講　　演

カスティリアノの定理に就て

(昭和六年十月三十一日應用力學聯合大會に於て)

會員　工學博士　田　中　　豐

On Castigliano's Theorem

By Yutaka Tanaka, Dr. Eng., Member.

內容梗概

カスティリアノの定理と可能働の定理との關係を述べ,且つ本定理の適用上荷重の從屬性に就て多少の考慮をなすときは,本定理の適用範圍を一層擴大し得べきことを論じたるものである。

目　　次

第一章　緒　論

カスティリアノの定理は其の要旨明快にして適確なるが爲,結構靜力學上に重用せられて居る一大定理であつて,普通次の形式で示されて居る。

$$\frac{\partial W_i}{\partial P_m}=\delta_m \quad \text{......(1)}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial X_m}=0 \quad \text{......(2)}$$

就中 (1) 式は構造物に作用する一外力の働點の變位を求むる場合に適用せられ, (2) 式は不靜定構造物の不靜定量又は不靜定應力を求むる場合に適用せらる可き基本式であるが, (2) 式は (1) 式の特別なる場合と考ふることが出來るから, (1) 式は本定理の基本式と見る可きものである。

上記 (1) 式は一般に "フークの法則を適用し得べき構造物の外力による內働の總和の一外力に就ての第一偏微分係數は,其の外力の方向に測りたる其の外力の働點の變位に等し" と解釋せられて居るが, (1) 式の適用範圍が獨立外力に對して安定なる構造物に限定せられて居ることは,本定理の適用上特に注意を要す可き一點である。此の理由は (1) 式が各外力の互に獨立であることを前提として成立して居るからであつて,此の點は本定理が其の一般性

に於て所謂可能働の定理に一籌を輸する所以である。

可能働及び實働に關するナビエ，クラペイロン等の研究はカステイリアノの研究に比して半世紀も古く，且つカステイリアノの定理は寧ろ可能働の定理の特別なる場合と考ふべき程であるが，逆に本定理を擴充して可能働の定理との關係を密接ならしめ，且つ可能働の定理に就ても多少言及し度いのが本文の主要目的である。

第二章　本定理の擴充第一

前章の (1) 式

$$\frac{\partial W_i}{\partial P_m}=\delta_m$$

に於て，W_i は諸外力による內働の總和であるが，之れを實外力及び可能外力による內働の總和と假定し，之れを一可能外力に就て微分し演算後總ての可能外力を零とすれば，當然次式を得らるべきである。

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial \bar{Q}_m}\right)_0=\delta_m \quad\cdots\cdots(3)$$

但し此の場合

$\bar{Q}_m$ ：m點に作用せしめたる可能外力

δ_m ：$\bar{Q}_m$ の方向に測りたる m 點の實變位

上式に依つて結構上の一點の任意の方向に於ける彈性變位を求むることが出來る。

今 S を實外力に依る部材應力，$\bar{S}$ を可能外力による應力とすれば，

$$W_i=\frac{1}{2}\sum\frac{(S+\bar{S})^2 l}{EA}$$

故に

$$\frac{\partial W_i}{\partial \bar{Q}_m}=\sum\frac{(S+\bar{S})\,l}{EA}\;\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{Q}_m} \quad\cdots\cdots(4)$$

然るに一般に

$$\bar{S}=\sum \bar{u}_i\,\bar{Q}_i$$

と置くことが出來るから，

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{Q}_m}=\bar{u}_m \quad\cdots\cdots(5)$$

但し $\bar{u}$ ： $\bar{Q}=1$ による部材應力の大さ

なる可きを以て，總ての可能外力を零とすれば (3)式，(4) 式及び (5) 式に依り，

$$\sum\frac{S\bar{u}_m\,l}{EA}=\delta_m \quad\cdots\cdots(6)$$

たるべきことも亦明かである。本式は所謂ラメの公式として知られて居るものであるが，其の演算上單位荷重による應力量を求むる必要あるが爲，其の單位荷重の意義に就て往々疑念

