

# 講 演

## 一層ラーメンの面に垂直なる外力の影響

(昭和六年十月三十一日 應用力學聯合大會に於て)

會員 工學士 福 田 武 雄

### Analysis of Multiple-span Viaduct Rigid Frame with Fixed Columns for the Loads acting normal to the Plane of the Frame

By Takeo Fukuda, C. E., Member.

#### 内 容 梗 概

今迄ラーメンは主として平面的に、即ちラーメンを含む平面内に作用する外力に對して研究せられ、此の面に垂直又は或る角度に作用する外力の影響は殆んど顧みられなかつた。然し地震力、風壓、遠心力等の水平外力の影響を考ふる場合には、之等の外力がラーメンを含む平面内に作用するより、此の面に直角の方向に作用する方がラーメンに對してより以上危険な影響を及ぼす場合の尠くないことは誰しも認めて居る處である。著者は此の見地より一層多柱ラーメンを其の面に垂直な外力に對して研究した。本文に於ては上記の外力に依つて生ずる各格點に於ける彎曲率、反力、變位及び各部材中に生ずる扭偶力を決定すべき方程式を一般の構造強弱學の假定及び理論より誘導し、其の方程式の解法を示した。之等のものが決定さるれば、格點以外の部材の任意の横斷面に於ける彎曲率、剪力、變位、從つて任意の横斷面に生ずる應力強度は一般の構造強弱學の理論に依つて直ちに求めることが出来る。又任意の方向に作用する外力は之をラーメンの面に作用する分力と之れと直角の方向に作用する分力とに分けることが出来るから、本論文の方法に依る垂直荷重の影響と普通のラーメンの解法に依るものとを合成すれば、ラーメンを任意の方向に作用する外力に對して三次元的に解くことが出来る。

#### 目 次

第一章	概 説	2
第二章	記 號	2
第三章	基本方程式	3
第四章	邊縁條件と未知數及び方程式の數	5
第五章	反力 $R_r$ の決定	6
第六章	其の他の未知數の決定	9
第七章	荷重が格點にのみある場合	9
第八章	例 題	10

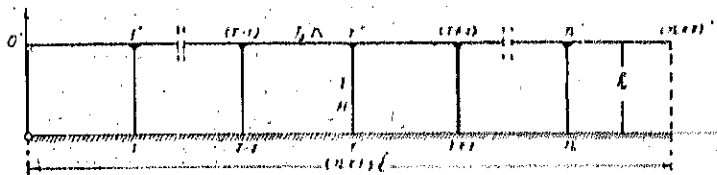
## 第一章 概 説

本論文は著者が“格子の理論と其の應用 (獨文 Theorie der Roste und ihre Anwendungen)”と題し土木學會誌第十七卷第五號及び第十號に發表し、更に引き續いて同誌上に發表せんとする論文の一部である。互に直交し且つ其の交點に於て剛結せられたる部材の群によつて形成せられた構造物がその面に垂直なる外力を受けたる場合、之れを格子 (Rost) と命名すれば格子とラーメンとの間には丁度 Platten と Scheibe との間に存在すると同じ様な差異がある。此の論文は此の Rost に関する研究を基として柱材の脚部が埋込みの一層ラーメン (eingespannte einstockige Rahmen) を其の面に垂直なる外力に對して研究する。今迄一般にラーメンはその面内に於て作用する外力に對して研究せられて居たが、地震、風壓、遠心力等の影響を考ふる時は之れ等の力がその面に垂直に作用した場合の方がラーメンに對してより以上危険である事は明かである。此の様な問題を取扱つた論文には Habel<sup>(\*)</sup> のものがあるが、之れは特殊な場合を取扱つたものである。

計算に對する假定に就ては一般の構造力學に於て假定せらるゝものより一歩も外に出ない。即ち外力による構造物の變形は構造物の寸法に比し微小なるものとし、構造物中には軸應力を生ぜず、且つ剪力による變形を無視する。部材は其の交點即ち格點に於て剛結せられ、横材は全長にわたり同一の斷面を有し、柱材は等間隔に配列されて其の斷面一様とする(勿論、柱材の間隔不同或は部材の斷面各々異なる場合も解き得るも、此處に於ては上記の假定をする)。

## 第二章 記 號

### 第 一 圖



$l$ : 柱材の間隔 (格間長)

$h$ : ラーメンの高さ

$P_1, P_2$ :  $\sigma$  及び  $\sigma'$  點に於ける外力、之れは  $\sigma$  或は  $\sigma'$  に直接に作用する外力を意味するものではなく、該點に集る部材を各々單桁と考へたる場合の外力に依る該點に於ける反力の和である

$J, K$ : 横材の斷面の二次率及び扭係數

$I, H$ : 柱材の斷面の二次率及び扭係數

(\*) Habel; Die Bautechnik, 1926; Beton und Eisen, 1928.

