論 説 報 告

第十九卷第六號 昭和八年六月

スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の强制振動

准員 工學士 小 澤 久 太 郎

Forced Vibration of Bridge under the Action of Running Vehicle with Spring

By Kyutaro Ozawa, C.E., Assoc. Member.

內 容 梗 概

本論文はスプリングを有する車輛が或る速度にて橋上を疾走せる場合の橋桁及び車輛の振動狀態に就て理論的に研究せるもので，殊車輛の自己振動週期が橋桁の自己振動週期と接近せる際には車輛及び橋桁には唸りの現象が起るが振幅には或る一定限度のある事を述べ，又車輛の自己振動週期が橋桁自己振動週期と異なれる場合には，車輛の質量及びスプリングの影響を無視し，外力のみ橋桁上を移動する場合と全然等しき事を述べたものである。

1. 緒　　論

スプリングを有する車輛が或る速度を以て橋上を疾走する場合，橋桁及び車輛には或る特殊の振動が起る。即ち橋桁の振動は車輛に强制振動を與へ，車輛の振動は再び橋桁に强制振動を起させる。斯くして橋桁及び車輛は聯關的に振動を續行するので，之はスプリングの設備あるが爲である。スプリングを有する車輛の橋桁に與へる影響に就ては旣に H. Saller が論じて居るが，(1) 同氏の論文の基礎となる微分方程式に對しては私は不贊成である。又 A. N. Kriloff も彼の論文(2)に於て又 Fr. Bleich も彼の著書(3)に於てスプリング及び車輛質量の影響を考へては居るが本質的でない。且つ之等の方法に據つては橋桁及び車輛の振動の解析をする事が不可能である。本論文は橋桁の撓み曲線を正弦曲線と假定し，Lagrange の運動の方程式より出發して橋桁及び車輛の各種性質と振動との間の函數的關係を明かにせるもので，橋桁は斷面，惰性率共に一定なる單桁橋とし，抵抗摩擦は全然無きものと假定した。

2. 橋桁及び車輛の振動基本式

1. 振動の微分方程式

一般なる場合の研究に入るに先ち，簡單なる次の如き基本的狀態に於て橋桁及び車輛の振動を考究せんとす。(4) 即ち第一圖に於て

(1) 外力 Q は一定なる速度を以て橋桁上を移行す。

(2) 車輛の質量 $\frac{W}{g}$ はスプリングを通じて常に桁の中央部に置かる。

(1) H. Saller; Einfluss Bewegter Last auf Eisenbahnoberbau und Brücken (C.W. Kreidels'Verlag 1921) S. 61.

(2) A. N. Kriloff; Ueber die erzwungene Schwingungen von Gleichförmigen Flastischen Stäben. Math. Ann. 1905. S. 211.

(3) Fr. Bleich; Theorie u. Berechnung d. Eisernen Brücken § 15, 16.

(4) 一般の場合より基本的狀態に還元し得る事は 5. 節に於て證明する。

(3) 橋桁の彎曲に對する剛性率 EJ (=constant)

(4) 橋桁斷面積 A (=constant)

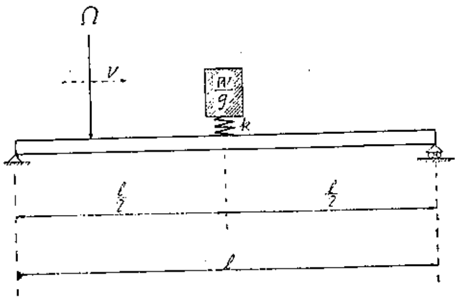
(5) 橋桁單位體積の質量 ρ

(6) 車輛のスプリング係數 k[5]

とすれば，橋桁の振動は一般座標を用ひ

$$y=\varphi_1\sin\frac{\pi x}{l}+\varphi_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\varphi_3\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots+\varphi_i\sin\frac{i\pi x}{l}+\ldots$$

第一圖



にて表はす事が出來る。此の內最も重要なるは第一項なるを以て橋桁の振動曲線は實用的誤差無しに

$$y=\varphi\sin\frac{\pi x}{l}\quad\text{(1)}$$

と假定する事が出來る。又橋桁中央部に定置せる車輛の上下振動を ϕ にて表はすとすれば，

(a) 橋桁の有する運動の勢力

$$T_1=\frac{1}{2}\rho A\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2dx=\frac{1}{2}\rho A(\dot{\varphi})^2\int_0^l\sin^2\frac{\pi x}{l}dx$$
$$=\frac{1}{4}\rho Al(\dot{\varphi})^2$$

(b) 車輛の有する運動の勢力

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{W}{g}(\dot{\phi})^2$$

(c) 橋桁の有する位置の勢力

$$V_1=\frac{EJ}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right)^2dx=\frac{EJ\varphi^2}{2}\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l\sin^2\frac{\pi x}{l}dx$$
$$=\frac{EJ\pi^4}{4l^3}\varphi^2$$

(d) 車輛の有する位置の勢力

$$V_2=\frac{1}{2}k(\phi-\varphi)^2$$

故に橋桁及び車輛を總轄して一つの振動系とすれば，此の振動系の有する運動の勢力は

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{4}\rho Al(\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}\frac{W}{g}(\dot{\phi})^2\quad\text{(2)}$$

振動系の有する位置の勢力は

$$V=V_1+V_2=\frac{EJ\pi^4}{4l^3}\varphi^2+\frac{1}{2}k(\phi-\varphi)^2\quad\text{(3)}$$

にて表はされる。

玆に於て φ 及び ϕ を決定するには Lagrange の運動の方程式

(5) スプリング上に載る荷重を P, スプリングの撓みを δ とすれば, $k=\dfrac{P}{\delta}$ をスプリング係數と稱す。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}=\Theta_\varphi\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \phi}+\frac{\partial V}{\partial \phi}=\Theta_\phi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

