

論 說 報 告

第十九卷第三號 昭和八年三月

軸方向力を受くる鉄筋コンクリート部材に於ける應力の分布に関する二三の理論的問題に就て

會員 工學博士 福 田 武 雄

On Some Problems connected with the Distribution of Stresses in Reinforced Concrete Members acted upon by Axial Forces

By Takeo Fukuda, Dr. Eng., Member.

内 容 梗 概

本文は銲接部材或は銲結部材に於ける應力分布に関する解法に従ひ、コンクリート及鉄筋の平均變形の差と附着應力が正比例すると言ふ假定を基準として、軸方向力を受ける鉄筋コンクリート部材中の應力分布の有様を理論的に求めたものである。其結果は、今まで普通に附着強度の實驗結果を基準とし、之に或る種の假定を設くることに依つて想像せられた應力分布の有様とは可成り異なるものがある。また同様にコンクリートが收縮或は膨脹することに依つて生ずる固有初應力の分布を理論的に求めたが、此解法に従へば、横断面はコンクリートの變形後も平面であると言ふ假定に基く普通の解法の與へる値より一般に小なる固有初應力が得られる(著者)。

1. 序 説

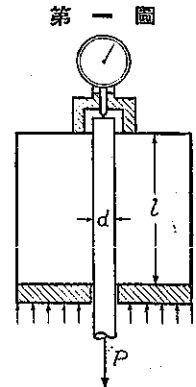
鉄筋コンクリートの附着強度に関しては古來多數の詳細なる實驗が行はれたが、鉄筋とコンクリートとの接觸面に作用する界面應力即ち附着應力の分布に関する實驗的或は理論的研究は其數甚だしい。今までに發表せられた附着應力の分布に関する説は、すべて引抜試験又は押込試験に依る附着強度の値が鉄筋の埋込長に依つて變化すると言ふ事實に立脚するか、或は單なる想像的假説であるに過ぎない。

上記の想像的假説は別問題として、引抜試験又は押込試験の結果より附着應力の分布を求めるには一般に次の如き方法に依る。例へば第一圖に示すが如き方法で附着強度を實驗するのが普通であつて、其結果附着強度は

$$\tau_0 = \frac{P}{Ul} \dots \dots \dots (1)$$

(但し τ_0 = 附着應力又は附着強度, P = 鉄筋に作用する軸方向力, U = 鉄筋横断面の周邊長, l = 鉄筋の埋込長)

なる式に依つて、即ち附着應力が接觸面全部に均等に分布すると言ふ假定のもとに算出されるのが常である。従つて(1)式に依つて算出される附着強度の値が鉄筋の埋込長に依つて變化すべきことは明かなことである。附着強度と埋込長との關係が第二圖中の 0, 1, ... 5 の如き點で示されるものとすれば、埋込長の如何に拘はらず鉄筋端の附着應力が或る一定値に達した時に鐵筋の滑動が起るものと假定することに依り、次の如くにして任意の埋込長の場合の附着應力の分布が求められる⁽¹⁾。今假りに曲線 0 1' 2' 3' が埋込長 l なる場



(1) Mörsch, Der Eisenbetonbau, II/1, 1923, S.

合の附着應力の分布を示すものと假定すれば、斜線を施せる面積 A_1 と A_2 とは相等しくなければならない。従つて 1 乃至 5 の各點に就て斯の如く A_1 と A_2 とを相等しくする様な曲線 $01'2'3'4'5'$ が求められれば、之に依つて實驗範圍内の任意の埋込長に於ける附着應力の分布を知ることが出来る。

また Feret⁽²⁾ は Bach⁽³⁾ の實驗結果を

$$P = Kl^{3/4} \dots\dots\dots (2)$$

なる式で表はした。但し P は第一圖の如き方法で引抜試験を行ふ場合に鉄筋端が滑動し始める引張荷重、 l は埋込長、 K は鉄筋断面の形狀、寸法及コンクリートの品質等に依る常數である。今、上記 (2) 式を利用して附着應力の分布を求めるに、第三圖に於て左端より x なる距離に於ける鉄筋中の張力を P_x 、張應力を σ_x 、附着應力を τ_0 とすれば、 x が dx だけ増加した爲に生ずる P_x の増加 dP_x は dx 間の附着應力の總和に相等しきが故に

$$dP_x = U \tau_0 dx \quad \text{即ち} \quad \tau_0 = \frac{1}{U} \frac{dP_x}{dx}$$

となり、(2) 式を利用して

$$P_x = Kl^{3/4}, \quad \frac{dP_x}{dx} = \frac{3}{4} \frac{1}{x^{1/4}}$$

であるから、 τ_0 は

$$\tau_0 = \frac{3K}{4Ux^{1/4}} \dots\dots\dots (3)$$

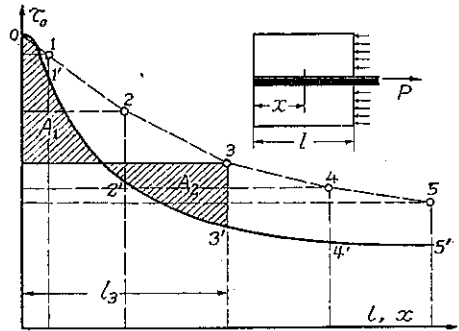
となり、 σ_x は

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_s} = \frac{K}{A_s} x^{3/4} \dots\dots\dots (3a)$$