- $R_r$ :  $r'$  點に於ける反力
- $z_r$ : 格點  $r$  の變位
- $M_r^l, M_r^r$ : 格點  $r$  の直ぐ左及び右に於ける横桁の彎曲率
- $L_r, L_r'$ : 柱材の頂部 ( $r$ ) 及び脚部 ( $r'$ ) に於ける彎曲率
- $X_r, X_{r+1}$ : 格間  $(r-1)-r$  間の横桁の扭偶力
- $Y_r$ : 柱材  $r-r'$  の扭偶力

但し  $z$  は外力の正の方向を正とし、反力は外力と反対の方向を正とする。彎曲率は單桁と同じく彎曲の曲率半徑が  $z$  の負の方向にある場合を正とし、扭偶力の符號は第二圖に示すものを正とする。  
次に

$$\mu = \frac{l}{EI}, \quad \phi = \frac{l}{GK}, \quad \lambda = \frac{h}{EI}, \quad \psi = \frac{h}{GH}$$

と置く、但し  $E$  及び  $G$  は夫々部材のヤング係數及び剛性係數とする。

更に  $m_r, m_{r+1}$  を夫々格間  $(r-1)-r$  間の横桁、 $r$  番目の柱材を單桁と考へた場合の外力による彎曲率とし (第三圖及び第四圖参照)、

$$S_r^l = \frac{1}{l} \int_0^l m_{r,x} dx,$$

$$S_r^r = \frac{1}{l} \int_0^l m_{r+1}(l-x) dx,$$

$$T_r = \frac{1}{h} \int_0^h z_{r,y} dy,$$

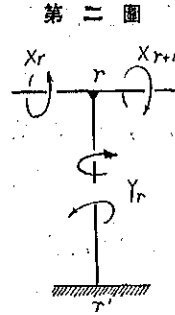
$$T_r' = \frac{1}{h} \int_0^h z_r(h-y) dy,$$

とする。

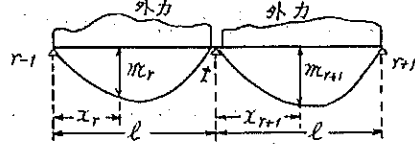
### 第三章 基本方程式

以下記する處の基本方程式は“格子の理論と其の應用”の第一部の基本方程式より直ちに導かれるものであるが、此處では獨立に之れを誘導する。

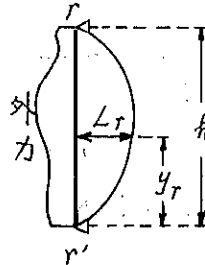
先づ横桁及び柱材を總ての格點で切り離したとすると、各々の兩端に彎曲率の作用を受ける單桁を得る。之れ等のものに就き格點  $r$  に於ける力の釣合を考へると、横桁の彎曲率は格點  $r$  に外力の正の方向に



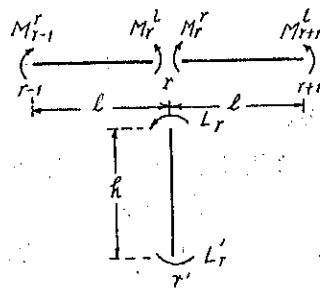
第二圖



第三圖



第四圖



第五圖

$$\frac{1}{l}(M_{r+1}^l - M_r^r) - \frac{1}{l}(M_r^l - M_{r-1}^l)$$

の力を、柱材は同じく

$$\frac{1}{h}(L_r - L_r')$$

の力を、そして外力は  $P_r$  の力を及ぼす。故に之れ等が釣合を保つために

$$\frac{1}{l}(M_{r+1}^l - M_r^r - M_r^l + M_{r-1}^l) - \frac{1}{h}(L_r - L_r') = -P_r \dots \dots \dots (1)$$

でなければならない。同様に柱材の脚部  $r'$  に於て力の釣合のために

$$\frac{1}{h}(L_r - L_r') = R_r - P_r' \dots \dots \dots (2)$$

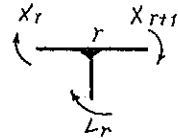
を得る。

次に格点  $r$  に於ける偶力の釣合を考へると第六圖に示すが如

第六圖

く  $yz$  の方向にては

$$Y_r = M_r^l - M_r^r \dots \dots \dots (3)$$



$yz$  の方向では

$$X_{r+1} - X_r = L_r \dots \dots \dots (4)$$



である。

格点で切断せられた横桁の中、格点  $r$  の左方の桁の格点  $r$  に於ける傾斜角は

$$i_r^l = \frac{1}{l}(z_r - z_{r-1}) - \frac{\mu}{6}(2M_r^l + M_{r-1}^l) - \frac{\mu}{l}S_r^l \dots \dots (a)$$

格点  $r$  の右方の桁のそれは

$$i_r^r = \frac{1}{l}(z_{r+1} - z_r) + \frac{\mu}{6}(2M_r^r + M_{r+1}^l) + \frac{\mu}{l}S_r^r \dots \dots (b)$$

である。更に  $r$  及び  $r'$  にて切断せられた柱材の  $r$  及び  $r'$  に於ける傾斜角は夫々

$$i_r^y = +\frac{z_r}{h} - \frac{\lambda}{6}(2L_r + L_r') - \frac{\lambda}{h}T_r \dots \dots \dots (c)$$

$$i_{r'}^y = +\frac{z_r}{h} + \frac{\lambda}{6}(L_r + 2L_r') + \frac{\lambda}{h}T_r' \dots \dots \dots (d)$$

