

講 演

背水曲線の一般的解法並に實驗

(昭和六年十一月一日應用力學聯合大會に於て)

會 員 工 學 博 士 物 部 長 穗

General Solution of Backwater Curves

By Nagaho Mononobe, Dr. Eng., Member.

内 容 梗 概

現時の背水曲線公式は水理學上頗る不完全なる事を指摘し、在來の方法に依つては實際上必要なる精度に改善する事の不可能なるを説き、新に一般的解法を提案して其の原理を解き、尙實驗に依つて其の精度を明かならしめ、且つ實際計算に必要な必要諸圖表を作成せるものなり。

目 次

第一章	緒 論	1
第二章	著者の一般的解法	3
第一節	一般的解法の原理	3
第二節	背水曲線の一般式	4
第三節	水路の斷面積、潤邊及び徑深	5
第三章	實驗及び在來公式の誤差	8
第一節	實驗水路及び實驗方法	8
第二節	堰上背水	9
第三節	低下背水	10

第 一 章 緒 論

等速流状態にある水路の或る斷面に於て、水面を堰上げ又は落水を生ぜしむる時は、其の上流一帯は不等速流に變じ、水深従つて平均流速の變化は理論上無限の速きに及ぶ。此の場合の水流を表す方程式は Bernoulli 定理の應用として J. B. Belanger (佛, 1828) に依つて創案され、次で G. Coriolis (伊, 1836) に依つて流速水頭變化の項を補足され、更に de Chézy (佛) の平均流速公式に依つて摩擦損失を表すに及んで現在の式形を完成せるものである。

今背水影響圏内の任意の斷面に座標の原點を取り、 x 軸を水路床の最低線上に下流向きに、水深 H の軸を之れに垂直に上向きに取れば、不等速流の一般微分方程式は (第一圖参照)

$$I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \dots \dots \dots (1)$$

茲に

i_0 : 水路床勾配

$i = i_0$: 等速流水面勾配

$I = i_0 - \frac{dH}{dx}$: x 断面に於ける不等速流水面勾配

H_0 : 等速流水深

H : x 断面に於ける不等速流水深

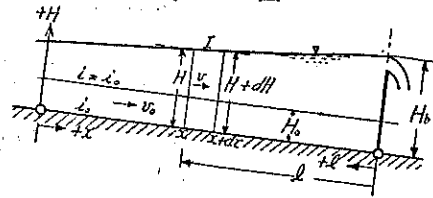
H_b : 背水下流端に於ける水深

R : x 断面に於ける徑深

C : Chézy 平均流速係數

$\alpha = \frac{10}{9}$: 流速水頭係數

第一圖



背水の場合は水深の變化大にして C を常數と見做す事能はざるを以て、同一水路に於ては常に C の一定せる近代的流速公式を用ふれば、

$$v = CR^m I_f^{\frac{1}{2}} = CR^m I_f^{0.5}$$

茲に I_f : v 及び R に對する摩擦勾配

と置けば

$$I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R^{2m}} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{Q^2}{C^2 R^{2m} A^2} + \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

茲に $\frac{v^2}{C^2 R^{2m}} = I_f$, Q : 流量, A : 斷面積

(2) 式に於ては、 C は水路潤邊の性質に依つて一定し、 R 及び A は水深 H の函數にして水路の斷面形に依つて異なり。 m は潤邊の性質及び斷面形に依つて異なるも、與へられたる水路に於ては H の如何に拘はらず略一定するを以て、 R, A は H の函數として表はされ、(2) 式は結局 H と x との關係を表はす微分方程式にして、之を解きて、 H, x 曲線、即ち背水曲線を得るも、其の結果として背水曲線は必然流速公式及び水路斷面形に依つて異なるざるを得ぬ。

然るに 1860 年佛國水理學の大家 Grashof, Bresse 兩氏が最初の背水公式を發表して、¹⁾ 以て以來既に 70 餘年を閲し、其の間歐洲の所謂水理大家に依つて濫作されたる堰上及び低下の背水公式は、其の數將に 20 に近からんとするに拘らず、單に積分の困難を回避せんが爲全く架空的の斷面形を考へ、水路に適應せざる流速公式を探り、其の甚しきに至りては流速水頭變化の影響を全く無視せるもの多きを占むるを以て、之れに依つて實際背水を實用上充

分なる程度に表さんとするは勿論期待すべからざる處である。而して斯の如き重大錯誤が數十年間に亘つて馬脚を現はさざりし所以は、背水の影響範圍極めて長大にして精確なる實驗實測を行ふに困難なりし爲である。

著者は後節に述ぶる如く、比較的短小なる水路に於て背水の充分なる測定をなし得る方法を考案し、之れに依つて著者の解法に依る背水曲線及び從來諸公式に據る結果と實測とを比較對照して、在來背水公式の如何に不完全なるものなりしかを明かならしめて居る。

