講演

土木學會誌 第十八卷第八號 昭和七年八月

格子の理論と其の應用に就て

(昭和七年四月六日第二回工學會大會土木部會に於て)

會員 工學士 福田武雄

On the Theory of Rigid Frame with Loads Acting Normal to its Plane and the Applications thereof.

By Takeo Fukuda, C. E., Member.

內容梗概

本講演は土木學會誌第十七卷第五號、第十號及第十八卷第六號に登載された上の引續いて同誌上に發表せんとする著者の研究報告 „Theorie der Roste und ihre Anwendungen" の大要に就て述べたものである。

緒言

玆に**格子**(Rost)と稱するのは**平面格子**とも言ふべきものであつて、ラーメン(Rahmen)と同樣に一平面內に於て互に交叉し且つ其の交點に於て剛結せられたる二群の部材より成る構造物であつて、其ラーメンと相違する點はラーメンに於ては外力が總べて部材を含む平面內に作用するに反し、格子に於ては外力は此の平面に直角に作用する。從つてラーメンと格子との關係は丁度 Scheibe と Platten との關係と同樣である。今任意の方向に作用する外力は之れを或る一平面內の二つの分力及び之れと直角の方向の分力とに分けることが出來るから、ラーメンの理論より得られる結果と格子の理論より得られる結果とを加へ合せることによつて、上記の如き構造物に對する任意の方向の外力の影響を知ることが出來る。次に述べるものは既に土木學會誌第十七卷第五號及び同第十號に發表し更に引續いて同誌上に發表せんとする拙稿の概略である。[1]

今任意の形狀を有する格子に就て考慮するの煩を避けて、玆では格子を形成する部材は總べて直線であつて且つ互に直交し其の交點卽ち格點間內に於ては一樣の斷面を有する壞體であるものとする。また計算に對する假定に就ては一般の構造力學に於て假定せらるゝ所より

1) Theorie der Roste und ihre Anwendungen.

一歩も外に出ない。即ち外力に依る構造物の變形は構造物の寸法に比し極めて微小なるものとし，構造物中には軸力を生ぜず且つ剪力に依る變形を無視するものである。

此の種格子に關し格點の剛結性從つて夫れに依つて生ずる捩偶力の影響を考慮したものに Genttner[1] の研究がある。Genttner は格點に於ける部材の角變化と外力の方向の格點の變位とを未知數として式を誘導し，部材が總べて同一の斷面を有し且つ等間隔にある特別なる場合を所謂リッツ (Ritz) の方法に依つて近似的に解く方法を示し，其の結果として捩偶力の影響は大したものでなく，次に述べる Bleich 及び Melan の如く之れを省略するも大なる誤差は生じないものと言つて居る。然し著者の研究に依れば捩偶力の値其のものは假令小であつても其の影響は場合に依つては甚だ大であつて，一般に之れを無視することは出來ない。捩偶力及び其の影響を全然無視して格子の問題を取扱つたものは Bleich 及び Melan の差力程式による解法である[2]。即ち Bleich 及び Melan は其の解法中に於て格子の部材中には全然捩偶力を生じないこと，從つて格點に於ける交叉部材の結合は只此の交叉部材が同一の變位をする樣に作られ，部材は格點に於て何等の拘束もなく自由に轉回し得る樣に結合されたものと假定した。此の假定は鐵筋コンクリート構造の鐵筋に依つて形成される格子狀のものに於ては當て嵌るが，一般の鐵筋コンクリート構造物若くは鐵骨構造物等の場合には全く滿足されるものとは考へることが出來ない。

著者は格子を解くのに格點に於ける部材の彎曲率，變位，部材中の捩偶力及び格點に於ける反力を未知數として撰んだ。蓋し之れ等のものがわかれば部材の任意の斷面に於ける彎曲率，剪力及び捩偶力は直ちに一般の構造力學の理論に依り求めることが出來，從つて部材の任意の斷面に於ける種々の應力の値を求め得るからである。