である。

實際は横桁は格点に於て連続して居るから、

$$i_r^y = i_r^l = i_r^r$$

でなければならない。故に (a) 及び (b) 式から

$$M_{r+1}^l + 2(M_r^l + M_r^r) + M_{r-1}^l + \frac{6}{\mu l}A^2 z_{r-1} + \frac{6}{l}(S_r^l + S_r^r) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

を得る。又柱材は脚部で埋め込まれて居るから、

$$i_r'' = 0$$

即ち

$$L_r + 2L_r' + \frac{6}{\lambda h} z_r + \frac{6}{h} T_r' = 0 \dots\dots\dots (6)$$

を得る。

最後に扭偶力と傾斜角との關係を考へると、

$$\psi Y_r = -i_r''$$

$$\phi X_r = i_{r-1}'' - i_r''$$

であるから、(a) 式乃至 (d) 式より

$$\psi Y_r = -\frac{1}{l} \Delta z_{r-1} + \frac{\mu}{6} (2M_r' + M_{r-1}') + \frac{\mu}{l} S_r' \dots\dots\dots (7)$$

或は

$$\psi Y_r = -\frac{1}{l} \Delta z_r - \frac{\mu}{6} (2M_r'' + M_{r+1}'') - \frac{\mu}{l} S_r'' \dots\dots\dots (7a)$$

及び

$$\phi X_r = -\frac{1}{h} \Delta z_{r-1} + \frac{\lambda}{6} \Delta (2L_{r-1} + L_r' - i) + \frac{\lambda}{h} \Delta T_{r-1} \dots\dots\dots (8)$$

を得る。

#### 第四章 邊縁條件と未知數及び方程式の數

横桁の兩端 0 及び  $n+1$  に於て自由に動き得るものとする、邊縁條件として

$$M_0' = M_0'' = M_{n+1}' = M_{n+1}'' = I_0 = I_n' = I_{n+1} = L_{n+1}' = X_1 = X_{n+1} = Y_0 = Y_{n+1} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

を得る。然る時は未知數は  $M_r'$ ,  $M_r''$ ,  $L_r$ ,  $L_r'$ ,  $R_r$ ,  $Y_r$  は夫々  $n$  個で、 $X_r$  は  $(n-1)$  個、 $z_r$  は  $(n+2)$  個であるから、合計  $(8n+1)$  個の未知數がある。之れに對し方程式は (1) 式が  $r=0, 1, \dots, n, n+1$  の間に成立し、(8) 式が  $r=2, \dots, n$  の間に成立し、其の他の方程式は  $r=1, 2, \dots, n$  の間に成立する。そして (7a) 式は獨立の式でなく (5) 式と (7) 式とから誘導せられる式であるから、結局  $(8n+1)$  個のお互に無關係な方程式が存在することになる。未知數と方程式との數が一致して居る以上此の問題は一般に解き得るものと云へる。

特に (9) 式と (1) 式より

$$M_n' = -P_0 l, \quad M_{n+1}'' = -P_{n+1} l \dots\dots\dots (10)$$

を得る。

第五章 反力  $R_r$  の決定

(1)  $M_r^l$  及び  $M_r^r$  を  $R_r$  の函数として表はすこと

(7) 及び (7a) 式より  $x_r$  を消去し、それに (3) 式の  $Y_r$  の値を代入すると次の式が得られる。

$$(1+2\alpha)(M_r^l+M_{r-1}^r)-2\alpha(M_r^r+M_{r-1}^l)=-\frac{2}{l}(S_r^l+S_{r-1}^r) \dots\dots\dots(11)$$

但し此の式は  $r=2, \dots, n$  の間に成立し、

$$\alpha=\frac{\psi}{\mu} \dots\dots\dots(12)$$

である。

次に (1) 及び (2) 式より  $r=1, 2, \dots, n$  に對し

$$M_{r+1}^l-M_r^r-M_r^l+M_{r-1}^r=[R_r-(P_r+P_r')]l \dots\dots\dots(13)$$

今 (11) 式及び (13) 式に於て  $M_r^l$  及び  $M_r^r$  を未知數と考へると、本問題の場合  $M_r^l$  及び  $M_r^r$  が (10) 式に於て既に求められて居るから、未知數の數は  $2(n-1)$  個である。然るに方程式の數は (11) 式より  $(n-1)$  個、(13) 式より  $n$  個、合計  $(2n-1)$  個であつて、之れに依つて  $2(n-1)$  個の未知の  $M_r^l, M_r^r$  を  $R_r$  の函数として表はし、其の他に  $R_r$  に關する一つの方程式を得ることが出来る。此の方程式と言ふのは (13) 式から出て來るもので、(13) 式を  $r=1, 2, \dots, n$  に適用し、それに依つて成立した式の右邊及び左邊を各々加へ合はせることに依つて得られる。即ち

$$\sum_{r=1}^n R_r = \sum_{r=0}^{n+1} (P_r + P_r') \dots\dots\dots(14)$$

である。

(11) 式及び (13) 式より  $M_r^l, M_r^r$  を解く爲めに、此の兩式群より  $M_r^r$  を消去すると、 $M_r^l$  のみを含む次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} &\alpha M_n^l - (1+2\alpha)M_2^l + \frac{1}{2}(1+2\alpha)M_1^l \\ &= \alpha(R_2 - P_{2,0})l - \frac{1}{2}(R_1 - P_{1,0})l + \frac{1}{l}(S_2^l + S_1^r), \\ &\dots\dots\dots \\ &\alpha M_{r+2}^l - (1+3\alpha)(M_{r+1}^l - M_r^l) - \alpha M_{r-1}^l = \alpha(R_{r+1} - P_{r+1,0})l \\ &\quad - \frac{1}{2}(1+2\alpha)(R_r - P_{r,0})l + \frac{1}{l}[S_{r+1}^l + S_r^r - (S_r^l + S_{r-1}^r)] \\ &\quad (r=2, 3, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