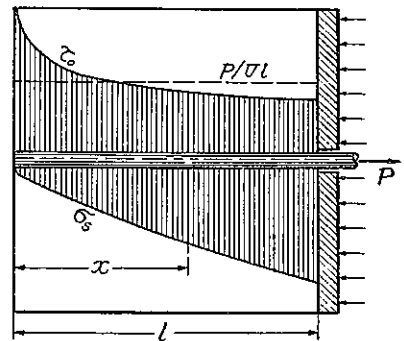
となる。(3) 及 (3a) 式に依つて應力の分布を求むれば大略第三圖に示すが如きものになる。

之等はすべて大抵の教科書に記載されて居る事項であるが、すべて鉄筋の一端に力が加へられた場合に他の一端が漸に滑動を開始せんとする状態を基準として居る。従つて荷重作用點に近い部分に於ては既に事實上相當の滑動が生じて居つてコンクリートと鉄筋との附着が既に破れて居る状態である。また鉄筋の滑動が始まる場合の附着應力は埋込長の如何に拘はらず常に相等しいと言ふ假定せることも忘れることは出来ない。故に埋込長の各點に於て未だ何等の滑動も生じて居らない状態に對しては上記の事柄を適用することは不可能である。そこで著者は、Arnoljevič が既に發表した此種の問題の解法⁽⁴⁾に從つて、之を今少しく一般的に解き、鉄筋とコンクリートとの間の附着應力及應力の分布に關する二三の問題に就て以下記述するが如き理論的解法を試みた。此問題の解法は言ふまでもなく 銲接或は銲結せられたる部材に於ける應力の分布

第二圖



第三圖



(2) Zeitsch. d. V. d. I. 1911, S. 1270.

(3) Zeitsch. d. V. d. I. 1911, S. 859.

(4) Arnoljevič, Das Verteilungsgesetz der Haftspannungen bei axial beanspruchten Verbundstäben (Z. f. Arch.- u. Ingenieurwesen, 1909, S. 413).

に關する問題⁽⁵⁾と同様であるが、之と相違する點は部材が彈性係数を異にする二材料より形成されると考へたことである。従つて以下の解法は主として鉄筋コンクリートを其對象としたのであるが、一般に彈性係数を異にする二材料を鑄接或は銲結した場合にも之を應用することが出来る。

以下の理論的解法の基準をなす假定は次の如きものである。

(1) コンクリート及鐵筋の斷面重心は一致し、部材に彎曲を生ぜざるものとする。
 (2) 問題をすべて彈性の成立する範圍に限定する。従つてコンクリートの縦彈性係數 E_c 及鐵筋の縦彈性係數 E_s を夫々一定とし、 E_c と E_s との比を n で表はす。

(3) 縦變形のみを考慮し、横變形は之に對して省略する。即ちポアソン比の影響を無視する。

(4) 部材の横斷面は變形後は一般に第四圖 (a) の如き曲面となるが、コンクリートの平均變形と鐵筋の平均變形との差を s で以つて表はす。

(5) コンクリートに作用する垂面應力及鐵筋に作用する垂面應力は一般に斷面中一様ではないが、第四圖 (b) に示すが如く其平均値を夫々 σ_c 及 σ_s とする。

(6) 附着應力 τ_0 はコンクリート及鐵筋の平均變形の差 s に正比例するものと假定する⁽⁶⁾。即ち

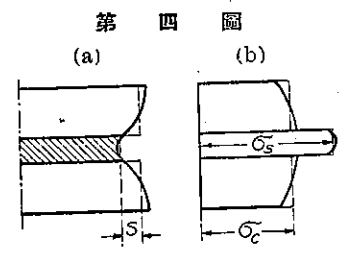
$$s = k \tau_0 \dots \dots \dots (4)$$

(7) 垂面應力はすべて壓縮の場合を正とし、鐵筋がコンクリートに對して左方に移動せんとする場合に s 及 τ_0 を正と規約する。

之等の假定が爲される限り、之に立脚する以下の解法の結果を以て直ちに眞なりとし、或はまた何れの場合にも常に應用が出来ると云ふ様な僭越なる主張はしないが、然し之に依つて多少なりとも此種の問題の理論的補足を加へることが出来れば望外の幸である。特に以下の解法の結果と第二圖或は第三圖に示したものと根本的に相違することを注意したい。此相違は言ふまでもなく基準とする荷重狀態及假定の相違によつて來る所である。

2. 部材の兩端の垂面應力が與へられたる場合の一般解法

第五圖に示すが如く部材の長さを l とし、 x の原點を左端にとる。 $x = 0$ に於てコンクリートに σ_c' 、鐵筋に σ_s' なる壓應力が作用し、 $x = l$ に於てコンクリートに σ_c'' 、鐵筋に σ_s'' なる壓應力が作用する場合に、部材内部に於ける σ_c 、 σ_s 及 τ_0 の變化の有様を求めんとする。



