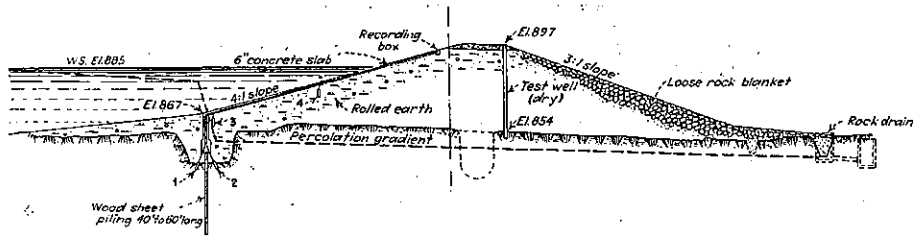


第三圖



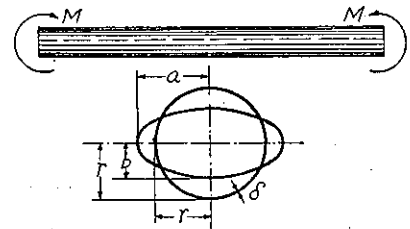
本装置が Chatsworth 第二堰堤に設置せられてより以後、各種の改良點が考案せられ、Upper Hollywood 堰堤では電氣分解により腐蝕するのを避ける爲  $\frac{3}{4}$  吋の外管の代りに 1 吋の銅製の外管を用ひるそうである。此様に外管を多少太くした爲、前記の補正は 50% も小さくする事が出来る。堰堤が高い程管の径は大なる事が望ましく、200 呎の堰堤では  $1\frac{1}{2}$  吋以下では宜しくない。内側の管も其長さが 300 呎以上になれば空氣の摩擦抵抗を少くする爲、 $\frac{3}{16}$  吋以上の管を用ひねばならぬ。將來本器を裝置する場合には well point の代りに、銅管の先端を平にして閉じ下部 18 吋の長さの部分に  $\frac{3}{16}$  吋の孔を穿つ事にならう。堰堤が高い場合は壓力計が巨大となるのを避け、壓力計の読み易い様範圍を狭め、水位の廣い範圍の上下をも読み得る様に、内部の銅管は引き下げ得る様にする。又普通堰堤の長さが底巾より長い場合には堰堤の中央部に設けた一つの觀測函まで各地の管を導く様に出来るが、Chatsworth 第二堰堤は特に低く長く一箇所に管を集める事が出来ず、觀測函を 4 箇所に据付け、壓力計はゴムのホースで各觀測函中の分岐管に連結する事にした。(野口 誠抄譯)

## 厚さの薄い圓管の彎曲に就て

(E. Chwalla, Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse ; Zeitsch. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 13, Heft 1, Februar 1933.)

厚さ  $\delta$  が極めて薄い圓管に曲モーメント  $M$  が作用する場合を考へる。撓みと無關係に斷面の形狀が常に一定であると考へる普通の彎曲論に従へば、曲モーメントと撓み若くは應用とが常に正比例して、茲に特説する必要の無い程簡単な問題である。然し厚さの薄い圓管が彎曲した場合には其の斷面は最早圓形ではなく、第一圖に示すが如き楕圓形狀になり、従つて斷面の慣性モーメントは常に一定ではなく彎曲と共に刻々に變化することになる。故に、假令應力と歪とが正比例すると言ふフックの法則、變形前平面であつた斷面は變形後も平面であると言ふベルヌーリ・オイラーの假説を假定しても、曲モーメントと撓み若くは應力とは正比例しない。

第一圖



今、平均半徑  $r$  の圓形斷面が、彎曲に依つて楕圓になるものと假定し、且つ斷面の平均周邊長  $U$  には變化がないものと假定すれば、 $U=2r\pi$  より

$$\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}\right) \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \frac{1}{256} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \dots\right] - 2 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

となり、之より  $b/r = f(a/r)$  として  $b/r$  と  $a/r$  との關係を圖示すれば第二圖の如くなる。

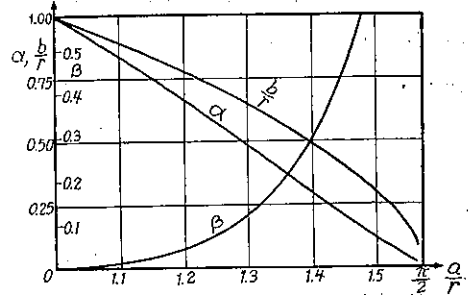
楕圓形に變形した斷面の慣性モーメント  $J$  は

$$J = \alpha \cdot \pi \delta r^3 \dots\dots\dots(2)$$

但し 
$$\alpha = \frac{b^2}{r^2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2r^2}} \cdot \left(1 + \frac{\mu}{4} - \frac{\mu^2}{16} + \frac{3\mu^3}{122} - \dots\right), \mu = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \dots\dots\dots(3)$$

であつて、 $\alpha$  は  $a/r$  及び  $b/r$  の函数である。然るに  $b/r = f(a/r)$  であるから、 $\alpha$  も  $a/r$  の函数即ち  $\alpha = f_1(a/r)$  とすることが出来、之を圖示すれば第二圖の如くなる。

第 二 圖



次に彎曲した圓管の中立軸の曲率、即ち彈性曲線の曲率

$1/\rho$  と斷面の變形との關係は、圓管の變形に依る彈性エネルギーを最小ならしめる様に之を求める。單位長當りの彈性エネルギー  $A$  は、之を中立軸の撓みに依るエネルギー  $A_B$  と斷面の變形に依るエネルギー  $A_R$  とに分けることが出来る。即ち

$$A = A_B + A_R \dots\dots\dots(4)$$

であつて、このうち  $A_B$  は

$$A_B = \frac{EJ}{2\rho^2} = \frac{E\pi\delta r^3\alpha}{2\rho^2} \dots\dots\dots(5)$$