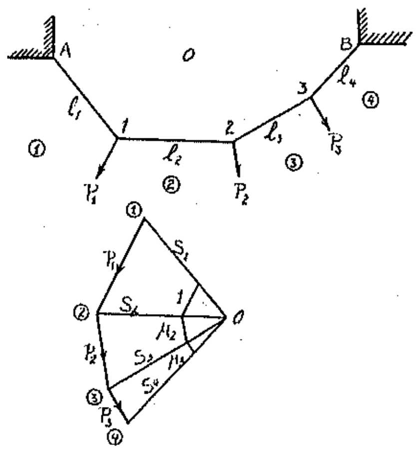
を懐かしむる處がある。前記 (3) 式の如くカステイリアノの定理の一應用として取扱ふときは，之れを明確に會得することが出來る。又之れに依つて可能働の定理として知られて居る。

$$\sum Q_m \delta_m = \sum S\Delta l$$

なる關係も直ちに是認することが出來るのである。

第三章　本定理の擴充第二

カステイリアノの定理は前述の如く外力が一般に無關係なること，換言すれば任意の單獨荷重に對して構造物が安定なることを前提として成立して居る。從つて平衡狀態に在る連鎖の彈性變形を求むるが如き場合には，直接本定理を適用することが出來ないのであるが，茲には暫く此の種の問題に就て考察して見度いと思ふのである。



今自重なき連鎖が外力に依つて右圖に示すが如き平衡狀態を保つ場合を考ふるに，之れ等の諸外力は互に次の如き一定の關係がなくてはならぬ。

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : \mu_2 : \mu_3$$

即ち

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \mu_2 P_1 \\ P_3 &= \mu_3 P_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

次に各外力の作用點 1, 2, 3 の外力の方向に測りたる彈性變位を夫々 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ とすれば，

$$W_e = \frac{1}{2}(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3) \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

今 $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$ を $1, \mu_2, \mu_3$ なる外力系による各點の相當變位とすれば，

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1 = P_1\bar{\delta}_1, \qquad \delta_2 = \frac{P_2}{\mu_2}\bar{\delta}_2 = P_1\bar{\delta}_2, \\ &\delta_3 = \frac{P_3}{\mu_3}\bar{\delta}_3 = P_1\bar{\delta}_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となる可きにより，

$$W_e = \frac{1}{2}P_1^2(\bar{\delta}_1 + \mu_2\bar{\delta}_2 + \mu_3\bar{\delta}_3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

故に

$$\frac{\partial W_e}{\partial P_1} = P_1(\bar{\delta}_1 + \mu_2\bar{\delta}_2 + \mu_3\bar{\delta}_3) = \delta_1 + \mu_2^2\frac{P_1}{P_2}\delta_2 + \mu_3^2\frac{P_1}{P_3}\delta_3$$

$$= \delta_1 + \mu_2\delta_2 + \mu_3\delta_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

然るに $W_e = W_i$ なるべきにより，

$$\frac{\partial W_l}{\partial P_1}=\delta_1+\mu_2\delta_2+\mu_3\delta_3 \quad\dots\dots(12)$$

即ち斯くの如き場合に對しては“諸外力に依る内働の總和の一外力に就ての第一微分係數は,其の外力の働點の其の方向に測りたる變位より大なること,其の外力と他の外力との比と他の外力の働點の夫れ等の方向に測りたる變位の相乘積の總和に等し”と謂ふ可きである。