⁽⁵⁾ Arnovljević, Zur Kraftverteilung in genieteten Stäben (Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bau-dienst, 1908, Heft 34); Inanspruchnahme der Anschlussnieten elastischer Stäbe (Z. f. Arch.- u. Ingenieur-wesen, 1909, Heft 2);

Fillunger, Über die Festigkeit von Löt-, Leim- und Nietverbindungen (Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bau-dienst, 1919, Heft 7/8);

Hovogaard, Die Spannungsverteilung in Schweissungen (Z. f. angewandte Math. u. Mech., 1931, Heft 5) etc.

Ernst Melan, Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen (Ingenieur-Archiv, III Bd., Heft 2, Mai 1932.)

⁽⁶⁾ 此假定は實に本問題に於ける最も重要なる假定の一つではあるが、鐵筋コンクリートに關する限り之が果して實用上妥當であるや否や、或はまた此假定が成立するとしても k の値が如何程であるかに就ては、之を判斷するに足る充分なる實驗結果は今までの所見當らない様である。従つて本假定の成否に關する限り之を後日の研究に保留し、尙之に關して會員先輩諸賢よりの御討議又は御叱正を賜はらんことを希望する次第である。

コンクリートの横断面積を A_c 、鉄筋の横断面積を A_s とすれば、
先づ部材の任意の横断面に於ける垂面力の平衡条件より

$$A_c \sigma_c + A_s \sigma_s = A_c \sigma_c' + A_s \sigma_s' = A_c \sigma_c'' + A_s \sigma_s'' \dots\dots\dots(5)$$

でなければならない。

次に鉄筋横断面の周縁長を U とすれば、第六圖に示すが如く長さ dx なる鉄筋に作用する力の平衡条件より

$$A_s d\sigma_s = U dx \tau_0, \text{ 或は } \frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{U}{A_s} \tau_0 \dots\dots\dots(6)$$

を得る。

また dx の間に於ける s の變化を ds とすれば、之は第七圖に示すが如く dx の間に於けるコンクリート及鉄筋の平均變形の差に等しいから

$$ds = k d\tau_0 = \left(\frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\sigma_c}{E_c} \right) dx,$$

即ち
$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{1}{k} \left(\frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\sigma_c}{E_c} \right) \dots\dots\dots(7)$$

となる。

茲に於て (5), (6) 及 (7) の 3 式より σ_c と σ_s とを消去すれば、 τ_0 に関して

$$\frac{d^2 \tau_0}{dx^2} - \alpha^2 \tau_0 = 0 \dots\dots\dots(8)$$

なる微分方程式を得る。但し α^2 は

$$\alpha^2 = \frac{U(A_c E_c + A_s E_s)}{k A_c E_c A_s E_s} = \frac{U(1 + n p)}{k A_s E_s} = \frac{U \left(1 + \frac{1}{n p} \right)}{k A_c E_c} \dots\dots\dots(9)$$

で與へられる常數であつて、微分方程式 (8) の一般解は

$$\tau_0 = A \textcircled{\cos} \alpha x + B \textcircled{\sin} \alpha x \dots\dots\dots(10)$$

で表はされる。茲に A 及 B は邊縁条件に依り決定される常數である。

A 及 B を決定するには (7) 式に依るのが便利である。即ち (10) 式の兩邊を x にて微分すれば

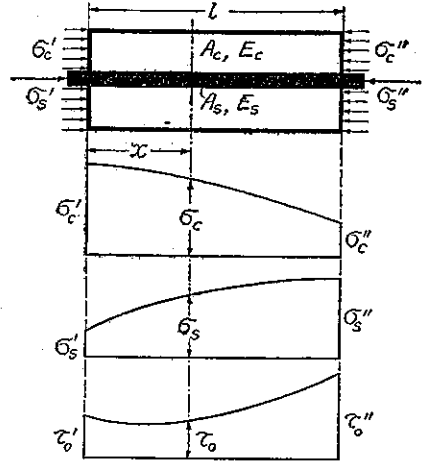
$$\frac{d\tau_0}{dx} = \alpha (A \textcircled{\sin} \alpha x + B \textcircled{\cos} \alpha x) \dots\dots\dots(11)$$

となり、 $x=0$ に於ては $\sigma_c = \sigma_c'$ 、 $\sigma_s = \sigma_s'$ 、 $x=l$ に於ては $\sigma_c = \sigma_c''$ 、 $\sigma_s = \sigma_s''$ なるに依り

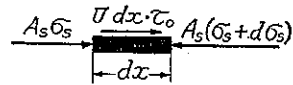
$$\left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)_{x=0} = \alpha B = \frac{1}{k} \left(\frac{\sigma_s'}{E_s} - \frac{\sigma_c'}{E_c} \right),$$

$$\left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)_{x=l} = \alpha (A \textcircled{\sin} \alpha l + B \textcircled{\cos} \alpha l) = \frac{1}{k} \left(\frac{\sigma_s''}{E_s} - \frac{\sigma_c''}{E_c} \right)$$