に據るが便利である。(4) 式中 Θ_φ 及び Θ_ϕ は座標系 φ 及び ϕ に對する一般力を示すものてある。今 (2) 式及び (7) 式より

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}\rho A l \dot{\varphi}\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\rho A l \ddot{\varphi}\\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0\\ &\frac{\partial V}{\partial \varphi}=\frac{1}{2}\frac{EJ\pi^4}{l^3}\varphi-k(\phi-\varphi)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

及び

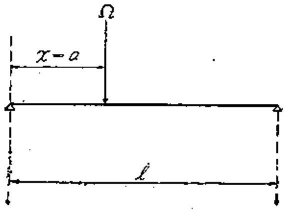
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}=\frac{W}{g}\dot{\phi}\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right)=\frac{W}{g}\ddot{\phi}\\ &\frac{\partial T}{\partial \phi}=0\\ &\frac{\partial V}{\partial \phi}=k(\phi-\varphi)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

を得。(5) 式及び (6) 式の値を (4) 式に代入すれば聯立二次微分方程式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho A l \ddot{\varphi}+\left(\frac{1}{2}\frac{EJ\pi^4}{l^2}+k\right)\varphi-k\phi=\Theta_\phi\\ &\frac{W}{g}\ddot{\phi}+k\phi-k\varphi=\Theta_\varphi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

を得るのである。(7) 式中一般力 Θ_ϕ は次の如くして決定さる。即ち第二圖に於て，荷重 Ω が $x=a$ に來りたる時を考へるに，座標 φ の微小變位 $\delta\varphi$ に對する橋桁の撓み δy は (1) 式より

第　二　圖



$$\delta y=\delta\varphi\sin\frac{\pi x}{l}$$

なるを以て，此の間に外力 Ω のなす仕事 δA は

$$\delta A=\Omega\,\delta\varphi\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)_{x=a}=\Omega\,\delta\varphi\sin\frac{\pi a}{l}\cdots\cdots(8)$$

にして，之は一般力 Θ_φ のなす仕事

$$\delta A'=\Theta_\varphi\,\delta\varphi\cdots\cdots(9)$$

と等しくなければならぬ。故に (8) 式及び (9) 式より一般力 Θ_φ は

$$\Theta_\varphi=\Omega\sin\frac{\pi a}{l}$$

にて與へられる。然るに荷重の速度を v とすれば $a=vt$ なるを以て一般力 Θ_φ は

$$\Theta_\varphi = \Omega \sin\frac{\pi v t}{l} \qquad \cdots\cdots(10)$$

にて表はす事を得。

又一般力 Θ_ϕ を決定せんとするに，車輛には全然外力働かずと考へ得るが故に

$$\Theta_\phi = 0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

と置く事が出來る。(10) 式及び (11) 式を (7) 式に代入すれば振動の微分方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\rho A l \ddot{\varphi} + \left(\frac{1}{2}\frac{E J \pi^4}{l^3} + k\right)\varphi - k\phi = \Omega \sin\frac{\pi v t}{l} \\ &\frac{W}{g}\ddot{\phi} + k\phi - k\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

にて表はされ，猶ほ簡單のために

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k g}{W} = a \\ &\frac{E J \pi^4}{\rho A l^4} = b \\ &\frac{2k}{\rho A l} = c \\ &\frac{2}{\rho A l}\Omega = w \\ &\frac{\pi v}{l} = m \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(13)$$

と置けば (12) 式は

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi = w \sin m t \\ &\ddot{\phi} + a\phi - a\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

の如き簡單なる形となる。(14) 式を解き φ 及び ϕ を求むれば橋桁の振動及び車輛の振動は單一的に決定されるのである。

2. 微分方程式の解

聯立二次微分方程式 (14) 式の一般解を求むるために先づ

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi = 0 \\ &\ddot{\phi} + a\phi - a\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(15)$$

の解を求めんとす。之がために

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = A \sin(p t + \alpha) \\ &\phi = B \sin(p t + \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(16)$$

と置き (15) 式に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} &(b+c-p^2)A - c B = 0 \\ &a A - (a-p^2)B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(17)$$

なる關係を得，(17) 式が恒等的に成立するためには

$$\begin{vmatrix} (b+c-p^2) & -c \\ a & -(a-p^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots(18)$$

なる關係が滿足されなければならぬ。(18) 式より p^2 を解けば

$$p^2 = \frac{(a+b+c)\pm\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}}{2} \quad \cdots\cdots(19)$$

なる値を得。(19) 式に於て

$$a+b+c>\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}$$

且つ

$$(a+b+c)^2-4ab=(a-b-c)^2+4ac>0$$

なるが故に，振動指數[6] p は常に異なれる實根を有す。今 (19) 式に依つて求めし二つの p の內一つを p_1, 他を p_2 とすれば，(15) 式の解は

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A_1\sin(p_1t+\alpha_1)+A_2\sin(p_2t+\alpha_2) \\ \phi &= B_1\sin(p_1t+\alpha_1)+B_2\sin(p_2t+\alpha_2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

にて與へられる。然るに (17) 式より

$$\frac{A}{B} = \frac{a-p^2}{a}$$

なる關係あるを以て

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{a}{a-p_1{}^2}A_1 \\ B_2 &= \frac{a}{a-p_2{}^2}A_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(21)$$

にして (21) 式を (20) 式中に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A_1\sin(p_1t+\alpha_1)+A_2\sin(p_2t+\alpha_2) \\ \phi &= \frac{a}{a-p_1{}^2}A_1\sin(p_1t+\alpha_1)+\frac{a}{a-p_2{}^2}A_2\sin(p_2t+\alpha_2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(22)$$

を得。一般に聯立二次微分方程式の一般解は 4 個の任意常數を含むものにして，(22) 式中には明かに $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ の 4 個の任意常數を含むを以て (22) 式を以て聯立微分方程式 (15) 式の一般解と看做す事を得。