從來發表されたる背水公式を列舉すれば、

番號	著者	國	發表年	流速公式	假定斷面形	流速水頭	數表又は曲線	
							堰上背水	低下背水
1	Grashof-Bresse	佛	1860	$C\sqrt{Hi}$	廣 矩 形	考 慮	あり	あり
2	Dupuit-Masoni	佛伊	1863	$C\sqrt{Ri}$	普通 矩 形	"	なし	なし
3	Rühlmann	獨	1880	$C\sqrt{Hi}$	廣 矩 形	無 視	あり	あり
4	Tolkmitt	"	1881	$C\sqrt{Ri}$	廣拋物線形	考 慮	"	なし
5	Schaffernak	奥	1913	$CH^{3/4}i^{1/2}$	廣 矩 形	無 視	"	あり
6	Ehrenberger	"	1914	$CH^{0.77}i^{0.458}$	"	"	"	なし
7	Baticle	佛	1921	$Q^2 \cos^2 \alpha$	特種 梯 形	"	"	"
8	Kozeny	奥	1928	$CH^{0.7}i^{0.5}$	廣 矩 形	考 慮	なし	あり
9	Schoklitsch	チェッコ	1930	$CH^m i^{0.5}$	"	無 視	あり	なし
10	Flamant	佛	—	Dupuit-Masoni の近似式				
11	Poirée	"		水理根據なき近似式				

但し數表又は曲線を缺くものは數計算極めて繁雜にして實用にはならぬ。

第二章 著者の一般的解法

第一節 一般的解法の原理

平均流速公式は與へられたる水路に最適の形即ち係數 C の不變なるものを取り、其の一般式は

$$v_0 = CR^{m_0} i^{0.5}$$

にして、不等速流の一般微分方程式を次の如く書き改む。

$$I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v_0^3}{C^2} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 R^{-2m} + \alpha \frac{v_0^3}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \dots \dots \dots (3)$$

茲に 尾字 0 を附するは等速流の場合の水理量を意味する。

次に不等流に於ける斷面積及び潤邊長 w と水深 H との關係を次の如く表はす。

$$A = aH^s; \quad w = bH^k$$

$$\therefore R = \frac{A}{w} = \frac{a}{b} H^{s-k} \dots \dots \dots (4)$$

茲に a, s, b 及び k は與へられたる斷面形に對して常數と假定する。

4. 及び w を上式の如く假定するは或る種の断面形に於て水深の小なる場合、精確さに於て不十分なる事あるも、 s 及び k を常數とするは (3) 式の積分に際してのみ用ふるものにして、實際背水の計算には各水深に相當する s 及び k を用ひ得るを以て、後節に示す如く之れ等による誤差は極めて微小である。

第二節 背水曲線の一般式

今等速流水深を H_0 とし、(4) 式の関係をも (3) 式に代入すれば、

$$i_0 - \frac{dH}{dx} = i_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-2s-2m(s-k)} - KH_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-2s-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{H}{H_0} \right)$$

茲に $K = \alpha s \frac{v_0^2}{gH_0}$ (5)

(a) 堰上背水の場合

$$\frac{H}{H_0} = y$$

と置けば、

$$\alpha \left(\frac{H}{H_0} \right) = \frac{dH}{H_0} = dy$$

$$\frac{i_0}{H_0} dx = \frac{dy}{1-y^{-2s-2m(s-k)}} - K \frac{y^{-(2s+1)} dy}{1-y^{-2s-2m(s-k)}} \dots\dots\dots (6)$$

然るに m は使用流速公式に依り、 s 及び k は與へられたる断面形に依つて定まるを以て、

$$2s + 2m(s-k) = r$$

と置けば、

$$\frac{i_0 dx}{H_0} = \frac{dy}{1-y^{-r}} - K \frac{y^{-(2s+1)}}{1-y^{-r}} = \frac{y^r}{y^r-1} dy - K \frac{y^{(r-2s)-1}}{y^r-1} dy \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式を x より $x+l$ 迄積分し、

$$\Phi_1 = \int \frac{y^r}{y^r-1} dy, \quad \Phi_2 = \int \frac{y^{(r-2s)-1}}{y^r-1} dy$$

茲に $y = \frac{H}{H_0} > 1$

と置けば

$$\frac{i_0 l}{H_0} = \Phi_1 \left(\frac{H_b}{H_0} \right) - \Phi_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) - K \left[\Phi_2 \left(\frac{H_b}{H_0} \right) - \Phi_2 \left(\frac{H}{H_0} \right) \right] \dots\dots\dots (8)$$

然るに背水の影響する範圍は無限大にして、

$$l = \infty \text{ に於て}$$

$$H=H_0 \quad \therefore y=1$$

但し l は堰上断面より z 断面までの距離にして、此の點に於て φ_1, φ_2 共に無限大となるを以て、 $H/H_0=y=y_1=1.001$ を以て φ_1 及び φ_2 の數値計算上の極限とする。

(7) 式に於て $y > 1$ にして、右邊は收斂級數に展開し得るを以て積分可能なるも、實際の水路に於ては $1 < r < 6$, $0.5 < s < 2.0$ にして r 及び s が共に整数なるか又は或る特種の値なる時は、普通の積分法に依り有限項を以て表はし得るを以て、 r, s の他の値に對しては挿入法に依つて φ_1 及び φ_2 の數値を計算し、 φ_1 及び φ_2 に對して 2 組の曲線群を作成した (附圖第一参照)。

(b) 低下背水の場合

此の場合 $(H/H_0) < 1$ なるを以て

$$y = \frac{H}{H_0} = \frac{1}{z}$$

と置けば、(5) 式より

$$\frac{dz}{H_0} = \frac{z^{-2} dz}{z^{r-1}} - K \frac{z^{2s-1} dz}{z^{r-1}} \dots \dots \dots (9)$$