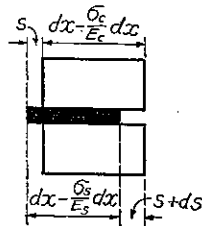
第五圖



第六圖



第七圖



を得、此兩式より A 及 B を解けば

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(\sigma_s'' - n \sigma_c'') - (\sigma_s' - n \sigma_c') \cos \alpha l}{\alpha k E_s \sin \alpha l}, \\ B &= \frac{\sigma_s' - n \sigma_c'}{\alpha k E_s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

となり、之を (10) 式に代入すれば

$$\tau_0 = \frac{(\sigma_s'' - n \sigma_c'') \cos \alpha x - (\sigma_s' - n \sigma_c') \cos \alpha (l - x)}{\alpha k E_s \sin \alpha l} \dots \dots \dots (13)$$

を得、之に依つて本問題は一般的に解決されたものと考へることが出来る。特に $x = 0$ 及 $x = l$ に於ける附着應力を τ_0' 及び τ_0'' とすれば

$$\left. \begin{aligned} \tau_0' &= \frac{(\sigma_s'' - n \sigma_c'') - (\sigma_s' - n \sigma_c') \cos \alpha l}{\alpha k E_s \sin \alpha l}, \\ \tau_0'' &= \frac{(\sigma_s'' - n \sigma_c'') \cos \alpha l - (\sigma_s' - n \sigma_c')}{\alpha k E_s \sin \alpha l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13a)$$

尙 σ_c 及 σ_s は夫々

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_c' - \frac{U}{A_c} \int_0^x \tau_0 dx = \sigma_c'' + \frac{U}{A_c} \int_x^l \tau_0 dx, \\ \sigma_s &= \sigma_s' + \frac{U}{A_s} \int_0^x \tau_0 dx = \sigma_s'' - \frac{U}{A_s} \int_x^l \tau_0 dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

なる關係に依つて

$$\sigma_c = \frac{1}{(1+n)p \sin \alpha l} \left[(\sigma_c' + p \sigma_s') \sin \alpha l - p (\sigma_s'' - n \sigma_c'') \sin \alpha x - p (\sigma_s' - n \sigma_c') \sin \alpha (l-x) \right], \dots \dots \dots (15)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{(1+n)p \sin \alpha l} \left[n (\sigma_c' + p \sigma_s') \sin \alpha l + (\sigma_s'' - n \sigma_c'') \sin \alpha x + (\sigma_s' - n \sigma_c') \sin \alpha (l-x) \right] \dots \dots \dots (16)$$

となるが、 σ_c 及 σ_s を各々兩式に依つて計算する必要はない。それは σ_c 及 σ_s のうち何れか一つが求められれば、他は (5) 式、即ち

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_c' + n (\sigma_s' - \sigma_s) = \sigma_c'' + n (\sigma_s'' - \sigma_s), \\ \sigma_s &= \sigma_s' + \frac{1}{n} (\sigma_c' - \sigma_c) = \sigma_s'' + \frac{1}{n} (\sigma_c'' - \sigma_c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15a)$$

に依つて求め得るからである。

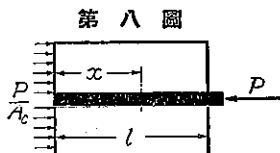
3. 二三の特殊なる場合に對する解法

(1) 押込試験の場合

第八圖に示すが如く鉄筋の一端に P なる壓力を加へて之をコンクリート中に押込まんとする場合には

$$x=0: \quad \sigma_c' = \frac{P}{A_c}, \quad \sigma_s' = 0,$$

$$x=l: \quad \sigma_c'' = 0, \quad \sigma_s'' = \frac{P}{A_s}$$



である。従つて 2. の一般解より直ちに次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\alpha P [\cos \alpha x + n p \cos \alpha (l-x)]}{U(1+np) \sin \alpha l}, \\ \tau_0' &= \frac{\alpha P (1+np) \cos \alpha l}{U(1+np) \sin \alpha l}, \\ \tau_0'' &= \frac{\alpha P (\cos \alpha l + n p)}{U(1+np) \sin \alpha l}; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\sigma_c = \frac{P [\sin \alpha l - \sin \alpha x + n p \sin \alpha (l-x)]}{A_c(1+np) \sin \alpha l} \dots\dots\dots (18)$$

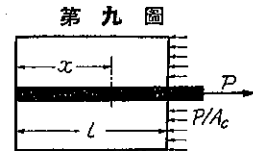
$$\sigma_s = \frac{P [n p \sin \alpha l + \sin \alpha x - n p \sin \alpha (l-x)]}{A_s(1+np) \sin \alpha l} \dots\dots\dots (19)$$

(2) 引抜試験の場合

第九圖に示すが如く鉄筋の一端に P なる張力を加へて之をコンクリートより引抜かんとする場合には

$$\begin{aligned} x=0: & \quad \sigma_c' = \sigma_s' = 0, \\ x=l: & \quad \sigma_c'' = \frac{P}{A_c}, \quad \sigma_s'' = -\frac{P}{A_s} \end{aligned}$$