次に聯立微分方程式 (14) 式の一般解を求めんとするに同解は (15) 式の一般解即ち (22) 式に (14) 式の特解を加へたものでなければならぬ。今 (14) 式の特解を求むるために

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \lambda_1\sin mt \\ \phi &= \lambda_2\sin mt \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(23)$$

と置きて (14) 式中に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} (b+c-m^2)\lambda_1-c\lambda_2 &= w \\ a\lambda_1-(a-m^2)\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(24)$$

なる關係式を得。(24) 式より λ_1, λ_2 の値を決定すれば

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} w, & -c \\ 0, & -(a-m^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (b+c-m^2), & -c \\ a, & -(a-m^2) \end{vmatrix}} = \frac{(a-m^2)w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-ac}$$

(6) 本論文に於ては p を振動指數と稱す。

$$\lambda_2=\frac{\begin{vmatrix} b+c-m^2, & w \\ a, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b+c-m^2 & -c \\ a & -(a-m^2) \end{vmatrix}}=\frac{a\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c} \quad\cdots\cdots(25)$$

なる値を得。(25) 式の値を (23) 式中に代入すれば聯立微分方程式 (14) 式の特解として

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{(a-m^2)\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\sin m\,t\\ \phi&=\frac{a\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\sin m\,t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

なる値を得。故に聯立微分方程式 (14) 式の一般解は (22) 式に (26) 式の値を加へ合せし

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=A_1\sin(p_1t+\alpha_1)+A_2\sin(p_2t+\alpha_2)+\frac{(a-m^2)\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\sin m\,t\\ \phi&=\frac{a}{a-p_1^2}A_1\sin(p_1t+\alpha_1)+\frac{a}{a-p_2^2}A_2\sin(p_2t+\alpha_2)+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\sin m\,t\end{aligned}\right\}\cdots(27)$$

でなければならぬ。(27) 式中の任意常数 A_1, A_2, α_1, α_2 は環境條件に依つて決定さるべき値であつて，今環境條件として

$$\left.\begin{aligned}&t=0\text{ の時}\left\{\begin{aligned}\varphi&=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})\\ \phi&=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})\end{aligned}\right.\\ &t=0\text{ の時}\left\{\begin{aligned}\dot\varphi&=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})\\ \dot\phi&=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(28)$$

即ち振動の始源狀態にあつては橋桁及び車輛は靜的平衡の狀態にありとすれば，(28) 式 (i) 及び (ii) より

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=0\\ \alpha_2&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(29)$$

なる値を得。(28) 式 (iii) 及び (iv) より

$$\left.\begin{aligned}0&=p_1A_1+p_2A_2+\frac{(a-m^2)m\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\\ 0&=\frac{a\,p_1}{a-p_1^2}A_1+\frac{a\,p_2}{a-p_2^2}A_2+\frac{a\,m\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(30)$$

なる條件式を得。(30) 式より A_1, A_2 の値を求むれば

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{(a-m^2)m\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}, & p_2 \\ -\dfrac{a\,m\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}, & \dfrac{a\,p_2}{a-p_2^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1, & p_2 \\ \dfrac{a\,p_1}{a-p_1^2}, & \dfrac{a\,p_2}{a-p_2^2} \end{vmatrix}}=\frac{(p_2^2-m^2)(a-p_1^2)m\,w}{p_1(p_1^2-p_2^2)[(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c]}.\\ A_2&=\frac{\begin{vmatrix} p_1, & -\dfrac{(a-m^2)m\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c} \\ \dfrac{a\,p_1}{a-p_1^2}, & -\dfrac{a\,m\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1, & p_2 \\ \dfrac{a\,p_1}{a-p_1^2}, & \dfrac{a\,p_2}{a-p_2^2} \end{vmatrix}}=\frac{(p_1^2-m^2)(a-p_2^2)m\,w}{p_2(p_1^2-p_2^2)[(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c]}\end{aligned}\right\}(31)$$

なる値を得。(29) 式及び (31) 式の値を (27) 式中に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\left\{\frac{(p_2^2-m^2)(a-p_1^2)m}{p_1(p_1^2-p_2^2)}\sin p_1 t\right.\\ &\qquad \left.+\frac{(p_1^2-m^2)(a-p_2^2)\,m}{p_2(p_1^2-p_2^2)}\sin p_2 t+(a-m^2)\sin m t\right\}\\ \phi &= \frac{a\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\left\{\frac{(p_2^2-m^2)\,m}{p_1(p_1^2-p_2^2)}\sin p_1 t+\frac{(p_1^2-m^2)\,m}{p_2(p_1^2-p_2^2)}\sin p_2 t+\sin m t\right\}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(1) 式及び (32) 式より橋桁の振動曲線及び橋桁中央部に定置せる車輛の振動を決定する事が出來る。c 及び m は普通に a, b に比して甚だ小なる數なれば之を無視すれば (32) 式は

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{m\,w}{a\,b\,(p_1^2-p_2^2)p_1p_2}\{\,p_2^3(a-p_1^2)\sin p_1 t+p_1^3(a-p_2^2)\sin p_2 t\}+\frac{w}{b}\sin m t\\ \phi &= \frac{m\,w}{b\,p_1\,p_2(p_1^2-p_2^2)}\{p_2^3\sin p_1 t+p_1^3\sin p_2 t\}+\frac{w}{b}\sin m t\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