今 xyz の直交坐標を採用し格子は xy 面にあつて其の部材は x 或は y 軸に平行とし，外力及び變位の正の方向を z の方向とする。格點を表はすのに (rs) を以つてし，r 或は s の軸は x 或は y の軸に一致するものとし，次の如き符號を採用する。

l_r 及び h_r: 格點 $(rs)-(r-1,s)$ 及び $(rs)-(r,s-1)$ 間の距離，

J_{rs} 及び I_{rs}: 部材 $(rs)-(r-1,s)$ 及び部材 $(rs)-(r,s-1)$ の xy 面中にある軸のまはりの二次率，

K_{rs} 及び H_{rs}: 夫々上記部材の捩係數 (Torsion constant, Drillungswiderstand)，

Z_{rs}: 格點 (rs) の變位，

---

1) Richard Genttner, Der Eisenbeton Trägerrost, B. u. E. 1928, Heft 22, 23. 之れに關しては此の文獻に就き御注意を揭はりし物部長穗博士に謝意を表する次第である。

2) Bleich-Melan, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik, 1927.

P_{rs}:　　格點 (rs) に集中せる場合の外力,

R_{rs}:　　格點 (rs) に於ける反力,

M^l_{rs} 及び M^r_{rs}: 格點 (rs) に於て部材 $(rs)-(r-1,s)$ 及び $(rs)-(r+1,s)$ に作用する彎曲率,

L^u_{rs} 及び L^o_{rs}: 格點 (rs) に於て部材 $(rs)-(r,s-1)$ 及び $(rs)-(r,s+1)$ に作用する彎曲率,

X_{rs} 及び Y_{rs}: 部材 $(rs)-(r-1,s)$ 及び $(rs)-(r,s-1)$ 中に生ぜる捩偶力,

E 及び G: 部材々料のヤング係數及び剛性係數,

但し上記のうち反力 R_{rs} の方向は z の負の方向を正とし, 彎曲率は一般の構造力學に於けるが如く部材の彎曲の曲率半徑の中心が z の負の方向にある場合を正とし, 捩偶力の方向は坐標原點より見た場合 x に平行な部材では之れが時計の針の進む方向に捩られたとき, y に平行な部材では之れが時計の針と反對の方向に捩られたときを正とする。

格子の一般方程式

1. 格點に於ける z の方向の力の平衡條件

格點 (rs) には一般に4本の部材が集る。之れ等部材を夫々格點に於て支承された單桁と考へた場合に, 之れ等單桁の格點 (rs) に於ける外力に依る反力の和が P_{rs} であるから, 此の P_{rs} と彎曲率に依る z の方向の力とは, 此の格點に於ける反力 R_{rs} と平衡を保たねばならない。此の平衡條件より次の式が生れる。

$$\Delta_x\left(\frac{M^l_{rs}-M^r_{r-1,s}}{l_r}\right)+\Delta_y\left(\frac{L^u_{rs}-L^o_{r,s-1}}{h_s}\right)+P_{rs}=R_{rs}\quad\cdots\cdots(1)$$

若し格點が支承されて居ない場合には $R_{rs}=0$ であるから

$$\Delta_x\left(\frac{M^l_{rs}-M^r_{r-1,s}}{l_r}\right)+\Delta_y\left(\frac{L^u_{rs}-L^o_{r,s-1}}{h_r}\right)+P_{rs}=0\quad\cdots\cdots(1a)$$

となる。

2. 格點に於ける力率の平衡條件

格點 (rs) に於て彎曲率と捩偶力とは釣合を保たねばならない。之れを xz 面に平行なる方向と yz 面に平行な方向とに分けて考へると

$$Y_{r,s+1}-Y_{rs}\equiv\Delta_y Y_{rs}=M^l_{rs}-M^r_{rs}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$X_{r+1,s}-X_{rs}\equiv\Delta_x X_{rs}=L^u_{rs}-L^o_{rs}\quad\cdots\cdots(3)$$