である。従つて 2. の一般解より直ちに次の結果を得る。



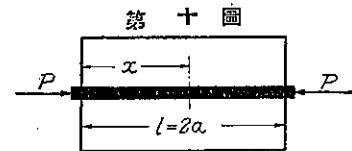
$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= -\frac{\alpha P \cos \alpha x}{U \sin \alpha l} = \tau_0' \cos \alpha x, \\ \tau_0' &= -\frac{\alpha P}{U \sin \alpha l}, \quad \tau_0'' = \tau_0' \cos \alpha l, \\ \sigma_c &= +\frac{P \sin \alpha x}{A_c \sin \alpha l} = -p \sigma_s, \\ \sigma_s &= -\frac{P \sin \alpha x}{A_s \sin \alpha l} = -\frac{1}{p} \sigma_c. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(3) 鉄筋の両端に壓力を加へる場合

第十圖に示すが如く鉄筋の両端に P なる壓力を加へた場合、其間に於て生ずる附着應力、コンクリート及鉄筋の壓應力の分布を求める。此場合は

$$\sigma_s' = \sigma_s'' = \frac{P}{A_s}, \quad \sigma_c' = \sigma_c'' = 0$$

であるから、一般解より



$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\alpha P [\cos \alpha x - \cos \alpha (l-x)]}{U(1+np) \sin \alpha l}, \\ \sigma_c &= \frac{P [\sin \alpha l - \sin \alpha x - \sin \alpha (l-x)]}{A_c(1+np) \sin \alpha l}, \\ \sigma_s &= \frac{P [n p \sin \alpha l + \sin \alpha x + \sin \alpha (l-x)]}{A_s(1+np) \sin \alpha l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となり、茲に於て $l = 2a$ とすれば次の結果となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= -\frac{\alpha P \sin \alpha(a-x)}{U(1+np) \cos \alpha a}, \\ \tau_0' &= -\tau_0'' = -\frac{\alpha P \sin \alpha a}{U(1+np)}, \\ \sigma_c &= \frac{2P \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \alpha \left(a - \frac{x}{2}\right)}{A_c(1+np) \cos \alpha a}, \\ \sigma_s &= \frac{P[np \cos \alpha a + \cos \alpha(a-x)]}{A_s(1+np) \cos \alpha a}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21a)$$

(4) コンクリートの両端に壓力を加へる場合

第十一圖に示すが如くコンクリートの両端にのみ P なる壓力を加へる場合には

$$\sigma_c' = \sigma_c'' = \frac{P}{A_c}, \quad \sigma_s' = \sigma_s'' = 0$$

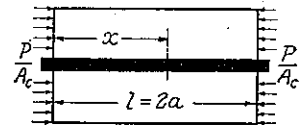
であるから、一般解より

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\alpha np P [-\cos \alpha x + \cos \alpha(l-x)]}{U(1+np) \sin \alpha l}, \\ \sigma_c &= \frac{P[\sin \alpha l + np \sin \alpha x + np \sin \alpha(l-x)]}{A_c(1+np) \sin \alpha l}, \\ \sigma_s &= \frac{np P [\sin \alpha l - \sin \alpha x - \sin \alpha(l-x)]}{A_s(1+np) \sin \alpha l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

を得、茲に於て $l = 2a$ とすれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\alpha np P \sin \alpha(a-x)}{U(1+np) \cos \alpha a}, \\ \tau_0' &= -\tau_0'' = \frac{\alpha np P \sin \alpha a}{U(1+np)}, \\ \sigma_c &= \frac{P[\cos \alpha a + np \cos \alpha(a-x)]}{A_c(1+np) \cos \alpha a}, \\ \sigma_s &= \frac{2np P \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \alpha \left(a - \frac{x}{2}\right)}{A_s(1+np) \cos \alpha a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22a)$$

第 十 一 圖



4. コンクリートの収縮或は膨脹に依る應力分布の理論的解法

コンクリートは其硬化作用の進むに従つて、乾燥養生の場合には収縮し、濕潤養生の場合には膨脹するのが常である。従つて鉄筋コンクリート部材には之が爲に一般に固有初應力を生ずるものであつて、此場合多くの教科書に記載されて居る解法はすべて變形前平面であつた横斷面は變形後も平面であると言ふ假定に基いたものである。(7)例へば部材の變形が完全に自由であつて、コンクリート及鉄筋の斷面重心が一致する場合に、無筋コンクリートに ϵ なる變形率が生ずるものとすれば、部材全長に亘つて一樣に

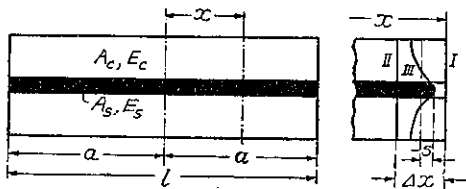
(7) 例へば R. Saliger, Der Eisenbeton, 1920, S. 68 参照。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= \frac{np E_c \varepsilon}{1 + np} = \frac{p E_s \varepsilon}{1 + np} = p \sigma_s, \\ \sigma_s &= \frac{E_s \varepsilon}{1 + np} = \frac{1}{p} \sigma_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