上式中に於て

$$P_{r,0} = P_r + P_r'$$

で、(9) 式及び (10) 式の邊縁條件は考慮せられるべきものである。(15) 式は  $n$  が小なる場合には聯立方程式として解く事も出来るし、又  $n$  が大なる場合には三次の差方程式として解く事も出来る。何れにしても (15) 式より解として

$$M_r^i = F_r + \sum_{l=1}^n f_{rl} R_l l \dots\dots\dots (16)$$

を得る事が出来る。但し  $F_r$  は反力  $R_r$  に無關係で只外力即ち  $P_{r,0}$  及び  $S$  に依る量で、 $f_{rl}$  は外力に無關係な反力  $R_l$  の  $M_r^i$  に対する影響係數 (Einflusszahl) である。

$M_r^i$  が上記の方法で解つたとすると、 $M_r^r$  は (11) 式即ち

$$M_r^r = -\delta^r \sum_{l=r+1}^n \frac{1}{\delta^l} \left[ \delta M_l^i - M_{l-1}^i + \frac{1}{\alpha l} (S_l^i + S_{l-1}^i) \right] + \frac{M_n^r}{\delta^{n-r}} \dots\dots\dots (17)$$

より求めることが出来る。但し上式に於て

$$\delta = \frac{1+2\alpha}{2\alpha} = 1 + \frac{1}{2\alpha} \dots\dots\dots (18)$$

である。此の  $M_r^r$  を (16) 式と同様に

$$M_r^r = G_r + \sum_{l=1}^n g_{rl} R_l l \dots\dots\dots (19)$$

とすることが出来る。但し  $G_r$  は  $F_r$  と同じく外力による量で、 $g_{rl}$  は  $f_{rl}$  と同じく外力に無關係な反力  $R_l$  の  $M_r^r$  に対する影響係數である。

(2)  $L_r$  を反力  $R_r$  の函数として表はすこと

(4) の方程式より (9) 式の邊縁條件を考ふることに依つて

$$X_r = + \sum_{l=1}^{r-1} L_l = - \sum_{l=r}^n L_l \dots\dots\dots (20)$$

及び

$$\sum_{l=1}^n L_l = 0 \dots\dots\dots (21)$$

を得る。

(6) 式と (8) 式より  $z$  を消去し、その式中の  $X_r$  に上記の値を代入すると  $r=2, 3, \dots, n$  に對し

$$L_r + L_r' - (L_{r-1} + L_{r-1}') - 2\epsilon \sum_{l=1}^{r-1} L_l + \frac{2}{h} [T_{r,0} - T_{r-1,0}] = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{但し } \epsilon = \frac{\phi}{\lambda}, \quad T_{r,0} = T_r + T_r' \dots\dots\dots (23)$$

を得る。此の式の中の  $L_r'$  を (2) 式に依つて消去すると、 $r=2, 3, \dots, n$  に對し

$$L_r - L_{r-1} - \epsilon \sum_{l=1}^{r-1} L_l = -\frac{1}{h} (T_{r,0} - T_{r-1,0}) + \frac{h}{2} [R_r - P_r' - (R_{r-1} - P_{r-1}')] \dots\dots\dots (24)$$

を得る。此の式より直ちに次の方程式を導くことが出来る。即ち

$$\begin{aligned}
 L_2 - (1+\epsilon)L_1 &= -\frac{1}{h}dT_{1,0} + \frac{h}{2}d(R_1 - P'_1), \\
 \dots\dots\dots \\
 L_{r+1} - (2+\epsilon)L_r + L_{r-1} &= -\frac{1}{h}d^2T_{r-1,0} + \frac{h}{2}d^2(R_{r-1} - P'_{r-1}), \\
 \dots\dots\dots \\
 -(1+\epsilon)L_n + L_{n-1} &= +\frac{1}{h}dT_{n-1,0} - \frac{h}{2}d(R_{n-1} - P'_{n-1})
 \end{aligned}
 \quad \left. \dots\dots\dots (25) \right\}$$

を得る。此の式は聯立方程式としても又二次の對稱の差方程式としても解く事が出来、其の解を

$$L_r = K_r + \sum_{i=1}^n k_{ri} R_i h \dots\dots\dots (26)$$

とすることが出来る。\$K\_r\$ は反力 \$R\_i\$ に無關係でなす外力に依る量で、\$k\_{ri}\$ は外力に無關係な反力 \$R\_i\$ の \$L\_r\$ に對する影響係數である。注意すべきことは、外力が柱材に無い場合には \$T\_{r,0}\$ 及び \$P'\_i\$ は共に零であるから、\$K\_r\$ が零となることである。