の如き簡單なる形に書き改めらる。

(32) 式及び (33) 式を纒めて

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= A_1\sin p_1 t+A_2\sin p_2 t+A_3\sin m t\\ \phi &= B_1\sin p_1 t+B_2\sin p_2 t+B_3\sin m t\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= \frac{w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\;\frac{(p_2^2-m^2)(a-p_1^2)m}{p_1(p_1^2-p_2^2)} = \frac{m\,w\,(p_2^2-m^2)(a-p_1^2)}{p_1(a-m^2)(b-m^2)(p_1^2-p_2^2)}\\ \text{又は}\quad &= \frac{m\,w\,(a-p_1^2)p_2^2}{a\,b(p_1^2-p_2^2)p_1}\\ A_2 &= \frac{w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c}\;\frac{(p_1^2-m^2)(a-p_2^2)m}{p_2(p_1^2-p_2^2)} = \frac{m\,w\,(p_1^2-m^2)(a-p_2^2)}{p_2(a-m^2)(b-m^2)(p_1^2-p_2^2)}\\ \text{又は}\quad &= \frac{m\,w\,(a-p_2^2)\,p_1^2}{a\,b\,(p_1^2-p_2^2)\,p_2}\\ A_3 &= \frac{(a-m^2)w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c} = \frac{w}{b-m^2}\\ \text{又は}\quad &= \frac{w}{b}\\ B_1 &= \frac{a\,w\,m\,(p_2^2-m^2)}{p_1(p_1^2-p_2^2)[(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c]} = \frac{a\,w\,m\,(p_2^2-m^2)}{p_1(p_1^2-p_2^2)(a-m^2)(b-m^2)}\\ \text{又は}\quad &= \frac{w\,m\,p_2^2}{b\,p_1(p_1^2-p_2^2)}\\ B_2 &= \frac{a\,w\,m\,(p_1^2-m^2)}{p_2(p_1^2-p_2^2)[(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c]} = \frac{a\,w\,m\,(p_1^2-m^2)}{p_2(p_1^2-p_2^2)(a-m^2)(b-m^2)}\\ \text{又は}\quad &= \frac{w\,m\,p_1^2.}{b\,p_2(p_1^2-p_2^2)}\\ B_3 &= \frac{a\,w}{(a-m^2)(b+c-m^2)-a\,c} = \frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\\ \text{又は}\quad &= \frac{w}{b}\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(34) 式より明かなる如く，φ 及び ϕ は三つの單弦運動の和なる事を知る。

3.　橋桁自己振動週期と車輛自己振動週期との差大なる場合橋桁及び車輛の振動

私は (34) 式に依つて φ 及び ϕ は $\frac{2\pi}{p_1}$, $\frac{2\pi}{p_2}$, $\frac{2\pi}{m}$ を週期とする三つの單弦運動の和なる事を知つた。三つの振動中，最後の項は車輛が橋上を通過する 2 倍の時間を週期とする振動であつて，之は振動と稱するより寧ろ撓みと稱する方が適當である。p_1, p_2 は (19) 式より與へられ，之を書き改むれば，

$$\left.\begin{aligned} p_1^2 &= \frac{1}{2}\left[(a+b+c)+\sqrt{(a-b)^2+c^2+2bc+2ca}\right] \\ p_2^2 &= \frac{1}{2}\left[(a+b+c)-\sqrt{(a-b)^2+c^2+2bc+2ca}\right] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(36)$$

の如くなる。今

T_a：　車輛の自己振動週期

T_b：　橋桁の自己振動週期

とすれば，

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}$$

$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{\rho A}{EJ}\frac{l^4}{\pi^4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{b}}$$

であつて，橋桁自己振動週期と車輛自己振動週期との差大なる時，即ち

$$a-b \gg 0$$

なる時には支間の極めて小なる場合を除き c は a, b, $(a-b)$ に比し無視するも差支へなく[(7)], (36) 式に於て $c=0$ と置けば

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{a} \\ p_2 &= \sqrt{b} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(37)$$

なる値を得。(37) 式を (35) 式に代入すれば A_1, A_2, A_3, A_4 の値は

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= 0 \\ A_2' &= \frac{wm(a-m^2)}{[(a-m^2)(b+c-m^2)-ac]\sqrt{b}} = \frac{wm}{\sqrt{b}(b-m^2)} \\ \text{又は}\quad &= \frac{wm}{b^{\frac{3}{2}}} \\ B_1' &= \frac{awm(b-m^2)}{\sqrt{a}(a-b)[(a-m^2)(b+c-m^2)-ac]} = \frac{awm}{\sqrt{a}(a-b)(a-m^2)} \\ \text{又は}\quad &= \frac{wm}{\sqrt{a}(a-b)} \\ B_2' &= \frac{awm(a-m^2)}{\sqrt{b}(a-b)[(a-m^2)(b+c-m^2)-ac]} = \frac{awm}{\sqrt{b}(a-b)(b-m^2)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(38)$$

---

(7)　支間極めて小なる場合を除きては c は普通 a, b に比して甚しく小なれば a, b に比しては無視するも差支へないのであるが，(36) 式根號の內の値を考ふるに $(a-b)$ が 0 に近ければ根號內の値は c に依りて定まり，c を無視する事は出來なくなるのである。

又は
$$=\frac{a\,w\,m}{(b)^{\frac{3}{2}}(a-b)}$$

式にて與へらる。(37) 式及び (38) 式の値を (34) 式に代入すれば,

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \frac{m\,w}{\sqrt{b}\,(b-m^2)}\sin\sqrt{b}\,t+\frac{w}{b-m^2}\sin m\,t \\
\text{又は}\quad &= \frac{m\,w}{(b)^{\frac{3}{2}}}\sin\sqrt{b}\,t+\frac{w}{b}\sin m\,t \\
\phi &= \frac{a\,w\,m}{\sqrt{a}\,(a-b)(a-m^2)}\sin\sqrt{a}\,t+\frac{a\,w\,m}{\sqrt{b}\,(a-b)(b-m^2)}\sin\sqrt{b}\,t+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t \\
\text{又は}\quad &= \frac{w\,m}{\sqrt{a}\,(a-b)}\sin\sqrt{a}\,t+\frac{a\,w\,m}{(b)^{\frac{3}{2}}(a-b)}\sin\sqrt{b}\,t+\frac{w}{b}\sin m\,t
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