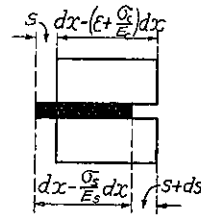
なる應力が生ずることになる。但しコンクリートが収縮する場合には σ_c は張應力、 σ_s は壓應力であり、コンクリートが膨脹する場合には之と反対である。尙此解法に於ては附着應力のことは全然考慮されて居ない。

然し實際に於ては平面であつた横断面がコンクリートの變形に依つて一般に第十二圖に示すが如く曲面になると考へる方が至當ではあるまいか。それで茲に於ては 1. に述べた一般假定に従つて、鐵筋及コンクリートの断面重心が一致し、部材の變形が完全に自由なる場合に、コンクリートの収縮或は膨脹に依つて生ずる固有初應力の分布を理論的に考察して見る。以下單にコンクリートが収縮する場合のみを考へるが、コンクリートが膨脹する場合にはたゞ符號を反対にすればよい。第十二圖に示すが如く部材の中點を x の原點とし、原點より任意の距離 x に於ける σ_c 、 σ_s 及 τ_0 を求める。之等の正負はすべて 1. (7) の規約に従ふものとする。

第十二圖



第十三圖



部材に外部より軸方向力が作用しないものとすれば、すべての断面に就て

$$A_c \sigma_c + A_s \sigma_s = 0 \dots\dots\dots (24)$$

でなければならない。また長さ dx なる鐵筋に作用する力の平衡條件は全く (6) 式と同様である。次に無筋コンクリートが單位長に就き ε なる収縮をするものとすれば、 dx なる部分に於けるコンクリート及鐵筋の平均變形の關係は第十三圖に示すが如くであつて、従つて

$$ds = k d\tau_0 = \left(\frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\sigma_c}{E_c} - \varepsilon \right) dx,$$

即ち

$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{1}{K} \left(\frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\sigma_c}{E_c} - \varepsilon \right) \dots\dots\dots (25)$$

を得。(8)、(24) 及 (25) の 3 式より σ_c 及 σ_s を消去すれば τ_0 の微分方程式として (8) 式と全く同一のものを得、従つて其一般解は

$$\tau_0 = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \dots\dots\dots (10)$$

となる。然るに此場合は左右對稱であるから部材の中點、即ち $x=0$ に於ては $s=0$ 、従つて $\tau_0=0$ でなければならない。故に $A=0$ であつて

$$\tau_0 = B \sin \alpha x \dots\dots\dots (26)$$

となる。此式中の常數 B を決定するために、部材の兩端面、即ち $x = \pm l/2 = \pm a$ に於て $\sigma_c = \sigma_s = 0$ なることを考慮すれば、(25) 式より

$$\left(\frac{d\tau_0}{dx}\right)_{x=\pm a} = \alpha B \cos \alpha a = -\frac{\epsilon}{k},$$

即ち

$$B = -\frac{\epsilon}{\alpha k \cos \alpha a} \dots\dots\dots (27)$$

従つて

$$\tau_0 = -\frac{\epsilon \sin \alpha x}{\alpha k \cos \alpha a} \dots\dots\dots (28)$$

を得る。之は即ち部材中に於ける附着應力を與へるものであつて、部材中央に於て $\tau_0 = 0$ 、両端に於て最大値

$$\tau_{0,\max} = \mp \frac{\epsilon}{\alpha k} \sin \alpha a \dots\dots\dots (28a)$$

に達する。

次に σ_c 及 σ_s を求むむれば (14) 式と同様に

$$\sigma_c = \frac{U}{A_c} \int_x^a \tau_0 dx, \quad \sigma_s = -\frac{U}{A_s} \int_x^a \tau_0 dx \dots\dots\dots (29)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= +\frac{E_s \epsilon (\cos \alpha a - \cos \alpha x)}{(1+n p) \cos \alpha a}, \\ \sigma_c &= -p \sigma_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

を得る。上式より明かなるが如く $x = \pm a$ に於て $\sigma_c = \sigma_s = 0$ となり、部材の中點即ち $x = 0$ に於て σ_c 及 σ_s は共に其最大値：

$$\sigma_{s,\max} = +\frac{E_s \epsilon}{1+n p} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha a}\right), \quad \sigma_{c,\max} = -p \sigma_{s,\max} \dots\dots\dots (30a)$$