(3) 反力 \$R\_r\$ の方程式

(7a) 式を \$r=r-1\$ に適用し、それに依つて成立した式の左邊及び右邊を夫々 (7) 式の左邊及び右邊に加へ合せ、其の左邊の \$Y\$ を (3) 式で消去すると、

$$\frac{12}{\mu l} dz_{r-1} = (1 + 6\alpha)(M_r^l - M_{r-1}^l) - 6\alpha(M_r^r - M_{r-1}^r) + \frac{6}{l}(S_r^l - S_{r-1}^l) \dots\dots\dots (27)$$

(\$r=2, 3, \dots, n\$)

を得る。

次に (6) 式、(8) 式及び (20) 式より

$$\frac{12}{\lambda h} dz_{r-1} = d(L_{r-1} - L_{r-1}') - 6\epsilon \sum_{i=1}^{r-1} L_i + \frac{6}{h} d(T_{r-1} - T_{r-1}') \dots\dots\dots (28)$$

を得る。次に (27) 式及び (28) 式より \$dz\_{r-1}\$ を消去し、\$(L\_{r-1} - L\_{r-1}')\$ の値に (2) 式より得らるゝ値を代入すると、

$$\begin{aligned}
 (1 + 6\alpha)(M_r^l - M_{r-1}^l) - 6\alpha(M_r^r - M_{r-1}^r) + \frac{6}{l}(S_r^l - S_{r-1}^l) \\
 = \beta d(R_{r-1} - P'_{r-1}) l - \frac{6\gamma l}{h} \sum_{i=1}^{r-1} L_i + \frac{6\beta l}{h^2} d(T_{r-1} - T_{r-1}') \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

(\$r=2, 3, \dots, n\$)

を得る。但し

$$\beta = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{h}{l}\right)^2, \quad \gamma = \frac{\phi}{\mu} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots\dots\dots (30)$$

である。今 (29) 式に (16) 式、(19) 式及び (26) 式の値を代入すると、\$R\_r\$ に對する方程式として



$r=2, 3, \dots, n$  に対し

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[ (1+6\alpha)(f_{ri}-g_{r-1,i}) - 6\alpha(g_{ri}-f_{r-1,i}) + 6\gamma \sum_{k=1}^{r-1} k_{ik} \right] R_i - \beta \Delta R_{r-1} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \left[ (1+6\alpha)(F_{ri}-G_{r-1,i}) - 6\alpha(G_{ri}-F_{r-1,i}) \right] - \frac{6\gamma}{h} \sum_{k=1}^{r-1} K_k \\ & \quad - \beta \Delta P'_{r-1} - \frac{6}{l^2}(S_r^l - S_{r-1}^l) + \frac{6\beta}{h^2} \Delta(T_{r-1} - T_{r-1}^l) \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

を得る。上記の式は  $n=2, 3, \dots, n$  の間に成立するから、上式より  $(n-1)$  個の式が得られる。此の  $(n-1)$  個の式と (14) 式、即ち

$$\sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=0}^{n+1} (P_i + P'_i) \dots \dots \dots (14)$$

とより  $n$  個の未知数  $R_r$  を解く事が出来る。

### 第六章 其の他の未知数の決定

前記の如く反力  $R_r$  が決定せられたとすると、格点  $r$  に於ける横桁及び柱材の彎曲率は (16) 式、(19) 式及び (26) 式より計算することが出来る。 $M_r^l, M_r, L_r$  が解つたとすると、柱材の脚部の彎曲率は (2) 式即ち

$$L_r^l = L_r - (R_r - P_r^l)h \dots \dots \dots (32)$$

に依つて計算が出来、横桁及び柱材中の扭偶力は (3) 式及び (20) 式より決定することが出来る。格点  $r$  の變位  $z_r$  は (6) 式即ち

$$z_r = -\frac{\lambda h}{8} (L_r + 2L_r^l) - \lambda T_r^l \dots \dots \dots (33)$$

より算出することが出来る。

### 第七章 荷重が格点にのみある場合

荷重が格点のみに作用する場合には總ての  $S_r^l, S_r^r, T_r, T_r^l$  及び  $P_r^l$  は零である。故に (15) 式は

$$\left. \begin{aligned} & \alpha M_0^l - (1+2\alpha)M_1^l + \frac{1}{2}(1+2\alpha)M_2^l = \alpha(R_2 - P_2)l - \frac{1}{2}(R_1 - P_1)l, \\ & \dots \dots \dots \\ & \alpha M_{r+2}^l - (1+3\alpha)(M_{r+1}^l - M_r^l) - \alpha M_{r-1}^l \\ &= \alpha(R_{r+1} - P_{r+1})l - \frac{1}{2}(1+2\alpha)(R_r - P_r)l \\ & \quad (r=2, 3, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15a)$$

となり、従つて (10) 式は

$$M_r^l = \sum_{i=1}^n f_{ri}(R_i - P_i)l \dots\dots\dots (16a)$$

となる。(17) 式は

$$M_r^r = -\delta^r \sum_{i=r+1}^n \frac{1}{\delta^i} [\delta M_i^l - M_{i-1}^l] + \frac{M_n^r}{\delta^{n-r}} \dots\dots\dots (17a)$$