であり、 $\nu$  を材料のポアソン比、 $1/\rho'$  を斷面が變形した楕圓の各點に於ける曲率、 $ds$  を其周邊長に沿つての微分長とすればは、 $A_R$  は

$$A_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_U \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r}\right)^2 ds = \beta \frac{\pi E \delta^3}{2r} \dots\dots\dots(6)$$

但し 
$$\beta = \frac{b^2 r}{6a^3(1-\nu^2)} \left(1 - \frac{a^2}{b^2 r} + \sum_1^\infty \gamma_n C_n k^{2n}\right),$$

$$\gamma_n = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}, \quad C_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)},$$

$$k = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} < 1$$

となる。此のうち  $\beta$  は  $a/r$  の函数、即ち  $\beta = f_2(a/r)$  とすることが出来、之を  $\nu = 3/10$  として圖示すれば第二圖の如くなる。(4)式より

$$A = A_B + A_R = \frac{E\pi\delta^3}{2r} \left(\frac{r^4}{\rho^2\delta^2} \alpha + \beta\right) = f_3\left(\frac{a}{r}\right) \dots\dots\dots(8)$$

となり、「 $A$ =最小」の條件より

$$\frac{\partial A}{\partial \left(\frac{a}{r}\right)} = 0 \quad \text{即ち} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\delta}{r^2} \cdot \sqrt{-\frac{\partial \beta}{\partial \left(\frac{a}{r}\right)} : \frac{\partial \alpha}{\partial \left(\frac{a}{r}\right)}} \dots\dots\dots(9)$$

を得るから、此の式に依つて  $a/r$  と彈性曲線の曲率  $1/\rho$  との關係を求めることが出来る。

上記の式に於てはすべて  $a/r$  をパラメーターとして表はしたが、曲モーメント  $M$  と曲率  $1/\rho$  との間には

$$M = \frac{EJ}{\rho} = \alpha \frac{r^2}{\delta\rho} \pi E r \delta^2 \quad \text{即ち} \quad \frac{M}{\pi E r \delta^2} = \alpha \frac{r^2}{\delta\rho} \dots\dots\dots(10)$$

なる關係があり  $M/\pi E r \delta^2$  も  $\alpha r^2/\delta\rho$  も共に  $r/\rho$  の函數であるから、結局

$$\frac{M}{\pi E r \delta^2} = \Phi \left( \frac{r^2}{\delta} \cdot \frac{1}{\rho} \right) \dots\dots\dots(11)$$

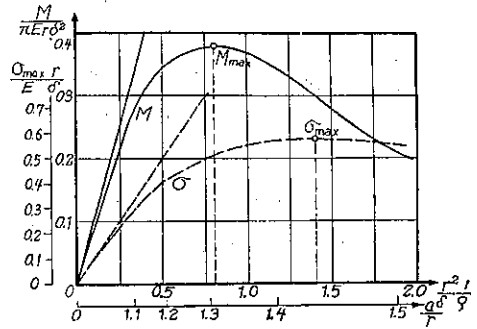
となり、 $M$  を  $1/\rho$  の函數とすることが出来る。之を圖示すれば第三圖の如くになり、之に依つて  $M$  と  $1/\rho$  とが正比例せず、且つ  $M$  に極限值  $M_{max}$  の存在することがわかる。

此の極限值は  $r^2/\delta\rho = 0.806$  のときに起り、其の値は

$$M_{max} = 0.378 \pi E r \delta^2 \dots\dots\dots(12)$$

である。之は即ち厚さの薄い圓管の堪え得る曲モーメントの最大値である。此の様に  $M$  に其の極限の存在することは、斷面の形狀が  $M$  の増大と共に段々と扁平になることに基因するものであつて、今比較のために斷面の形狀は常に圓であるとする、即ち  $J = \pi \delta r^3$  (常數) とする普通の彎曲理論に従へば、 $M$  と  $1/\rho$  とは第三圖の直線で示すが如く正比例する。

第三圖



圓管の斷面に生ずる最大纖維應力即ち縁應力  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{Mb}{J} = \frac{Mb}{\alpha \pi \delta r^3} = \frac{\delta E}{r} \cdot \Phi_1 \left( \frac{r^2}{\delta} \cdot \frac{1}{\rho} \right) \dots\dots\dots(13)$$

であつて、 $\sigma$  もまた  $r^2/\delta\rho$  の函數になり、其の極限值をもつて居る。即ち第三圖に示すが如く  $r^2/\delta\rho = 1.4$  のときに其の極限值

$$\sigma_{max} = 0.578 \frac{E\delta}{r} \dots\dots\dots(14)$$

になる。茲に注意すべきことは  $M$  が其の最大値になるときに  $\sigma$  が最大とはならないことである。之は勿論斷面の形狀が刻々に變化することに基因するものである。比較のために  $J = \pi \delta r^3$  (常數) とする普通の彎曲理論に従へば

$$\sigma = \frac{M}{\pi \delta r^2} = \frac{E\delta}{r} \cdot \left( \frac{r^2}{\delta} \cdot \frac{1}{\rho} \right) \dots\dots\dots(15)$$

となり、第三圖に示すが如く  $\sigma$  と  $1/\rho$  とは正比例する。

(福田武雄抄譯)