$r > 1, s > 1$ にして、右邊は收斂級數に展開し得るを以て、 x より $x+l$ まで積分すれば、

$$\frac{z_0 l}{H_0} = \psi_1\left(\frac{H_0}{H_s}\right) - \psi_1\left(\frac{H_0}{H}\right) - K \left[\psi_2\left(\frac{H_0}{H_s}\right) - \psi_2\left(\frac{H_0}{H}\right) \right] \dots \dots \dots (10)$$

茲に

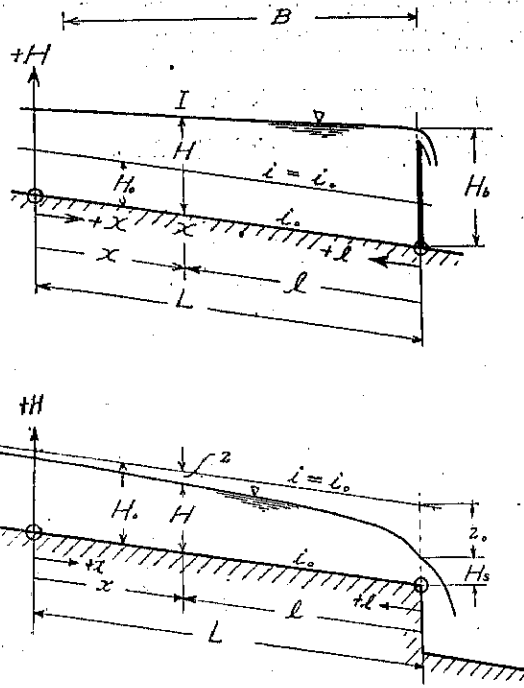
$$\psi_1(z) = \psi_1\left(\frac{H_0}{H}\right) = \int \frac{z^{-2}}{z^{r-1}} dz, \quad \psi_2(z) = \psi_2\left(\frac{H_0}{H}\right) = \int \frac{z^{2s-1}}{z^{r-1}} dz$$

而して實際曲線群の計算には、堰上背水の場合と同一の方法を用ひ、 $z=1.001 \sim 5$ の範圍に止めた (附圖第二に $z=1.001 \sim 3.0$ の曲線を示す)。

第三節 水路の斷面積、潤邊及び徑深

著者の方法に於ては背水曲線の形は斷面形即ち s 及び k の値に依つて異なるを以て、次に最も普通に使用さるゝ斷面の代表として、矩形、三角形及び梯形等の直線形斷面、圓形及

第二圖

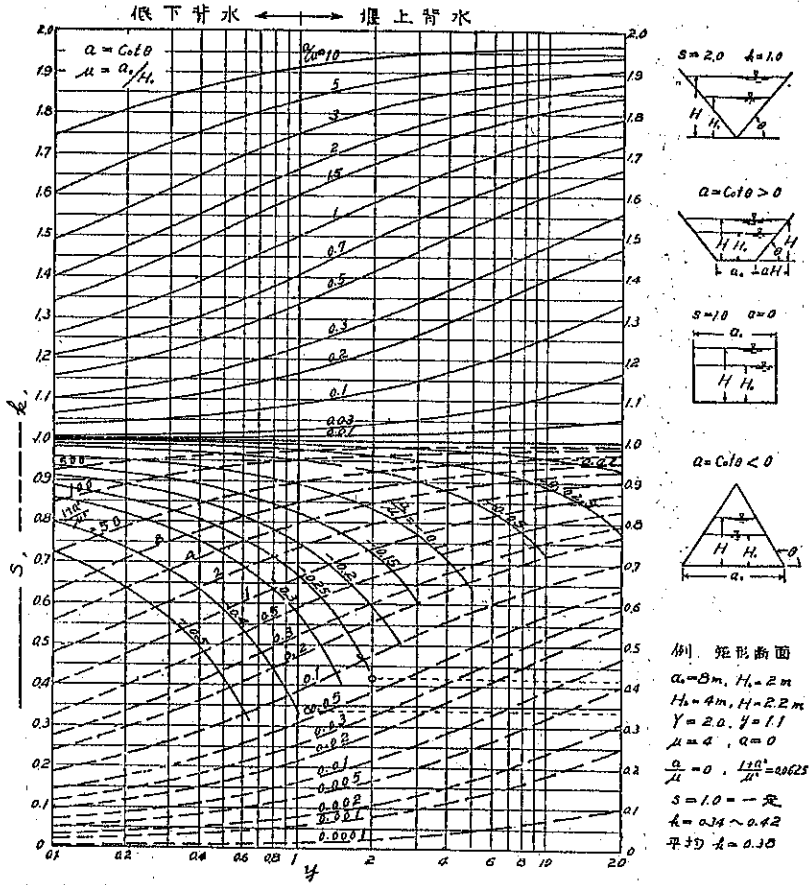


び拋物線形の断面に対して s 及び k の値を計算し、第三圖、第四圖及び第五圖に曲線を以て示す。其の他の種々の断面形に対しては上記の断面中最も近似せるもの s 及び k を用ふれば充分精確に背水を計算し得る。

(a) 直線形断面 (矩形、三角形及び V 形断面)

總て梯形の特殊の場合とし表はされ、

第三圖



$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{a_0 H + a H^3}{a_0 H_0 + a H_0^3} = \frac{y + \frac{a}{\mu} y^3}{1 + \frac{a}{\mu}} = y^s$$

茲に $y = \frac{H}{H_0}$, $\mu = \frac{a_0}{H_0}$, $\frac{a}{\mu} = \frac{H_0}{a_0} \cot \theta$