斯くして橋桁自己振動週期と車輛自己振動週期との差が比較的に大なる時の橋桁及び車輛の振動を考ふるに,橋桁の振動は (1) 式及び (39) 式より,

$$y=\frac{w}{b-m^2}\left\{\frac{m}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}\,t+\sin m\,t\right\}\sin\frac{\pi x}{l}\quad\cdots\cdots(40)$$

にて與へらる。今 (40) 式に於て

$$\frac{m}{\sqrt{b}}=\frac{v\,l}{\pi}\sqrt{\frac{\rho A}{EJ}}=\alpha\quad\cdots\cdots(41)$$

とすれば (40) 式は

$$\begin{aligned}
y &= \frac{w}{b}\,\frac{1}{1-\alpha^2}\left\{\alpha\sin\frac{m\,t}{\alpha}+\sin m\,t\right\}\sin\frac{\pi x}{l} \\
&= \frac{2\,\Omega\,l^3}{EJ\pi^4}\,\frac{1}{1-\alpha^2}\left\{\alpha\sin\frac{1}{\alpha}\frac{\pi v t}{l}+\sin\frac{\pi v t}{l}\right\}\sin\frac{\pi x}{l}\quad\cdots\cdots(42)
\end{aligned}$$

なる形にて表はさる。今 Ω なる荷重が支間 l, 剛性率 EJ なる桁上を v なる速度にて平滑に移動する場合の桁の振動式は[(8)] St. Timoshenko に依りて

$$y=-\frac{2\,\Omega\,l^3}{EJ\pi^4}\left\{\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{\alpha}\frac{i\pi v t}{l}}{i^5\left(1-\frac{\alpha^2}{i^2}\right)}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi v t}{l}}{i^4\left(1-\frac{\alpha^2}{i^2}\right)}\right\}\sin\frac{i\pi x}{l}\quad\cdots\cdots(43)$$

　　但し　　α: (41) 式と同意義,　　　$i=1, 2, 3, \ldots.$

なる式にて與へられ, (43) 式の第一次振動式[(9)]

$$y=-\frac{2\,\Omega\,l^3}{EJ\pi^4}\,\frac{1}{1-\alpha^2}\left\{\alpha\sin\frac{1}{\alpha}\frac{\pi v t}{l}-\sin\frac{\pi v t}{l}\right\}\sin\frac{\pi x}{l}\quad\cdots\cdots(44)$$

と (42) 式とを比較すれば第一項卽ち自己振動の位相が π 異るのみで, 他は全然等しいのである。自己振動週期は車輛が橋桁上を通過する時間に比して普通甚しく小なれば, 自己振動位相が π 異りても大局には影響無く (42)

(8) St. Timoshenko; Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Z. f. Math. u. Phys. 1911, S. 191.

(9) (42) 式に於て第二次以上高次の振動は振幅甚だしく小なれば第一次振動のみを探りても誤差は殆んど無いのである。之より看ても 2. に於て橋桁の振動式を (1) 式の如く假定する事は合理的なるを知る。

式及び (44) 式に依つて表はされる振動形態，性質及び衝撃作用は全然等しと見て差支へ無いのである。斯くして橋桁，車輛の自己振動週期の差大なる時の橋桁の振動はスプリングの影響及び車輛の質量を無視し，外力のみ平滑に橋桁上を移動する場合と全然等しきを知るのである。

又橋桁の中央に定置せりと考へた車輛の振動を考ふるに，橋桁自己振動週期が車輛自己振動週期に比して大なる場合（小支間の場合を除いては之が普通）即ち $b \ll a$ の場合には (38) 式に於て $B_1' \ll B_2'$ となり，B_1' は B_2' に比して無視するも差支へなく，從つて車輛の振動は

$$\phi = \frac{a\,w\,m}{\sqrt{b}\,(a-b)(b-m^2)}\sin\sqrt{b}\,t + \frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t \quad \text{.............................}(45)$$

にて表はされ，車輛の自己振動週期及び車輛が橋上を通過する 2 倍の時間を週期とせる二つの單弦運動の和なる事を知る。

4. 橋桁自己振動週期と車輛自己振動週期との差小なる場合の橋桁及び車輛の振動

橋桁自己振動週期 $\frac{2\pi}{\sqrt{b}}$ と車輛自己振動週期 $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}$ との差小なる場合，即ち $(a-b)$ の小なる場合には，(30) 式中に於て括弧の內の c は $(a-b)$ と同じオーダーになりて無視する事は出來なくなり，(37) 式の如く $p_1=\sqrt{a}$，$p_2=\sqrt{b}$ とはならぬのである。今斯かる場合を論ずるに，(19) 式より

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b+c)+\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}\left[1+\frac{\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}{(a+b+c)}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}{a+b+c}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a-b-c)^2+4\,a\,c}{a+b+c}} \\
&= \varpi+\varepsilon \\
\text{同様に}\qquad p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b+c)-\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a-b-c)^2+4\,a\,c}{a+b+c}} \\
&= \varpi-\varepsilon
\end{aligned}\right\} \quad \text{........................}(46)$$

$$\text{但し}\qquad \left.\begin{aligned}
\varpi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c} \\
\varepsilon &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a-b-c)^2+4\,a\,c}{a+b+c}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{..}(47)$$