に達する。之に依つて見れば σ_c 及 σ_s は常に普通の解法の與へる値、即ち (23) 式の値より小なることがわかる。

5. 計 算 例

前述の如く上記の理論の基準である諸種の假定、殊に (4) 式で表はされる假定が果して實用上妥當であるや否や、或はまた (4) 式の關係が成立するものとしても k の値が如何程であるかに就て未だ充分なる實驗は見當らない。然し Abrams の實驗⁽⁸⁾、Edwards 及 Greenleaf の實驗⁽⁹⁾ の結果から見れば、大體に於て

$$k = 0.0005 \sim 0.0005 \text{ cm}^3/\text{kg}$$

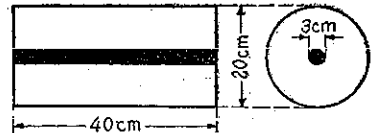
の範圍であつて、平均として $k = 0.0001 \text{ cm}^3/\text{kg}$ として大なる誤はない様に思はれる。

前記の理論に従へば果して如何なる應力分布が生ずるかを示すために、

次に $k = 0.0001 \text{ cm}^3/\text{kg}$ 、 $n = 10$ 、 $E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ として第十四圖に示すが如き鉄筋コンクリート部材に就て計算を行つて見る。即ち此場合には

$$l = 2a = 40 \text{ cm},$$

第十四圖



(8) Abrams, Studies of Bond between Concrete and Steel (Proc. A. S. T. M., 1925).

(9) Edwards and Greenleaf, Experimental Tests of Concrete-Steel Bond (Proc. A. S. T. M., 1928)

$$A_c = \frac{\pi}{4}(20^2 - 3^2) = 307 \text{ cm}^2, \quad A_s = \frac{\pi}{4}3^2 = 7.07 \text{ cm}^2,$$

$$U = \pi \times 3 = 9.425 \text{ cm}, \quad p = 0.023$$

であるから (9) 式より

$$\alpha^2 = \frac{9.425(1 + 10 \times 0.023)}{0.0001 \times 7.07 \times 2.1 \times 10^6} = 0.00781 \text{ cm}^{-2}$$

即ち

$$\alpha = 0.08837 \text{ cm}^{-1}$$

を得る。

(1) 押込試験の場合 ($P = 2000 \text{ kg}$)

鉄筋の一端に $P = 2000 \text{ kg}$ なる圧力を加へて之をコンクリート中に押込まんとする場合には

$$\sigma_c' = \frac{2000}{307} = 6.514 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_s'' = \frac{2000}{7.07} = 282.9 \text{ kg/cm}^2,$$

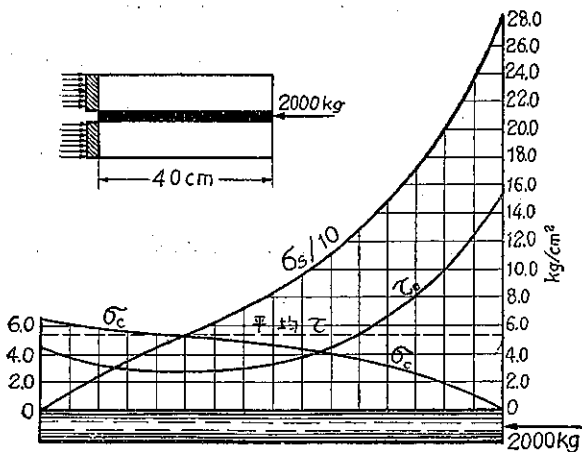
$$\sigma_c'' = \sigma_s' = 0$$

であつて 3. (1) の解より第十五圖に示すか如き應力分布を得る。特に注意すべきは、荷重作用端に於て附着應力は最大値 15.48 kg/cm^2 となり、之に對して附着應力が鉄筋全長に等布するものとすれば

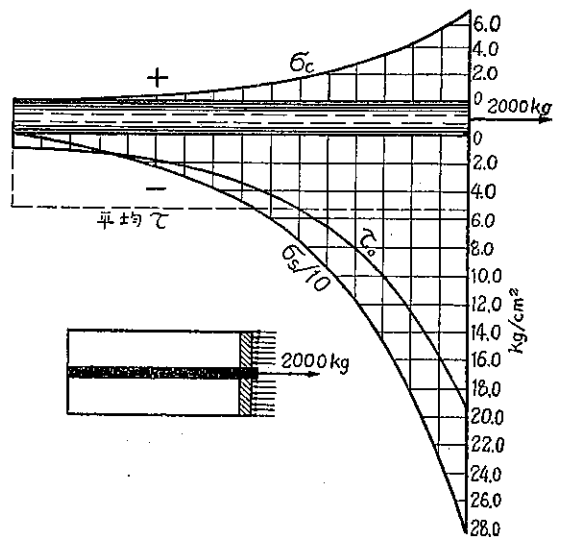
$$\tau_0 = \frac{2000}{9.425 \times 40} = 5.305 \text{ kg/cm}^2$$

となる。

第十五圖



第十六圖



(2) 引抜試験の場合 ($P = 2000 \text{ kg}$)

鉄筋の一端に $P = 2000 \text{ kg/cm}^2$ なる張力を加へ、之をコンクリートより引抜かんとする場合には

$$\sigma_c' = \sigma_s' = 0,$$

$$\sigma_c'' = \frac{2000}{307} = 6.514 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_s'' = -\frac{2000}{7.07} = -282.9 \text{ kg/cm}^2$$