と置く

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\alpha_0 + 2H\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha_0 + 2H_0\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1 + 2y\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\mu^2}}}{\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\mu^2}}} = y^k$$

と置く。然る時は s 及び k は $y=H/H_0$ の値に依つて多少變ずるを以て、 $y=0.1\sim 20$ に對し $\frac{\alpha}{\mu}$ 及び $\frac{1+\alpha^2}{\mu^2}$ の種々の値に對して s 及び k を計算し、之れを第三圖に曲線群を以て示す。

(b) 拋物線断面

$$A = \frac{2}{3} B H, \quad A_0 = \frac{2}{3} B_0 H_0, \quad B = B_0 \sqrt{\frac{H}{H_0}}$$

$$\therefore \frac{A}{A_0} = y^{\frac{3}{2}} = y^s$$

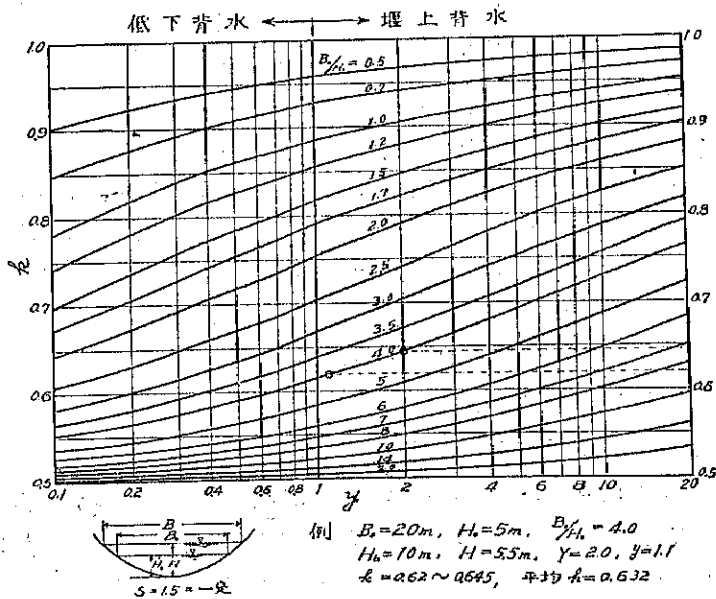
$$\therefore s = \frac{3}{2} = \text{constant}$$

$$\therefore \frac{w}{w_0} = \frac{\sqrt{y\left(y + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2}\right)} + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2} \ln \frac{\sqrt{y} + \sqrt{y + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2}}}{\frac{B_0}{4H_0}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2}} + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2} \ln \frac{4H_0}{B_0} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2}}\right]} = y^k$$

と置く。

$y=0.1\sim 20$ に於て B_0/H_0 の種々の値に對する k の値を第四圖に曲線群を以て示す。

第四圖



(c) 圓形断面

半径を r , 潤邊の中心角の $1/2$ を θ とすれば,

$$A = r^2 \cos^{-1} \left(\frac{r-H}{r} \right) + (H-r) \sqrt{2Hr - H^2}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\cos^{-1}(1-x) + (x-1) \sqrt{2x-x^2}}{\cos^{-1}(1-x_0) + (x_0-1) \sqrt{2x_0-x_0^2}} = y^3$$

茲に $x = \frac{H}{r}, \quad x_0 = \frac{H_0}{r}, \quad y = \frac{H}{H_0} = \frac{x}{x_0}$

と置く。

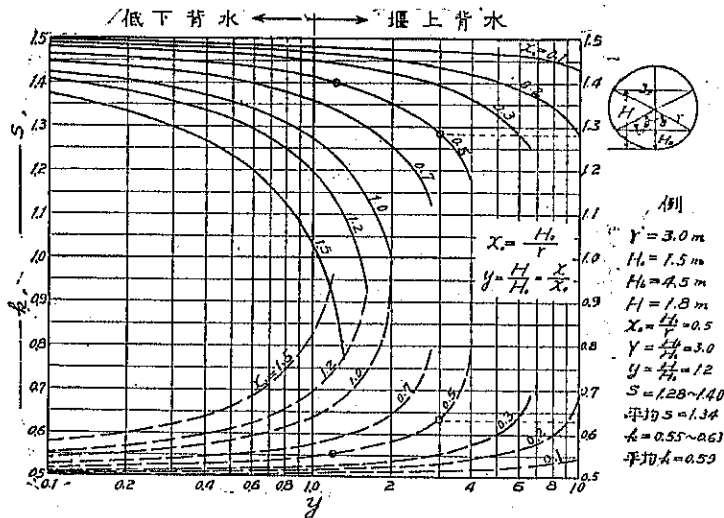
$$w = 2r \cos^{-1} \left(\frac{r-H}{r} \right)$$

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\cos^{-1}(1-x_0)} = y^k$$

と置く。

$y = 0.1 \sim 20$ に於て $x_0 = H_0/r$ の種々の値に對する s 及び k の値を第五圖に曲線群を以て示す。

第五圖



第三章 實驗及び在來公式の誤差

第一節 實驗水路及び實驗方法

實驗水路は (a) 各邊 20 種の矩形, (b) 各邊 20 種の直角 V 字形及び (c) 底邊 30 種兩法 1:1, 最大水深 30 種の梯形の 3 種の水樋を用ひ, 長さは (a), (b) 各 13 米, (c) 12 米にして, 滑面水路に於ては入念に鉤削し, 粗面水路は之れに 20 番亞鉛引鐵線 3/8 吋目の金網を張りたるものにして, 等速流勾配は 1:500~1:2000 とし, 堰上低下の兩場合に對し總計

