討　　　　議

第十九卷第五號　昭和八年五月

軌條標準長に就ての調査

（第十八卷第十一號所載）

會員　庄　野　卷　治

本會誌第十八卷第十一號所載軌條標準長に就ての調査は眞に有益貴重なものである。事柄が從來筆者の關與せざる鐵道の問題なる爲，總ての記事が珍らしく面白く且つ有益で新知識を得たことを深謝します。最近ドイツ國有鐵道に於て 30～60 米，更に進んで 90～321 米の軌條を布設せる由には無上の興味を覺えました。地方の狀況より斯樣に軌條の標準長を區別したと云ふよりもこれから標準長を定める資料を得る爲の實驗用として色々に軌條長を變へるのでないかと想像しました。浦山數はドイツの眞劒なる研究振りである。我國でも軌條長を色々に變へての振動測定を切望するのであります。最小働の原理より推し列車の振動は軌條長，路線の狀況等に對し最小の振動をして居る筈で又 10 米軌條より成る軌道の上を走る列車の振動から逆に軌條長を計算して夫が 10 米となるのは固より當然で 10 米が最惡の軌條長であると斷定する資料にはならぬと思ひます。則ち著者の第二圖に於て四輪ボギー車の上下動周期は速度に關せず大體 0.5 秒であることは 10 米軌條の時に斯くなるので軌條長變ずれば亦値が違ひはせぬかの懸念があります。例へば兩端完全に固定されたる桁は自由振動に對し一定の固有周期を有し，振動を附與する瞬間的原因力の量及方法如何に關せず振動周期不變なるも，原因力の爲，若しも兩端完全固定と云ふ環境條件が破れて不充分固定端となる場合には周期が著しく變化します。列車が軌道上を走る時車體の環境條件を解析的に定むるは困難なるを以て，主として實驗に俟つを得策と考へますが軌條長に依ても環境條件が違ひはせぬかと云ふ疑問が當然起るのであります。

列車の振動を緩和するには軌條長の外に共繼手や車輛の改良等幾多の方法があるらしく考へますのみならず，貨物列車の方に多少の我慢が出來るものなら特別客車の改良だけで目的を速達するとか，工費其他の問題で實行迄には愼重の比較研究を必要とする樣に思ひます。要するに各種方面の研究が無ければ比較も何も出來ないのであるから實際上からも著者の研究に重大の價値がある。而して軌條長の異なる色々の試驗軌道を作ることも今の處仲々容易でないから差當り車輛のバネの固有振動周期を既知且つ軌條長に無關係のものとして軌條繼手の衝擊に依る共鳴振動から適當の軌條長を理論的に求むる方法を考究されたるは賢明の處置にして學問上至難なる減衰振動の共鳴を完全に解決されたるは獨り軌條長のみならず，其他各種の實際的振動問題の解答に役立つ眞に貴重な文獻であります。著者が理論的研究の第一步に於て減衰正弦振動と名づけて (1) 式

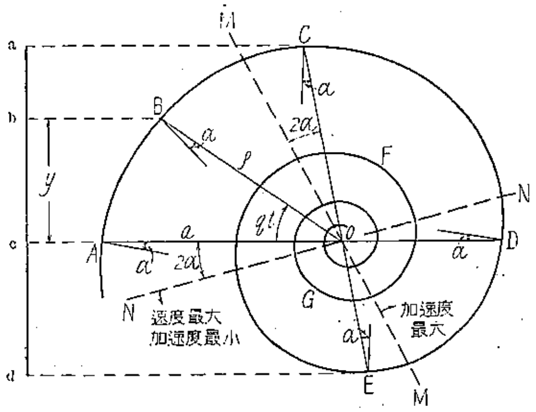
$$y=e^{-\beta t}a\sin 2\pi t$$

を出し拔けに揭げられたには弱りました。斯の如き書方は土木學會に流行しますが非才の筆者にはいつも迷惑します。筆者も亦減衰振動に多大の興味を有するが出發點は常に Barton's "Text Book on Sound" Art. 57～59 に置いて居ます。則ち Barton の所謂 damped harmonic motion を稍々見方を換へて說明する時は均角螺旋弧に沿ひ螺心に向ひ均一角速度を以て移動する質點の運動を一直線上に投影せる運動にして其方程式は別方面より求めて結局