と置く事が出來る。然らば (34) 式中橋桁振動座標式は

$$\varphi = \frac{m\,w}{(a-m^2)(b-m^2)(p_1^2-p_2^2)}\left[\frac{(p_2^2-m^2)(a-p_1^2)}{p_1}\sin p_1 t+\frac{(p_1^2-m^2)(a-p_2^2)}{p_2}\sin p_2 t\right]$$

$$+\frac{w}{b-m^2}\sin m\,t$$

$$= \frac{m\,w}{\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}\Big[(p_2^3-m^2p_2)(a-p_1^2)\sin p_1 t$$

$$+(p_1^3-m^2p_1)(a-p_2^2)\sin p_2 t\Big]+\frac{w}{b-m^2}\sin mt^{(10)}$$

にして上式中に (46) 式並に

$$a-p_1^2=\frac{1}{2}(a-b-c)-\frac{1}{2}\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}$$

$$a-p_2^2=\frac{1}{2}(a-b-c)+\frac{1}{2}\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}$$

$$p_1^3=\left[\frac{1}{2}(a+b+c)+\frac{1}{2}\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\left[1+\frac{\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}{a+b+c}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\left[1+\frac{3}{2}\frac{\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}{a+b+c}\right]$$

$$=\frac{(a+b+c)}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a-b-c)^2+4ac}{a+b+c}}\right]$$

$$=\varpi^2(\varpi+3\varepsilon)$$

同様に

$$p_2^3=\varpi^2(\varpi-3\varepsilon)$$

但し ϖ, ε は (62) 式に據る。

なる關係を代入すれば,

$$\left.\begin{aligned}\varphi=&\frac{wm}{\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}\Big[\Big\{\varpi^2(\varpi-3\varepsilon)-m^2(\varpi-\varepsilon\Big\}\Big\{\frac{1}{2}(a-b-c)\\&-\frac{1}{2}\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\Big\}\sin p_1 t+\Big\{\varpi^2(\varpi+3\varepsilon)-m^2(\varpi+\varepsilon)\Big\}\Big\{\frac{1}{2}(a-b-c)\\&+\frac{1}{2}\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\Big\}\sin p_2 t\Big]+\frac{w}{b-m^2}\sin mt\\=&\frac{wm}{\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}\Big[\alpha_1\sin p_1 t+\alpha_2\sin p_2 t\Big]+\frac{w}{b-m^2}\sin mt\end{aligned}\right\}\cdots(48)$$

にして

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\{\varpi^3-3\varepsilon\varpi^2-m^2\varpi+m^2\varepsilon\}\Big\{(a-b-c)-\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\varpi^3(a-b-c)+3\varepsilon\varpi^2\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}-m^2\varpi(a-b-c)-m^2\varepsilon\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\Big\}$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{\varpi^3\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}+3\varepsilon\varpi^2(a-b-c)-m^2\varepsilon\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}-m^2\varepsilon(a-b-c)\Big\}$$

$$=r-s$$

$$r=\frac{1}{2}\{\varpi^3(a-b-c)+3\varepsilon\varpi^2\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}-m^2\varpi(a-b-c)-m^2\varepsilon\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}$$

(10) (19) 式より $p_1^2-p_2^2=\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}$, $p_1p_2=\sqrt{ab}$ なる關係を知る。

$$s=\frac{1}{2}\left\{\varpi^3\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}+3\varepsilon\varpi^2(a-b-c)-m^2\varpi\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}-m^2\varepsilon(a-b-c)\right\}$$

同様に

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\{\varpi^3+3\varepsilon\varpi-m^2\varpi-m^2\varepsilon\}\left\{(a-b-c)+\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\varpi^3(a-b-c)+3\varepsilon\varpi^2\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}-m^2\varepsilon(a-b-c)-m^2\varepsilon\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\varpi^3\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}+3\varepsilon\varpi^2(a-b-c)-m^2\varpi\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}-m^2\varepsilon(a-b-c)\right\}$$

$$=r+s \qquad \text{..................(49)}$$

(49) 式の値を (48) 式に代入すれば

$$\varphi=\frac{wm}{\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}\left[(r-s)\sin(\varpi+\varepsilon)t+(r+s)\sin(\varpi-\varepsilon)t\right]$$

$$+\frac{w}{b-m^2}\sin mt$$

$$=\frac{2wm}{\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}\left[r\sin\varpi t\cos\varepsilon t-s\cos\varpi t\sin\varepsilon t\right]+\frac{w}{b-m^2}\sin mt$$

..................(50)

(50) 式に於て ε は ϖ に比して甚しく小なる數値なれば $\sin\varpi t\cos\varepsilon t$, $\cos\varpi t\sin\varepsilon t$ は唸りの現象を示す。

今 ε を次第に小に取りて極限の場合を考ふれば(11)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon'&=\frac{2}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4ac}{a+b+c}}\\ a-b-c&=0\end{aligned}\right\} \qquad \text{..................(51)}$$

であつて, (51) 式の値を (49) 式中 r, s の中に代入すれば,

$$\left.\begin{aligned}r'&\doteqdot 0\\ s'&\doteqdot\varpi^3\sqrt{ac}\end{aligned}\right\} \qquad \text{..................(52)}$$

となり, (52) 式の値を (50) 式中に代入すれば,

$$\varphi=-\frac{wm\varpi^3}{\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)}\cos\varpi t\sin\varepsilon' t+\frac{w}{b-m^2}\sin mt$$

$$=\frac{-(a+b+c)^{\frac{3}{2}}wm}{2\sqrt{2}\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)}\cos\varpi t\sin\varepsilon' t+\frac{w}{b-m^2}\sin mt \qquad \text{..................(53)}$$

を得。次に (34) 式中車輛振動の座標 ϕ を取りて考ふるに

$$\phi=\frac{awm}{(p_1^2-p_2^2)(a-m^2)(b-m^2)}\left[\frac{p_2^2-m^2}{p_1}\sin p_1t+\frac{p_1^2-m^2}{p_2}\sin p_2t\right]+\frac{aw}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin mt$$