となり、対称の関係から (19) 式は (16a) 式と同様に

$$M_r^r = \sum_{i=1}^n g_{ri}(R_i - P_i)l \dots\dots\dots (19a)$$

となり、(25) 式は

$$\left. \begin{aligned} I_2 - (1 + \varepsilon)I_1 &= +\frac{h}{2} \Delta R_1, \\ \dots\dots\dots \\ L_{r+1} - (2 + \varepsilon)L_r + L_{r-1} &= +\frac{h}{2} \Delta^2 l_{r-1}, \\ \dots\dots\dots \\ -(1 + \varepsilon)L_n + I_{n-1} &= -\frac{h}{2} \Delta R_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (25a)$$

となり、其の解は

$$L_r = \sum_{i=1}^n k_{ri} R_i h \dots\dots\dots (20a)$$

となる。従つて  $R_r$  の方程式 (31) 式は

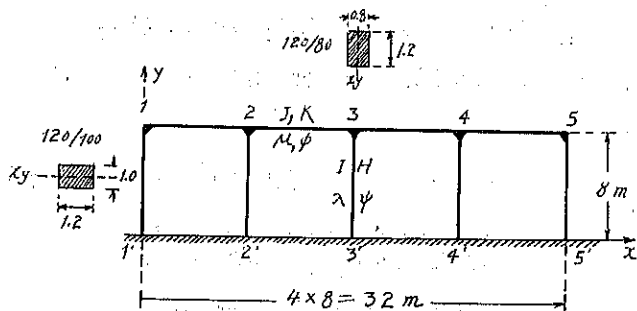
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [(1 + 6\alpha)(f_{ri} - g_{r-1, i}) - 6\alpha(g_{ri} - f_{r-1, i})](R_i - P_i) \\ - \beta(R_r - R_{r-1}) + 6\gamma \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^n k_{ij} R_j = 0 \dots\dots\dots (31a) \end{aligned}$$

となる。

第八章 例題

第七圖の如き4格間の鉄筋コンクリート・ラーメンを格點荷重に對して計算する。格間の長さ及び柱材の高さは共に8mで、部材の斷面は第七圖に示す通りである。

第七圖



(1) 部材の断面の二次率及び扭係数

横桁の二次率:  $J = \frac{1.2 \times 0.8^3}{12} = 0.0512 \text{ m}^4$

柱材の二次率:  $I = \frac{1.2 \times 1.0^3}{12} = 0.1000 \text{ m}^4$

長邊  $a$ , 短邊  $b$  の矩形断面の扭係数は Föppl 氏に依ると,

$$\frac{b^3}{3}(a - 0.63b)$$

であり, C. Bach 氏に依ると

$$a^3 b^3 / (a^2 + b^2) (3.845 - 0.06 \frac{a}{b})$$

である。此の二式に依り計算すると

	横 桁	柱 材
Föppl に依れば	$K = 0.1188 \text{ m}^4$	$H = 0.1900 \text{ m}^4$
Bach に依れば	$K = 0.1196 \text{ m}^4$	$H = 0.1982 \text{ m}^4$
其の平均値	$K = 0.119 \text{ m}^4$	$H = 0.194 \text{ m}^4$

を採用することにする。

今コンクリートに對し

$$E = 2\,100\,000 \text{ T/m}^2, \quad G = \frac{E}{2.1} = 1\,000\,000 \text{ T/m}^2$$

とすると,

$$\mu = 7.44 \times 10^{-5}, \quad \phi = 6.72 \times 10^{-5}, \quad \lambda = 3.81 \times 10^{-5}, \quad \psi = 4.12 \times 10^{-5} \times (\text{Tm})^{-1}$$

となり, 従つて

$$\alpha = 0.554, \quad \beta = 0.512, \quad \gamma = 0.904, \quad \delta = 1.902, \quad \epsilon = 1.765$$

を得る。

(2) 反力  $R_r$

(15a) 式より  $M_r^i$  に對し

$$\left. \begin{aligned} M_0^i - 3.8(4M_1^i) &= (R_2 - P_2)l - 0.902(R_1 - P_1)l, \\ M_1^i - 4.804(M_2^i - M_3^i) &= (R_3 - P_3)l - 1.902(R_2 - P_2)l, \\ M_2^i - 4.804(M_3^i - M_4^i) - M_3^i &= (R_4 - P_4)l - 1.902(R_3 - P_3)l, \\ -4.804(M_4^i - M_5^i) - M_4^i &= (R_5 - P_5)l - 1.902(R_4 - P_4)l \end{aligned} \right\} \dots\dots(34)$$

を得る。此の 4 式を聯立方程式として解き, 其の解を (16a) 式の如く

$$M_r^i = \sum_{i=1}^n f_{ri}(R_i - P_i)l \dots\dots\dots(35)$$

とすると,  $f_{ri}$  に對し第一表を得る。

第一表  $f_{ri}$  の値

$i$	1	2	3	4	5
2	0.3550	-0.1854	-0.0547	-0.0163	-0.0065
3	0.4483	0.2949	-0.2081	-0.0621	-0.0249
4	0.4483	0.4050	0.2629	-0.2341	-0.0807
5	0.3550	0.3436	0.3063	0.1748	-0.2836

