2 = 4.037 \sqrt{EI_0 c K_0} \sqrt{\frac{1}{4.037^2} \frac{L^2}{l^2} \frac{p + qz + rz^2}{4p' + 4q'z + r'z^2}} = \mu 4.037 \sqrt{EI_0 c K_0} \dots\dots\dots(101)$$

第二十一圖



種々の ξ に對する μ を計算すれば次表の如し、

$\frac{I_0}{I}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
ξ	0	0.25	0.667	1.5	4	∞
z	-3.897	-3.9096	-4.3235	-5.451	-512.04	—
μ	0.687	0.753	0.840	0.963	1.125	—

上表 $I_0/I=0.8$ にて $\mu=1.125$ を與へ $I_0/I=1$ 即ち $\xi=\infty$ なる場合には μ を計算し得ず。このことは明かに公式の不備を示すものにて、更に改良の餘地を残すものである。

併しながら 1° に示す如く uniform section を有する桁板に對しては簡便なる近似的解法たるを失はない。

(b) Heinrich Hencky 氏の „Elastische Gelenkkette“ method による近似的解法

桁板を任意の数の細片に切斷し、其の細片各々は彈性を有する鉸鎖にて連結せられて居ると考へる。この鉸鎖をさしはさむ細片相互間の撓角は

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EI} s \dots\dots\dots (111)$$

によつて與へられる。又細片が torsional moment m_t を受けるならその Torsionswinkel

$$\Delta t = \frac{M_t}{cK} s \dots\dots\dots (112)$$

にて與へられる。こゝに s は細片の長さを表すものとす。上の二式に無限に小さい長さ ds を代入すれば我々のよく知つて居る撓角、捩れ角に對する公式を得る。かゝる場合は無限に多くの鉸鎖を有する場合と考へられ、其極限に於ては連続せる桁になり、この場合には兩式は differential equation になる。之に對して有限長 s に切斷せられたる桁に對しては兩式は所謂 Differenzgleichung になる。

今 virtual deflection を假定して、各鉸鎖に對して求められた Differenzgleichung の形が homogeneous linear equation である時は、system of homogeneous linear equation を得る。こゝに於て、labile condition を求むるには各 equation の determinant が零たるを要す。この determinant を解き、最小根を求むる時は critical load を求むることが出来る。

計 算 例

自由端に W を加載せる突桁

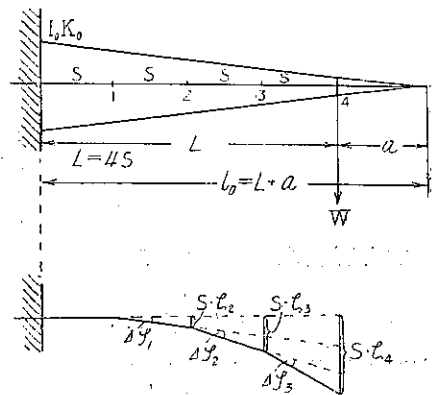
1° Truncated triangular form をなせる桁板

桁板の斷面は矩形なりとし、荷重 W によつて第二十二圖の如く virtual horizontal deflection を生じたりとする。圖の如く桁板を四つの同長なる細片に切斷し、各細片相互は Gelenkkette にて連結せられ、其鉸鎖の番號を 1, 2, 3 とす。自由端を 4 とし點 2, 3, 4 の各點の水平變位を $s\xi_2, s\xi_3$ と $s\xi_4$ とする。

固定端に於ては明かに $\Delta\varphi_0=0$ それ故に $s\xi_1=0$ 、Gelenkpunkt 1, 2, 3, 4 の各點に於ける torsionswinkel Δt は (112) 式により、撓角 $\Delta\varphi$ は (111) 式により計算し得る。

Gelenkpunkt 1, 2, 3, 4 に於ける moment of inertia, Drillungswiderstand は

第二十二圖



$$I_1 = I_0 \frac{a+3s}{a+4s}, \quad I_2 = \frac{a+2s}{a+4s} I_0, \quad I_3 = I_0 \frac{a+s}{a+4s}, \quad I_4 = I_0 = \frac{a}{a+4s}$$

$$K_1 = K_0 \frac{a+3s}{a+4s}, \quad K_2 = \frac{a+2s}{a+4s} K_0, \quad K_3 = K_0 \frac{a+s}{a+4s}, \quad K_4 = K_0 \frac{a}{a+4s}$$

(111) 式より

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{W s^2}{c K_0} \frac{a+4s}{a+3s} \zeta_4 \\ \Delta t_2 &= \frac{W s^2}{c K_0} \frac{a+4s}{a+2s} (\zeta_4 - 3\zeta_2) \\ \Delta t_3 &= \frac{W s^2}{c K_0} \frac{a+4s}{a+s} (\zeta_4 - 2\zeta_3 - \zeta_2) \\ \Delta t_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (113)$$

更に Gelenkpunkt は bending moment の horizontal component に作用せられる爲に撓角を生ずる。

點 1 に對する W による bending moment の horizontal component は $W \cdot 3s \cdot \Delta t$ 故に

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \frac{W s^2}{E I_0} \frac{a+4s}{a+3s} 3\Delta t_1 \\ \Delta \varphi_2 &= \frac{W s^2}{E I_0} \frac{a+4s}{a+2s} 2(st_1 + \Delta_2) \\ \Delta \varphi_3 &= \frac{W s^2}{E I_0} \frac{a+4s}{a+s} (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (114)$$

然るに次の關係がある。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \zeta_2 \\ \Delta \varphi_2 &= \zeta_3 - 2\zeta_2 \\ \Delta \varphi_3 &= \zeta_4 - 2\zeta_3 + \zeta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (115)$$