$y=e^{-Kt}a\sin qt$　　式中 q: 均角螺旋弧に沿ふて走る質點の均一角速度

を以て表はし得ることを簡明に書いてあります。勿論この公式に間違は有りませんが時間 t を數へる基點の說明を缺いで居ります。質點が適意の位置にある瞬間から t を數へるものとして本公式は成立致しません。幾何學的に Barton の公式を誘導すれば其理由が判ります。

第　一　圖



上記の法則に從ふ減衰運動を筆者は假りに螺弦運動と名付けました。以下便宜この名稱を用ひます。

第一圖 ABCDEFG は弧線上任意點の動徑が該點の法線と定角 α を爲す所の均角螺旋にして O を螺心とす。適意の直線 ab を質點の螺弦運動の通路とせば O より垂線 Oc を引く時 c は螺弦運動の中位點にして均角螺旋の適意の動徑 ρ を ab に投影せる y は運動中の質點の位置を示すのであります。動徑 ρ の均一角速度を q とし，質點が中位點に在る瞬間即ち ρ が Ac に一致せる瞬間より時間 t を數へる時は t 時間の後には動徑は Oc と qt 角を張り明白に

$$y=\rho\sin qt$$

を得。然るに Lamb's "Infinitecimal Calculus" Art. 126 其他に依り均角螺旋の一般方程式は

$\rho=Ce^{-qt\tan\alpha}$,　　式中 C は任意常數

此場合 $qt=0$ に於ては $\rho=\mathrm{OA}=a$ なるを以て $C=a$ となる。故に

$$\rho=ae^{-qt\tan\alpha}$$

之を上式に入れて

$$y=e^{-qt\tan\alpha}a\sin qt$$

$q\tan\alpha$ なる常數を K にて表はす時は Barton の公式となる。又周期を以て時間の單位とする時は $q=2\pi$ であるから $2\pi\tan\alpha$ なる常數を β にて表はし，著者の (1) 式を得ます。故に著者の公式も Barton の公式も全く同物で双方共質點が中位點に在る瞬間から時間を測る時に成立する公式である。著者も實際其通りに取扱はれて居るから文句は無い筈ですが軸の取り方を言はずにいきなり公式を擧げたのが氣に入らぬと云ふだけであります。著者の (2) 式に依ると a が外觀上 t の函數にして恒數にあらざるやの疑もありますが以上の幾何學的解法に照らし眞の恒數であることが判明します。筆者は他の目的の爲，振幅時則ち質點の速度零の瞬間から時間を測る螺弦運動の公式を利用して多大の便宜を得て居ます爲，中位點より t を測ることを重要視せずに居ましたが著者の (3) 式の樣な重要關係式を容易に求むるには後者が遙かに有利なるを著者の論文にて知るを得ました。減衰振動の共鳴と云ふ難問が著者の努力に依り簡單明瞭且つ完全に解決せるは我學界の誇である。其内にて千慮の一失とも云ふべき些細な間違は學問の見地から指摘して置かねばなりません。夫は振動の振幅に達する時刻の問題である。著者が (7) 式を誘導するに方り $t=\frac{1}{4}$ の時に振幅 A_n に達するとしてあるが A_n は (1) 式 y の最大値であるから

$\frac{dy}{dt}=0$ を滿足する t 時に起らねばならぬ。然るに

$$\frac{dy}{dt}=v=e^{-\beta t}2\pi a\cos 2\pi t-\beta e^{-\beta t}a\sin 2\pi t$$

であるから $t=\frac{1}{4}$ を入れて見ると

$$\frac{dy}{dt}=-\beta ae^{-\frac{1}{4}\beta}\neq 0$$

故に A_n は $t=\frac{1}{4}$ の時に起る筈ありません。第一圖の均角螺旋と螺弦運動の關係から A_n は $qt=\frac{\pi}{2}-\alpha$ の時に起ること明白であります。從て A_n に對する時刻は $t=\frac{1}{q}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ である。著者の如く周期を時間の單位とする時は $q=2\pi$ であるから A_n の起る時刻は $t=\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}$ である。故に (7) 式の前の式は

$$A_n=(y_n)_{t=\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}}=a_ne^{-\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\beta}$$