12 組の實驗を行ひ、夫れ等の結果と著者並に在來公式に依る計算値とを比較對照して、著者公式の實驗と極めて良く一致すること、在來公式の誤差の著大にして到底實用に耐へざる事を明かならしめた。

而して從來背水曲線の實測の至難とされたる主因は極めて、長き等齊水路を要すると考へられたる爲なるが、理論上より見て堰上水深 H_0 が等速水深 H_1 の n 倍なる場合の背水曲線は $H/H_0 = n$ より $n-\varepsilon$, $n-\varepsilon$ より $n-2\varepsilon$, \dots , $n-m\varepsilon$ より $n-(m+1)\varepsilon \dots$ 等の背水曲線を連結したるものと全く同一なるを以て、本實驗に於ては一の背水曲線に對して、3~9 組の測定を爲し、之を連結して背水圈主要部の曲線形を得た。

水位の測定には 0.1 mm 讀みの測針と測量用大型水準儀とを使用し、長期に亘る實驗中斷面形の歪を避くる爲實驗時以外は常に水中に浸漬せしめた。

第二節 堰上背水

堰上背水の實驗は總計 5 組なるも、茲に代表的場合として滑面矩形及び滑面 V 字形の二つの場合を掲ぐる。

(a) 滑面矩形水路

等速流に於て種々の水深に對して實驗せる結果 $v = CR^{m_0^{0.5}}$ 中 $m = 0.65$ にして、背水は $i_0 = 1:500$, $H_0 = 50\text{mm}$, $H_1 = 100\text{mm}$ の場合に對して測定し、其の結果と各公式の計算値とは附圖第三に示すが如く、著者の公式は殆んど實測と一致し、局部的の不同は寧ろ實測の不完全と看做して差支なき程度なるを以て、假に著者の計算値を正しきものとし、在來公式の i_0/H_0 計算値の誤差を示せば第二表の如し。

第二表 在來公式に依る i_0/H_0 の誤差 %

$y = H/H_0$	1.5	1.1	1.05	1.01
$i_0/H_0 \dots \text{Mononobe}$	0.584	1.194	1.333	1.655
i_0/H の誤差				
Dupuit-Masoni	+ 1.2	+ 4.0	+ 5.8	+ 4.2
Bresse	- 4.9	- 3.9	- 2.6	- 5.1
Rühlmann	+ 6.7	+ 21.6	+ 28.6	+ 37.7
Schaffernak	+ 1.0	+ 11.6	+ 16.9	-
Ehrenberger	- 2.4	+ 6.4	+ 10.0	+ 6.7
Bafigole	+ 2.7	+ 32.0	+ 40.3	+ 62.5
Poirée	+ 0.3	+ 14.5	+ 17.3	+ 8.8
Tolkmitt	- 12.8	- 19.1	- 21.4	- 30.0

(b) 滑面 V 字形水路

此の場合等速流平均流速は、 $v = CR^{0.7} i_0^{0.5}$ を以て表はされ、 i_0 , H_0 , H_1 等は (a) の場合と同じく、實測値と計算値との比較は附圖第四に示す。

第三表 在來公式に依る i_0/H_0 の誤差 %

$y = H/H_0$	1.5	1.1	1.05	1.01
$i_0/H_0 \dots$ Mononobe	0.512	1.007	1.118	1.396
i_0/H_0 の誤差				
Batic'o	+ 4.9	+13.1	+17.1	+18.6
Tolkmitt	+ 7.3	+15.8	+19.4	+19.9
Ehrenberger	+11.3	+26.1	+31.1	+26.5
Bresse	+17.4	+35.3	+38.4	+48.5
Rühlmann	+21.7	+43.9	+53.4	+63.2
Schaffernak	+15.2	+31.9	+45.7	—
Poirée	+14.5	+35.8	+38.9	+29.0

第三節 低下背水

低下背水の實驗は總計 7 組なるも、代表的場合として矩形及び V 字形断面の滑面の場合を掲ぐる。

(a) 滑面矩形水路 [第二節 (a) と同一水路]

$$H_0 = 100 \text{ mm}, \quad H_s = 62.5 \text{ mm}, \quad i_0 = 1 : 1000$$

著者の計算値は實測と充分に一致するを以て、之れに對する在來公式の誤差を第四表に示す (附圖第五參照)。

第四表 在來公式に依る i_0/H_0 の誤差 %

$z = H_0/H$	1.3	1.1	1.05	1.01
$i_0/H_0 \dots$ Mononobe	0.039	0.196	0.344	0.765
i_0/H_0 の誤差				
Kozeny	-34.1	-23.0	-20.0	—
Bresse	-18.9	- 7.1	- 6.1	- 6.6
Schaffernak	+46.2	+26.5	+23.0	—
Rühlmann	+97.7	+52.3	+41.8	+26.7