---

(11) ε の値は (47) 式より $\varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a-b-c)^2+4ac}{a+b+c}}$ にして, $(a-b-c)^2>0$, $4ac>0$ なれば, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ なる限り $(a-b-c)=0$ なる時最小で, 其値は $\varepsilon'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4ac}{a+b+c}}$ である。

$$= \frac{a\,w\,m}{\sqrt{a\,b}\,(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}\Big[(p_2{}^3-m^2p_2)\sin p_1 t+(p_1{}^3-m^2p_1)\sin p_2 t\Big]$$

$$+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t$$

$$= \frac{a\,w\,m}{\sqrt{ab}\,(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}\Big[\{\varpi^2(\varpi-3\,\varepsilon)-m^2(\varpi-\varepsilon)\}\sin p_1 t$$

$$+\{\varpi^2(\varpi+3\,\varepsilon)-m^2(\varpi+\varepsilon)\}\sin p_2 t\Big]+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t$$

$$= \frac{a\,w\,m}{\sqrt{ab}\,(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}\Big[\beta_1\sin p_1 t+\beta_2\sin p_2 t\Big]$$

$$+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t \quad\cdots\cdots(54)$$

にして,

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \varpi^2(\varpi-3\,\varepsilon)-m^2(\varpi-\varepsilon)=(\varpi^3-m^2\,\varpi)-\varepsilon(3\,\varpi^2-m^2)\\
&= u-v\\
u &= \varpi^3-m^2\varpi,\qquad v=\varepsilon(3\,\varpi^2-m^2)\\
\beta_2 &= \varpi^2(\varpi^2+3\,\varepsilon)-m^2(\varpi+\varepsilon)=(\varpi^3-m^2\,\varpi)+\varepsilon(3\,\varpi^2-m^2)\\
&= u+v
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(55)$$

(55) 式を (54) 式に代入すれば車輛振動の座標として

$$\phi = \frac{a\,w\,m}{\sqrt{ab}\,(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}\Big[(u-v)\sin(\varpi+\varepsilon)t+(u+v)\sin(\varpi-\varepsilon)t\Big]$$

$$+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t$$

$$= \frac{2\,a\,w\,m}{\sqrt{ab}\,(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{(a-b-c)^2+4\,a\,c}}\Big[u\sin\varpi\,t\cos\varepsilon\,t-v\cos\varpi\,t\sin\varepsilon\,t\Big]$$

$$+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t \quad\cdots\cdots(56)$$

を得。(55) 式中に於て (51) 式の如き ε の極限 ε' を考ふれば

$$\left.\begin{aligned}
u &\fallingdotseq \varpi^3\\
v &= 0
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(57)$$

にして, (57) 式の値を (56) 式中に代入すれば,

$$\phi = \frac{a\,w\,m\,\varpi^3}{(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{a\,b}\sqrt{a\,c}}\sin\varpi\,t\cos\varepsilon'\,t+\frac{a\,w}{(a-m^2)(b-m^2)}\sin m\,t$$

$$= \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}\,w\,m}{2\sqrt{2}\,(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{bc}}\sin\varpi\,t\cos\varepsilon'\,t+\frac{w}{b-m^2}\sin m\,t \quad\cdots\cdots(58)$$

となる。

今 (53) 式と (58) 式とを比較するに, 橋桁の振幅が最大に達せる時, 車輛の振幅は最小に, 橋桁の振幅が最小に達せる時, 車輛の振幅は最大になるのである。斯くして橋桁及び車輛間に勢力の移動が行はれつゝ振動が續行されるので, 機關車々輪の過平衡對重及び軌條繼目に於ける車輪の撃衝等が橋桁の自己振動週期と一致したる場合に橋桁の振幅が無限大になる如き事は無いのである。

5. 車輛の質量も橋桁上を移動する場合の橋桁及び車輛の振動

是迄車輛の質量は常に橋桁の中央部に在りとして橋桁及び車輛の振動式を求めた。然るに實際には車輛は v なる速度を以て橋上を疾走するを以て前假定に基ける振動式が如何なる程度迄眞なるかを檢討しなければならぬ。之が爲には前假定に基いて求めし橋桁の振動式 (1) 式及び (34) 式を用ひ，橋桁が斯かる振動をなせる時其の上を走行せる車輛が如何なる振動をなすかを求め，其の振動式を (34) 式中車輛の振動式に比較せんとするのである。

橋桁の振動は (1) 式及び (34) 式より

$$y=\{A_1\sin p_1t+A_2\sin p_2t+A_3\sin mt\}\sin\frac{\pi x}{l}$$

にて表はさる。

然らば車輛と橋桁との接觸點の軌跡は

$$y=\{A_1\sin p_1t+A_2\sin p_2t+A_3\sin mt\}\sin\frac{\pi vt}{l}\quad\cdots\cdots(59)$$

にて與へられ，車輛の上下振動を η にて表はすとすれば，走行車輛の振動の微分方程式は

$$\frac{W}{g}\frac{d^2\eta}{dt^2}+k(\eta-y)=0\quad\cdots\cdots(60)$$

にて與へられる。今 (59) 式の値を (60) 式中に代入し，且つ (13) 式中に於ける

$$\frac{kg}{W}=a,\qquad \frac{\pi v}{l}=m$$

なる符號を想起すれば微分方程式 (60) 式は

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}+a\eta&=aA_1\sin p_1t\sin mt+aA_2\sin p_2t\sin mt+aA_3\sin^2 mt\\&=\frac{aA_1}{2}\{\cos(p_1-m)t-\cos(p_1+m)t\}+\frac{aA_2}{2}\{\cos(p_2-m)t-\cos(p_2+m)t\}\\&\quad+\frac{aA_3}{2}\{1-\cos 2mt\}\quad\cdots\cdots(61)\end{aligned}$$

にて表はさる。(61) 式を解くは容易の事であつて，一般解は

$$\begin{aligned}\eta=&\,c_1\cos\sqrt{a}\,t+c_2\sin\sqrt{a}\,t+\frac{aA_1}{2}\left\{\frac{\cos(p_1-m)t}{a-(p_1-m)^2}-\frac{\cos(p_1+m)t}{a-(p_1+m)^2}\right\}\\&+\frac{aA_2}{2}\left\{\frac{\cos(p_2-m)t}{a-(p_2-m)^2}-\frac{\cos(p_2+m)t}{a-(p_2+m)^2}\right\}+\frac{A_3}{2}\left\{1-\frac{a}{a-4m^2}\cos 2mt\right\}\quad\cdots\cdots(62)\end{aligned}$$