ラーメンは左右対称であるから,  $g_{ri}$  は特別の計算を要せず。

$$g_{ri} = f_{(5-r+1), (5-i+1)} \dots\dots\dots (30)$$

より求めることが出来る。

次に (25a) 式を  $n=5$  として聯立方程式として解くと,

$$I_{ri} = \sum_{i=1}^5 k_{ri} R_i h \dots\dots\dots (37)$$

の  $k_{ri}$  に對し第二表に示す値が得られる。

第二表  $k_{ri}$  の値

$i$	1	2	3	4	5	
1	+0.1438	-0.1025	-0.0295	-0.0087	-0.0031	5
2	-0.1025	+0.2167	-0.0816	-0.0240	-0.0087	4
3	-0.0295	-0.0816	+0.2223	-0.0816	-0.0295	3
	5	4	3	2	1	$i$

以上の結果を (31a) 式に代入すると反力に對し

$$\begin{aligned}
 & -4.322R_1 + 1.847R_2 + 2.596R_3 + 3.117R_4 + 3.072R_5 \\
 & = -3.030P_1 + 0.779P_2 + 2.490P_3 + 3.070P_4 + 3.054P_5, \\
 & -3.775R_1 - 3.010R_2 + 2.642R_3 + 3.232R_4 + 3.623R_5 \\
 & = -3.551P_1 - 1.878P_2 + 1.527P_3 + 3.055P_4 + 3.559P_5, \\
 & 3.623R_1 + 3.232R_2 + 2.642R_3 - 3.010R_4 - 3.775R_5 \\
 & = 3.559P_1 + 3.055P_2 + 1.527P_3 - 1.878P_4 - 3.551P_5, \\
 & 3.072R_1 + 3.117R_2 + 2.596R_3 + 1.847R_4 - 4.322R_5 \\
 & = 3.054P_1 + 3.070P_2 + 2.490P_3 + 0.779P_4 - 3.030P_5
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (38)$$

を得る。之れ等の 4 式と (14) 式即ち

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \dots\dots\dots (39)$$

とを聯立方程式として解くと次の結果を得る。

$$\begin{aligned}
 R_1 &= +0.8957P_1 + 0.2066P_2 + 0.0090P_3 - 0.0198P_4 - 0.0102P_5, \\
 R_2 &= +0.2009P_1 + 0.5806P_2 + 0.2105P_3 + 0.0302P_4 - 0.0130P_5, \\
 R_3 &= +0.0165(P_1 + P_5) + 0.2024(P_2 + P_4) + 0.5609P_3, \\
 R_4 &= -0.0130P_1 + 0.0302P_2 + 0.2105P_3 + 0.5806P_4 + 0.2009P_5, \\
 R_5 &= -0.0102P_1 - 0.0198P_2 + 0.0090P_3 + 0.2066P_4 + 0.8957P_5
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

(3) 格點に於ける横桁の彎曲率

$R_r$  が既に解かつたから、格點の直ぐ左の横桁の彎曲率は (35) 式より計算が出来る。即ち

$$\begin{aligned}
 M_1^l &= \left[ -0.8547P_1 + 1.1170P_2 - 0.1223P_3 - 0.1456P_4 - 0.0837P_5 \right] \frac{l}{8}, \\
 M_2^l &= \left[ -0.2421P_1 - 0.5967P_2 + 1.1957P_3 - 0.1693P_4 - 0.1544P_5 \right] \frac{l}{8}, \\
 M_3^l &= \left[ +0.0186P_1 - 0.2360P_2 - 0.6093P_3 + 1.0866P_4 - 0.2933P_5 \right] \frac{l}{8}, \\
 M_4^l &= \left[ +0.0232P_1 + 0.0168P_2 - 0.1976P_3 - 0.5323P_4 + 0.6991P_5 \right] \frac{l}{8}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

格點の右の彎曲率は對稱の關係より

$$M_r^r [P_i \text{ に依る}] = M_{(5-r+1)}^l [P_{(5-r+1)} \text{ に依る}]$$

であるから、(41) 式より直ちに求めることが出来る。

(4) 柱材の頂部及び脚部に於ける彎曲率

柱材の頂部、即ち格點に於ける彎曲率  $L_r$  は (37) 式より

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \left[ +0.7694P_1 - 0.2877P_2 - 0.3695P_3 - 0.1408P_4 - 0.0391P_5 \right] \frac{h}{8}, \\
 L_2 &= \left[ -0.3196P_1 + 0.7008P_2 - 0.0496P_3 - 0.1893P_4 - 0.1194P_5 \right] \frac{h}{8}, \\
 L_3 &= \left[ -0.2813P_1 - 0.0830P_2 + 0.7182P_3 - 0.0830P_4 - 0.2813P_5 \right] \frac{h}{8}, \\
 L_4 &= \left[ -0.1194P_1 - 0.1893P_2 - 0.0496P_3 - 0.7008P_4 - 0.3196P_5 \right] \frac{h}{8}, \\
 L_5 &= \left[ -0.0391P_1 - 0.1408P_2 - 0.3695P_3 - 0.2877P_4 + 0.7694P_5 \right] \frac{h}{8}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