(b) 滑面 V 字形水路

$$H_0 = 100 \text{ mm}, \quad H_s = 76.9 \text{ mm}, \quad i_0 = 1 : 1000$$

著者の計算値に對する在來公式の誤差を第五表に示す (附圖第六參照)。

第五表 在來公式に依る i_0/H_0 の誤差 %

$z = H_0/H$	1.2	1.1	1.05	1.01
$i_0/H_0 \dots$ Mononobe	0.0132	0.051	0.115	0.307
i_0/H_0 の誤差				
Tolkmitt	+ 87.8	+ 93.8	+ 75.6	+ 60.9
Kozeny	+213	+196	+146	—
Bresse	+290	+248	+193	+150.5
Schaffernak	+355	+274	+291	—
Rühlmann	+420	+336	+250	+191

上記の實驗に徴して明かなる如く、堰上背水の場合に於ては Chézy の流速公式を用ひ、係數 C を常數と假定する結果は背水距離を過大ならしめ、即ち i_0/H_0 の誤差は正である。廣断面の假定は反對に i_0/H_0 を過小ならしめ、其の誤差の絶對値は前者の數倍にも達し、次に流速水頭變化を無視する爲の誤差は i_0/H_0 を過大ならしめ、其の影響は粗度大に勾配急なるに従つて甚し。

V 字水路に於ても流速公式及び流速水頭に因る誤差は矩形水路の場合と略同様なるも、廣矩形断面の假定は實際と甚しく隔離し、極めて過大なる i_0/H_0 を與ふるを以て、合成誤差は +50% を超ゆる場合もある。

次に低下背水の場合にも流速公式の不適當並に流速水頭の無視は i_0/H_0 を過大ならしめ、正の誤差を生ずるが、廣矩形の假定は i_0/H_0 を過小ならしむるを以て、各公式の誤差は正負二種にして最大 +98% に達するものあり。

V 字水路に於て廣矩形の假定は i_0/H_0 を著しく大ならしめ、更に流速公式の不適當並に流速水頭の無視も亦之れを過大ならしむるを以て、結局甚大なる正の誤差を生じ Rühlmann 公式の如きは最大誤差 +426% に達する。

本講演後次の質疑應答ありたり。

○土木學會々員 伊藤君(問) 實際問題として非常に低い dam に大洪水が來たときに堰の附近は低下し上の方は上ることはないか。

○物部君(答) 堰のすぐ下に jump が起る、これは此の背水とは全々關係がない。

夫れは inertia term が大きくなると jump する。

例へば(右圖上参照)

此の時とは別である。diff. equation が違ふ。

○伊藤君(問) 夫れは極端なれども其の中間の場合如何。

○物部君(答) Schiessen des Wasser と Strömen des Wasser とは discontinuous に急激に變る(右圖下参照)。

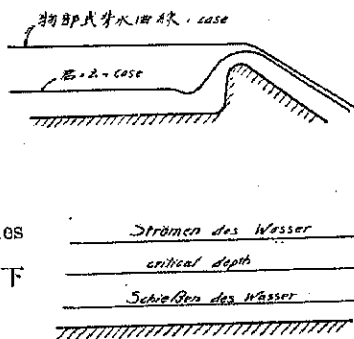
急流には此の back water curve は使へない。

○伊藤君(問) back water の velocity に制限なきや。

○物部君(答) back water が起らないから使ふ必要はない。中間は critical velocity で

急激に變はらぬ。此の事に就てはアメリカの教科書の一番初めに書いてある。

○機械學會正員 榎原君(問) Bernoulli と potential energy の式で解けないか。断面が三角又は圓では困るが potential flow で四角なるときには hydro-dynamics で解



けないか。

○物部君（答） velocity line と potential line とに分けてやるが、式が面倒でうまく行かない。

○梶原君（問） dam の形がむづかしい形では駄目だが下流の方は stream line で出来る筈である。

○物部君（答）下流は右圖の如き形になる、上流は back water である。

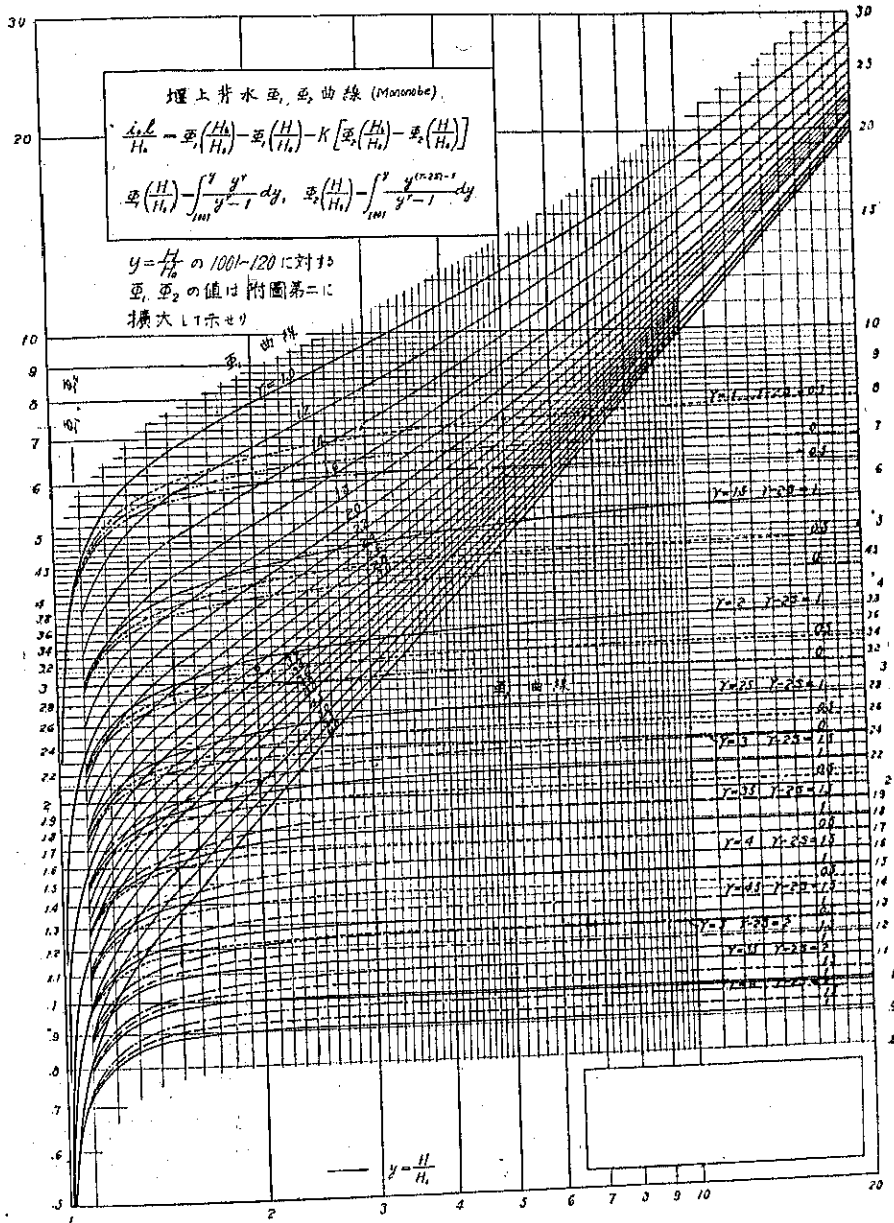
私は高等學校三年程度の differential equation と integral で解いた。