にて與へらる。(44) 式中 c_1, c_2 は環境條件に依つて決定さるべき任意常數で，今

$$\left.\begin{array}{lll}t=0 & \text{の時} & \eta=0\ldots\text{(i)}\\ \quad〃 & & \dot{\eta}=0\ldots\text{(ii)}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(63)$$

とすれば，(63) 式 (i) の條件より

$$\begin{aligned}c_1=-\Big[&\frac{aA_1}{2}\left\{\frac{1}{a-(p_1-m)^2}-\frac{1}{a-(p_1+m)^2}\right\}+\frac{aA_2}{2}\left\{\frac{1}{a-(p_2-m)^2}-\frac{1}{a-(p_2+m)^2}\right\}\\&+\frac{A_3}{2}\left\{1-\frac{a}{a-4m^2}\right\}\Big]\quad\cdots\cdots(64)\end{aligned}$$

(63) 式 (ii) の條件より

$$c_2=0\quad\cdots\cdots(65)$$

を得。(64) 式及び (65) 式の値を (62) 式中に代入すれば走行車輛の振動式として

$$\eta=\frac{a A_1}{2}\left[\frac{1}{a-(p_1-m)^2}\left\{\cos(p_1-m)t-\cos\sqrt{a}\,t\right\}-\frac{1}{a-(p_1+m)^2}\left\{\cos(p_1+m)t-\cos\sqrt{a}\,t\right\}\right.$$
$$+\frac{a A_2}{2}\left[\frac{1}{a-(p_2-m)^2}\left\{\cos(p_2-m)t-\cos\sqrt{a}\,t\right\}-\frac{1}{a-(p_2+m)^2}\left\{\cos(p_2+m)t-\cos\sqrt{a}\,t\right\}\right.$$
$$+\frac{A_3}{2}\left[\left\{1-\cos\sqrt{a}\,t\right\}-\frac{a}{a-4m^2}\left\{\cos 2mt-\cos\sqrt{a}\,t\right\}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(66)$$

を得。今 (66) 式を變形する爲橋桁及び車輛の自己振動週期の差小なる場合及び比較的大なる場合に就て考へるに

(1) 橋桁及び車輛の自己振動週期の差小なる場合

斯かる場合には $p \fallingdotseq a$ 且つ m は a, p に比して甚だしく小なれば無視するも差支へなく, (66) 式は

$$\eta=\frac{a A_1}{2}\,\frac{1}{a-p_1^2}\left\{\cos(p_1-m)t-\cos(p_1+m)t\right\}+\frac{a A_2}{2}\,\frac{1}{a-p_2^2}\left\{\cos(p_2-m)t-\cos(p_2+m)t\right\}$$
$$+\frac{A_3}{2}\{1-\cos 2mt\}$$

$$\therefore \quad \eta=\left\{\frac{a A_1}{a-p_1^2}\sin p_1 t+\frac{a A_2}{a-p_2^2}\sin p_2 t+A_3\sin mt\right\}\sin mt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(67)$$

となる。(67) 式中括弧の中の式は (34) 式中の ϕ に異らず, (67) 式は簡單に

$$\eta=\phi\sin mt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

となり, 車輛が橋桁の中央部に來りし時は

$$\eta_{\frac{l}{2}}=\phi$$

にして, 之は車輛の質量を中央に定置せる時の振動式である。

(2) 橋桁自己振動週期が車輛の自己振動週期に比して大なる場合

斯かる場合には (37) 式より $p_1=\sqrt{a}$, $p_2=\sqrt{b}$ となり, 且つ橋桁支間の甚だしく小なる場合は除けるを以て m は a, p に比して無視するも差支へ無く, (66) 式は結局

$$\eta=\frac{a A_1'}{2}\left[\frac{1}{2am}\left\{\cos(\sqrt{a}-m)t-\cos\sqrt{a}\,t\right\}+\frac{1}{2am}\left\{\cos(\sqrt{a}+m)t-\cos\sqrt{a}\,t\right\}\right]$$
$$+\frac{a A_2'}{2}\left[\frac{1}{a-b}\left\{\cos(\sqrt{b}-m)t-\cos(\sqrt{b}+m)t\right\}\right]+\frac{a A_3}{2}\left[1-\cos 2mt\right]$$
$$=\frac{A_1'}{2m}\cos\sqrt{a}\,t(\cos mt-1)+\left\{\frac{a A_2'}{a-b}\sin\sqrt{b}\,t+A_3\sin mt\right\}\sin mt$$

にして, 斯かる場合は (38) 式より $A_1'=0$ なれば車輛の振動式は

$$\eta=\left\{\frac{a A_2}{a-b}\sin\sqrt{b}\,t+A_3\sin mt\right\}\sin mt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

となる。(69) 式の括弧の中の式は (45) 式の ϕ と全然等しく (69) 式も亦簡單に (68) 式にて表はす事が出來, 車輛が橋桁の中央に來たりし時には $\eta_{\frac{l}{2}}=\phi$ となるのである。

斯く (1) 及び (2) の場合を通じて (34) 式中橋桁の振動を基礎として求めた車輛の振動の式が (34) 式並に (45) 式中の車輛の振動式と一致する事は 2. の如き假定の下に求めた橋桁の振動式には誤差無きを知るのである。又斯かる場合の車輛の振動式は一般に (68) 式にて表はされる事を知るのである。

(3) 橋桁自己振動週期が車輛自己振動週期に比して小なる場合

斯かる場合は橋桁支間の甚だしく小なる場合であつて m は a, p に對して無視するを得ず，(39) 式中の橋桁の振動式を基礎として求めた車輛の振動式は同式中の車輛の振動式に一致しないのである。故に斯かる場合の橋桁及び車輛の振動は別に考へなければならぬのである。