上記の場合に可能働の定理を適用せんとすれば，其の可能外力も亦一系の從屬可能荷重たるべきであることは特に注意を要すべき一點である。

上記の一例に示すが如き場合に於て，若し μ が一貫して 1 なるときは

$$\frac{\partial W_l}{\partial P}=\Sigma\delta$$

なる可きことは勿論である。

之れ等の關係は可能働の定理に依つても容易に證明することが出來るのであるが，形式上カステイリアノの定理の一應用として其の解說を試みた次第である。

此の種の解法の一應用として滿載分布荷重を受けて平衡狀態を保つて居る $EI=0, EA\neq0$ なるが如き假想線體に就て考へて見ると，次の様な式が成立する。

$$\frac{\partial W_l}{\partial q_0}=\int\mu\,\delta\,ds \quad\dots\dots(13)$$

但し　q_0：一點に於ける分布荷重强度

$\mu=\dfrac{q}{q_0}$

q：任意の點に於ける分布荷重强度

δ：q の方向に測りたる變位

(13) 式の最も簡單なる應用の一例として，半徑 r なる薄き圓管が均等内壓强度 w を受くる場合の圓管の放射變位 δ を求めて見る。

單位長さの圓管に對し

$$W_l=\frac{1}{2}\,\frac{(wr)^2}{EA}\,2\pi r$$

であつて，$\mu=1$ であるから，(13) 式に依つて

$$\frac{\partial W_l}{\partial w}=\frac{2w\pi r^3}{EA}=\int\delta\,ds=\delta 2\pi r$$

故に

$$\delta=\frac{wr^2}{EA}$$

斯くの如き問題は他の方法によつても容易に求め得ることは勿論であるが，上記の一般式からも求め得ることは一つの興味ある事實である。

本講演後次の質疑應答ありたり。

○機械學會々員　小野君(問) カステイリアノの定理の apply されるには，load と displacement との間には正比例の關係が存在することが必要なり。load が如何なる狀態に apply されて居るか，concentrated load をかけた所で plastic になる。

○田中君　(答) independent の load で，stable なる structure ではよいと思ふが，相當大きな deformation をする時は駄目である。之れは work done の取り方がいけない，$\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}dx$ の M が series になる。suspension bridge の deformation の場合の M は series に取つて居る。

○小野君　(問) つまり正比例するか，否かを當つて見る必要はないか。

○田中君　(答) y が P の function として變つて居るから，必ずしも正比例するとは言へない。難しい問題と考へる。

○土木學會々員　鷹部屋君　(問) カスティリアノの定理で beam, bent の問題に就てやるのはいけないと言ふが何うか。

○田中君　(答) beam 又は bent では assumption が大切ではないか。$\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}dx$ の M が如何なるものか，simple beam の M と考へるか，何うか。

○鷹部屋君　(問) frame に對するカスティリアノの定理はよいが，特殊のもの，例へば beam に對しては良いか，否か。beam に就てカスティリアノを使つて居るのがあるが，unknown が given load の複雜なる function としてかゝつて來る時に，apply 出來ぬではないか。

○田中君　(答) 其の說もあるが，principle としては間違はない。application に良いか，何うかは疑問である。

○鷹部屋君　(問) beam 或は arch で deformation が，元の形に對してさう大して考へないで良い時には，カスティリアノの定理は apply 出來るが，deflection が相當大になると當て嵌らぬではないか。

○田中君　(答) さう言つてはいけないと思ふ，廣井先生の本では左樣な operation をやるが，arch の時に horizontal force が unit load の倍數とすることがいけない。M の expression に疑問がある。難しい時には計算出來ぬ。suspension bridge には siries でやつて居る。

○鷹部屋君　(問) deformation を neglect してよい時と否とある。

○田中君　(答) 小なる load と大なる load を apply した時に正比例したと言ふのはいけない。

○鷹部屋君　(問) 私の考へて居る處と違ふから他日やらう。

○造船協會々員　妹澤君　(問) external force で differentiate して 0 と置くは良くない，internal stress で differentiate すべし。廣井さんのやり方でなくて，dynamics で Lagrange の equation でやれば良い。

○田中君 (答) 夫れは結構であるが，之れを apply した時に，Airy の function を解かねばならぬ，internal stress が出ない。

○妹澤君 (問) P に proportional として external load をやることは不賛成である。

○田中君 (答) 内働と外働とは等しくない。engineer と科學者の考へるのは又其處が違ふ。

(以　上)