今 $p = \frac{a+4s}{a+3s}$, $q = \frac{a+4s}{a+2s}$, $r = \frac{a+4s}{a+s}$ とせば (114) 式と (113) 式よりして

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \frac{W^2 s^4}{E I_0 c K_0} p^2 3\zeta_4 \\ \Delta \varphi_2 &= \frac{W^2 s^4}{E I_0 c K_0} \{2pq\zeta_4 + 2q^2(\zeta_4 - 3\zeta_2)\} \\ \Delta \varphi_3 &= \frac{W^2 s^4}{E I_0 c K_0} \{pr\zeta_4 + q(\zeta_4 + 3\zeta_2) + r(\zeta_4 - 2\zeta_3 + \zeta_2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (116)$$

(116) 式に (115) 式を代入して整理すれば次の homogeneous linear equation の system を得る。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_2 & & -3\alpha p^2 \zeta_4 &= 0 \\ 2(3\alpha q^2 - 1)\zeta_2 & + \zeta_3 & -2\alpha(pq + q^2)\zeta_4 &= 0 \\ \{\alpha(3qr - r^2) + 1\}\zeta_2 + 2(\alpha r^2 - 1)\zeta_3 - \{\alpha(pr + rq + r^2) - 1\}\zeta_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

こゝに

$$\alpha = \frac{W^2 s^4}{E I_0 c K_0}$$

故に labile condition は determinant of 3 equations = 0 でなければならない。

故に

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3p^2\alpha \\ 2(3q_1^2\alpha-1) & 1 & -2(pq+q^2)\alpha \\ (3qr-r^2)\alpha+1 & 2(r_1^2\alpha-1) & -\{(pr+rq+r^2)\alpha-1\} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(118)$$

これを解き整理すれば

$$36p^2q^2r^2\alpha^3 - 4\alpha^2 \left\{ (3q^2+r^2)3p^2+r^2(pq+q^2) + \frac{3}{4}(3p^2qr-p^2r^2) \right\} + 4\alpha \left\{ 3p^2+pq+q^2 - \frac{3}{4}p^2 + \frac{rp+rq+r^2}{4} \right\} - 1 = 0 \dots\dots\dots(119)$$

この α に関する三次方程式を解き α の最小値を求めれば、これによりて、critical load W_k を求むることが出来る。

Constant moment of inertia を有する場合は

$$p=q=r=1$$

$$\therefore 36\alpha^3 - 62\alpha^2 + 20\alpha - 1 = 0^{(11)}$$

$$\alpha = 0.06/23$$

故に critical load

$$W_k = \sqrt{0.06123} \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{s^2} \quad s = \frac{l}{4} = \frac{L}{4}$$

$$W_k = 3.96 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{l^2} = 3.96 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2} \dots\dots\dots(121)$$

この値を exact value of W_0 と比較すれば $1\frac{1}{4}\%$ の誤差となる。又 triangular plate の時は

$$W_k = 2.11 \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2} \dots\dots\dots(122)$$

となるが exact value より約 15% 小さくなつて居る。

今

$$W_k = \frac{3.96}{3.96} \frac{16\sqrt{\alpha} \sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2}$$

$$= 4 \mu \frac{\sqrt{EI_0 c K_0}}{L^2}, \quad \mu = \frac{16\sqrt{\alpha}}{3.96} \dots\dots\dots(123)$$

なれば種々の a/L の値に對する μ を計算すれば次の如し。

$\xi = \frac{I_x}{I_0}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
a/L	0	0.25	0.6667	1.25	4	∞
α	0.017	0.028	0.0361	0.0448	0.0526	0.06123
μ	0.5269	0.676	0.7677	0.8549	0.9269	1

μ の値を plot して圖示すれば第二十三圖の如くなる。

μ を實用式に表はせば

⁽¹¹⁾ 前出 Föppl. II. S. 354.

$$\mu = 0.53 + 0.47 \left(\frac{l_0}{l_m} \right)^{1.045}$$

ここに

l_m = maximum depth of plate

l_0 = minimum depth of plate

以上にて近似値的計算を終るのであるが、この解法による時は、なほ種々なる場合に應用して解くことができる、且つ誤差も實用上許容し得る程度と思はれる。

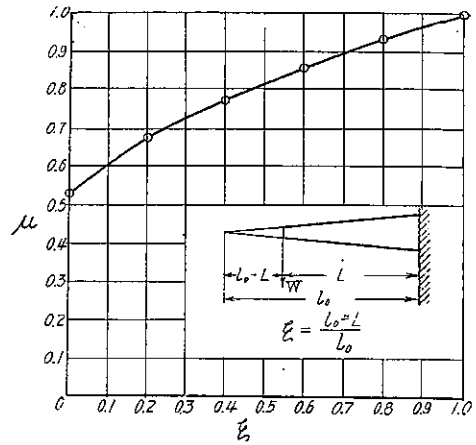
5. 結 論

變斷面を有する桁板の Kipperscheinung の問題は従來よりあまり研究せられない様であるが、著者は該問題の特種なる場合に於ける解を求め得たに過ぎない。殊に truncated form をなせる桁板の場合には、constant bending moment を apply する場合の外は、解を求め得ずして近似値的計算によらざるを得なかつたことは、甚だ残念と考ふるところである。

H. Hencky 氏の近似的解法は實用上許し得る程度の誤差なりと考へ得るのであるが、どの程度なりやは、實驗に依らねばならぬ。

本文に於ける諸式の解、計算等には田中教授⁽¹²⁾、澤田正雄⁽¹³⁾氏、兩氏の貴重なる論文に負ふ所極めて大であつた。

第二十三圖



(12) 前出土木學會誌 第十五卷 第三號.

(13) 澤田正雄; 切口又は彈性率の漸變する物體の近似振動基本式の解に就て, 機械學會誌 135 卷, 180 號.