此の問題を圓い cylinder で堰上げたのをやつて居るものがある。

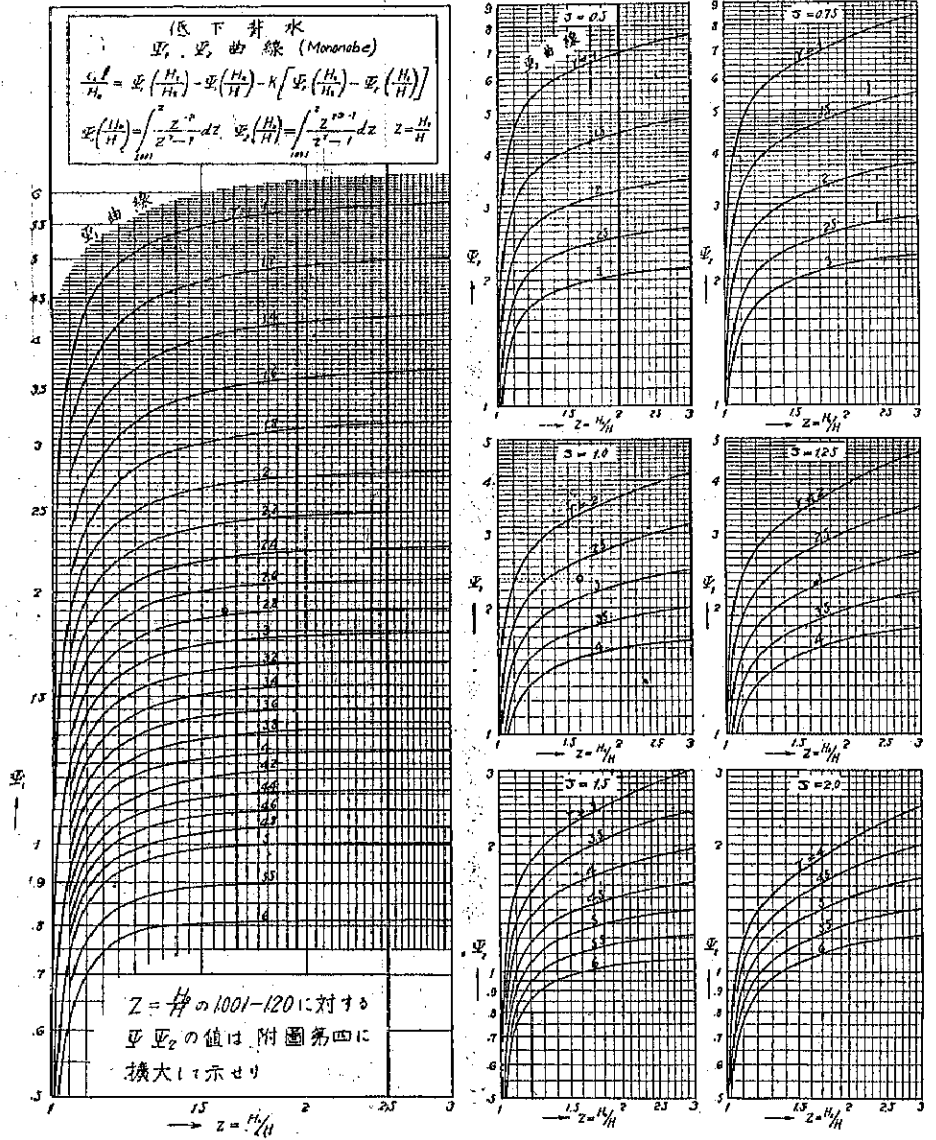


（以上）

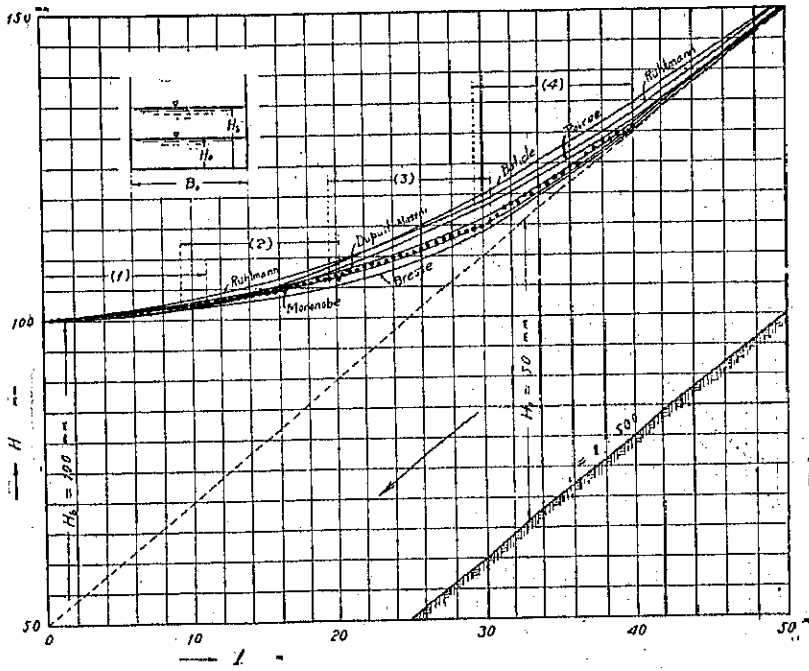