とならねばなりません。併し乍ら新舊何れの振動も振動周期 β, α 共に相等しきから著者の (7) 式は元通りで上記間違の影響を受けません。斯の如く振幅恒數や振幅の比を考へる總のて場合この間違の影響現はれざるも單獨に各振幅を考へる場合等は其影響を受けます。例へば著者の第十八圖減衰する次々の振幅 A, A', A'', ... は

$$A=ae^{-\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\beta}$$

$$A'=ae^{-\left(\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\beta}$$

$$A''=ae^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\beta}$$

....

一般に $$A^{(r)}=ae^{-\left\{\frac{1}{4}(2r+1)-\frac{\alpha}{2\pi}\right\}\beta}$$

とならねばならぬ爲，著者の平均振幅及振動エネルギーは違つて來ます。今の儘では螺旋率を無視せる略式となります。著者の方法は β を指定して減衰振動を定めるのであるから β を知つて螺旋率 α を求むる必要がある。著者の β は既記の如く $2\pi\tan\alpha$ のことであるから

$$\tan\alpha=\frac{1}{2\pi}\beta,\qquad \alpha\ \text{が微角の時は}\ \alpha=\frac{1}{2\pi}\beta$$

を以て α を求めればよい。

減衰振動を考究するに方り單弦運動と螺弦運動の異なる要點を知つて置くことが必要と信じます。單弦運動は遞次の振幅及周期は不變にして其運動弧線は振幅の左右並に中位點の上下互に對稱的である。又中位點にて速度最大，加速度零，又最離點則ち振幅時に速度零，加速度最大なるは周知の事柄である。然るに螺弦運動は遞次の周期が不變なること及最離點にて速度零なることが單弦運動に一致するのみで其他は皆違ふのであります。則ち第一圖に於て AD を中位點 c に對する直徑，CE を最離點 a と b に對する直徑とせば圖の如く AD と 2α 角を爲す直徑 NN は速度最大，加速度零なる點の指導直徑にして螺旋弧との交點を ab 線に投影せる位置は螺弦運動の速度最大，加速度零の位置である。同樣に CE 線と圖の如く 2α 角を爲す MM 直徑は加速度最大なる點の指導直線である。而して AD 直徑と CE 直徑は直角に交叉するものでありません。故に時間 t を橫距，y を縱距にこの螺弦運動を圖示すれば第二圖の通りにて速度及加速度の最大，最小の位置が單弦運動と異なる樣子がよく判る。特に注意すべきは中位點から最離點に至る迄の時間は最離點から中位點に至る時間よりも少なきことで

ある。則ち前者は弧線が急勾配を為し，後者は緩勾配である。この意外な事柄を筆者は減衰振動の研究に着手の當座は肯定すべきや否やに就て煩悶しました。其故は振動勢力不滅を前提とする單弦運動と減衰する螺弦運動は双方共不充分ながら同等の根據があることを前掲 Barton の著書から發見するので之を否定又は改造する勇氣も實力もありません。又實驗に依て之を確めることも筆者には出來ないからであります。然しいくら心配しても仕方が無いので遂に無條件に Barton の螺弦運動を受け入れたのですが本會誌第十七卷第十二號に三浦博士の發表せる單鉸拱の振動に關する貴重なる實驗報告中に在る振動弧線に不充分ながら上記の減衰法則が現はれ居るを見て大に安心した譯であります。本問題は相當重要と信じますからこの機會に於て諸般の便宜を有する著者及大方篤學の士に研鑽の勞を悃願する次第であります。又 simple beam 等では材質に應じ著者の β は 0.045 ($\alpha=0°20'$) 未滿から多くも 0.3 ($\alpha=2°44'$) を超えざるを普通とするも列車のバネは摩擦の作用あるを以て餘程大きくなることが推量出來ます。著者が $\beta=1$ ($\alpha=9°2'30''$) を使用せるは客車の實際から割出せる由なるがこの係數は殊に本問題に重要であるから猶は詳密の御研究を希望致します。

第 二 圖