であつて 3. (2) の解より第十六圖に示すが如き應力分布を得る。之に依れば附着應力は荷重の作用しない端に於て殆んど零に近く、夫より荷重作用端に行くに従つて急激に増大し、遂に -19.14 kg/cm^2 の最大値に達する。此有様を第二圖或は第三圖に比較すれば兩者の相違の餘りに著しきことがわかる。然し之は 1. に於て述べた理由に依つて説明し得るものと考へられる。尙、此場合の附着應力の平均値は前同様 5.905 kg/cm^2 である。

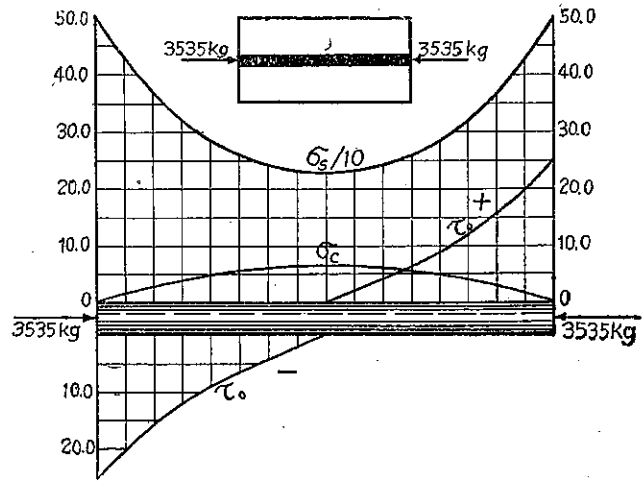
(3) 鉄筋の両端に壓力を加へる場合 ($P = 3535 \text{ kg}$)

鉄筋の両端に $P = 3535 \text{ kg}$ 、即ち $\sigma_s' = \sigma_s'' = 500 \text{ kg/cm}^2$ なる壓力を作用せしめた場合を 3. (3) に依つて計算すれば第十七圖の如き結果になる。之に依れば鉄筋の應力がコンクリートに傳はり、従つて中央部分に於て鉄筋の應力が著しく軽減されることを數量的に知ることが出来る。此例の場合には σ_s は中央部分に於て兩端の約 $1/2$ になる。

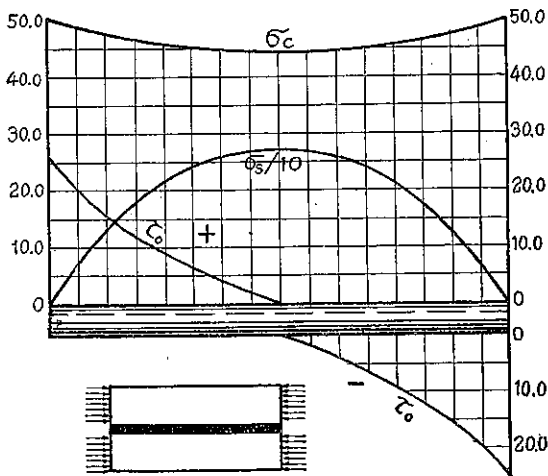
(4) コンクリートの 兩端に壓力を加へる場合 ($P = 15350 \text{ kg}$)

コンクリートの兩端面に $P = 15350 \text{ kg}$ 、即ち $\sigma_c' = \sigma_c'' = 50 \text{ kg/cm}^2$ なる壓力が作用する場合には 3. (4) に従つて第十八圖に

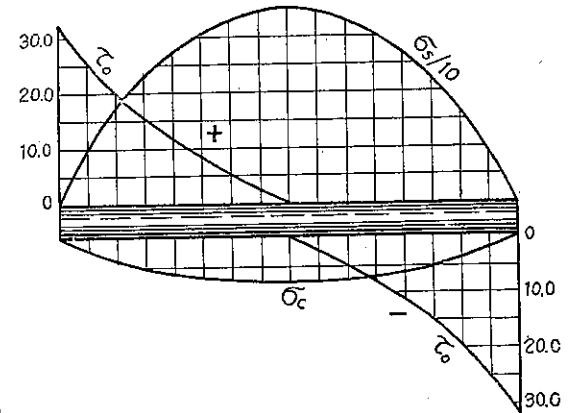
第十七圖



第十八圖



第十九圖



示すが如き應力分布が得られる。此場合にも前と同様に附着應力の作用に依りコンクリートの應力が鉄筋に傳達される有様を明瞭に知ることが出来る。

(5) コンクリートが收縮する場合 ($\epsilon = 0.0003$)

コンクリートが硬化作用に依つて收縮し、其變形率を $\epsilon = 0.0003$ とすれば 4. の一般解に依つて第十九圖に示すが如き應力分布を得る。特に

$$\sigma_{c,\max} = -8.10 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{s,\max} = +352.2 \text{ kg/cm}^2$$

であるが、之を普通の解法 (23) 式に依つて計算すれば、部材全長に亘つて一様に

$$\sigma_c = -11.78 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_s = +512.2 \text{ kg/cm}^2$$

なる應力となる。