となる。柱材の脚部に於ける彎曲率  $L_r'$  は

$$L_r' = L_r - R_r h \dots\dots\dots(43)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 L_1' &= - \left[ 5.686P_1 + 1.940P_2 + 0.382P_3 - 0.017P_4 - 0.042P_5 \right] \frac{h}{8}, \\
 L_2' &= - \left[ 1.927P_1 + 3.944P_2 + 1.734P_3 + 0.431P_4 + 0.016P_5 \right] \frac{h}{8}, \\
 L_3' &= - \left[ 0.413(P_1 + P_5) + 1.702(P_2 + P_4) + 3.679P_3 \right] \frac{h}{8},
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

$$L_1' = - \left[ 0.016P_1 + 0.431P_2 + 1.734P_3 + 3.944P_4 + 1.927P_5 \right] \frac{h}{8}$$

$$L_5' = - \left[ -0.042P_1 - 0.017P_2 + 0.382P_3 + 1.940P_4 + 5.686P_5 \right] \frac{h}{8}$$

となる。

(6) 扭 偶 力

横桁中の扭偶力は

$$X_r = + \sum_{i=1}^{r-1} L_i = - \sum_{i=r}^5 L_i$$

であるから、

$$X_2 = +L_1, \quad X_5 = -L_5,$$

$$X_3 = \left[ 0.4398P_1 + 0.4131P_2 - 0.3591P_3 - 0.3301P_4 - 0.1585P_5 \right] \frac{h}{8},$$

$$X_4 = \left[ 0.1585P_1 + 0.3301P_2 + 0.3591P_3 - 0.4131P_4 - 0.4398P_5 \right] \frac{h}{8},$$

となり、柱材中の扭偶力は

$$Y_r = M_r' - M_r$$

であるから、

$$Y_1 = +M_1', \quad Y_5 = -M_5',$$

$$Y_2 = \left[ 0.5715P_1 - 0.0305P_2 - 0.4869P_3 - 0.0904P_4 + 0.0523P_5 \right] \frac{l}{8},$$

$$Y_3 = \left[ 0.0876(P_1 - P_3) + 0.4274(P_2 - P_4) \right] l,$$

$$Y_4 = \left[ -0.0523P_1 + 0.0904P_2 + 0.4869P_3 + 0.0905P_4 - 0.5715P_5 \right] \frac{l}{8}$$

となる。

(6) 格 点 の 変 位

格点の変位  $z_r$  は

$$z_r = - \frac{\lambda h}{6} (L_r + 2L_r') \quad \dots \dots \dots (47)$$

より計算する。今

$$h = 8m, \quad \frac{\lambda h}{6} = 5.079 \times 10^{-5} \times T^{-1}$$

であるから、格点  $m$  に 1 籠の荷重がある場合、即ち  $P_m = 1$  籠の場合には格点の変位は第三表に示す値となる。但し単位は mm とする。

第三表 格點の變位 ( $P_m=1$  筋が格點  $m$  にある場合, 單位-mm)

$m$	1	2	3	4	5			
$r$ {	$z_1$	0.539	0.212	0.054	0.005	-0.002	$z_s$ }	
	$z_2$	0.212	0.365	0.179	0.053	0.008		$z_4$ }
	$z_3$	0.056	0.177	0.346	0.117	0.056		$z_3$ }
	5	4	3	2	1	$m$		

## (7) 扭偶力の影響を無視したる場合との比較

上記の結果より解るが如く、此の例題の場合には相當大なる扭偶力を生ずるのであるが、若し此の扭偶力を無視するとすると、

$$X_r = Y_r = 0$$

で、従つて

$$L_r = 0, \quad M_r' = M_r'' = M_r, \quad M_1 = M_5 = 0$$

となり (1) 式, (2) 式, (5) 式及び (6) 式より

$$\left. \begin{aligned} M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1} + \frac{l}{h} L_r' &= -P_r l, \\ L_r' &= -R_r h, \\ M_{r+1} + 4M_r + M_{r-1} + \frac{6}{\mu l} d^2 z_{r-1} &= 0, \\ L_r' &= -\frac{3}{\lambda h} z_r \end{aligned} \right\} \dots \dots (48)$$

を得る。之等の式より  $L_r'$  を求めて見ると、

$$\left. \begin{aligned} L_1' &= -\left[ 7.110P_1 + 1.511P_2 - 0.344P_3 - 0.285P_4 - 0.008P_5 \right] \frac{h}{8}, \\ L_2' &= -\left[ 1.511P_1 + 4.545P_2 + 2.092P_3 + 0.138P_4 - 0.253P_5 \right] \frac{h}{8}, \\ L_3' &= -\left[ -0.344(P_1 + P_5) + 0.360(P_2 + P_4) + 4.504P_3 \right] \frac{h}{8}, \\ L_4' &= -\left[ -0.253P_1 + 0.138P_2 + 2.092P_3 + 4.545P_4 + 1.511P_5 \right] \frac{h}{8}, \\ L_5' &= -\left[ -0.008P_1 - 0.285P_2 - 0.344P_3 + 1.511P_4 + 7.110P_5 \right] \frac{h}{8} \end{aligned} \right\} \dots \dots (49)$$

を得る。之と (44) 式とを比較すると、其の間に可成り大なる差異がある事が解る。例へば  $P_1$  が格點 1 にある場合の  $L_1'$  の差は約 25%、 $P_2$  が格點 2 にある場合の  $L_2'$  の差は 15%、 $P_3$  が格點 3 にある場合の  $L_3'$  の差は 22% である。

(以上)