附圖第一



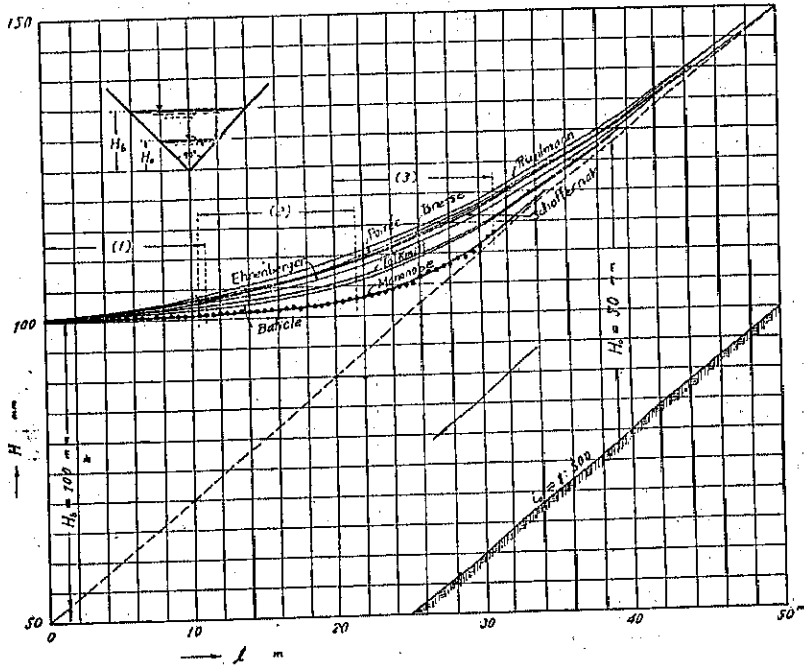
附圖第二



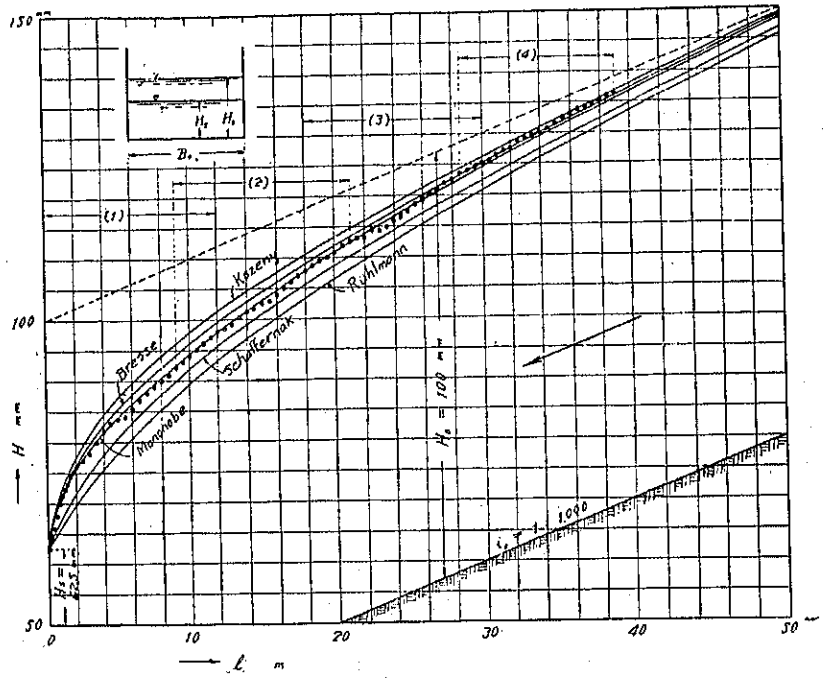
附圖第三



附圖第四



附圖第五



附圖第六