3. 部材の連續條件

格點に鉸がある場合を除き格點に於て部材は連續して居るから, 相對する部材の格點に於ける彎曲角は相等しくしなければならない。今格點 (rs) に就て考へると普通の連桁に於けるクラペイロン (Clapeyron) の式に相應すべき

$$\mu_{rs}(M^r_{r-1,s}+2M^l_{rs})+\mu_{r+1,s}(2M^r_{rs}+M^l_{r+1,s})$$
$$+6\Delta_x\left(\frac{1}{l_r}\Delta_x z_{r-1,s}\right)+6U_{rs}=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

及び

$$\lambda_{rs}(L^v_{r,s-1}+2L^u_{rs})+\lambda_{r,s+1}(2L^v_{rs}+L^u_{r,s+1})$$
$$+6\Delta\left(\frac{1}{h_s}\Delta_y z_{r,s-1}\right)+6V_{rs}=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

なる兩式を得る。玆に

$$\mu_{rs}=\frac{l_r}{EJ_{rs}}, \qquad \lambda_{rs}=\frac{h_s}{EI_{rs}},$$

$$U_{rs}=\frac{\mu_{rs}}{l_r}S^l_{rs}+\frac{\mu_{r+1,s}}{l_{r+1}}S^r_{rs}, \qquad V_{rs}=\frac{\lambda_{rs}}{h_s}T^u_{rs}+\frac{\lambda_{r,s+1}}{h_{s+1}}T^v_{rs},$$

$$S^l_{rs}=\frac{1}{l_r}\int_0^{l_r}M_{rs,0}\,x\,dx, \qquad T^u_{rs}=\frac{1}{h_s}\int_0^{h_s}L_{rs,0}\,y\,dy$$

$$S^r_{rs}=\frac{1}{l_{r+1}}\int_0^{l_{r+1}}M_{r+1,s,0}(l_{r+1}-x)\,dx, \qquad T^v_{rs}=\frac{1}{h_{s+1}}\int_0^{h_{s+1}}L_{r,s+1,0}(h_{s+1}-y)\,dy$$

であつて $M_{rs,0}$ 及び $L_{rs,0}$ は夫々部材を格點に於て支承された單桁と考へた場合の外力に依る彎曲率である。

4. 二つの格點間の部材に於ける捩偶力は此の部材の兩端の格點に於て之れと直角に交はる部材の彎曲角の差に依つて生ずるものであつて，此の彎曲角の差と捩偶力との關係を求めると，x 軸に平行なる部材に對しては

$$\phi_{rs}X_{rs}=-\frac{1}{h_s}\Delta_x\Delta_y(z_{r-1,s-1})+\frac{1}{6}\Delta_x\Big[\lambda_{r-1,s}(2L^u_{r-1,s}+L^v_{r-1,s-1})\Big]$$
$$+\frac{1}{h_s}\Delta_x(\lambda_{r-1,s}T^u_{r-1,s}) \quad \cdots\cdots(6)$$

或は

$$\phi_{rs}X_{rs}=-\frac{1}{h_{s+1}}\Delta_x\Delta_y(z_{r-1,s})-\frac{1}{6}\Delta_x\Big[\lambda_{r-1,s+1}(2L^v_{r-1,s}+L^u_{r-1,s+1})\Big]$$
$$-\frac{1}{h_{s+1}}\Delta_x(\lambda_{r-1,s+1}T^v_{r-1,s}), \quad \cdots\cdots(6')$$

y 軸に平行なる部材に對しては

$$\psi_{rs}Y_{rs}=-\frac{1}{l_r}\Delta_x\Delta_y(z_{r-1,s-1})+\frac{1}{6}\Delta_y\Big[\mu_{r,s-1}(2M^l_{r,s-1}+M^r_{r-1,s-1})\Big]$$
$$+\frac{1}{l_r}\Delta_y(\mu_{r,s-1}S^l_{r,s-1}) \quad \cdots\cdots(7)$$

或は

$$\psi_{rs}Y_{rs}=-\frac{1}{l_{r+1}}\Delta_x\Delta_y(z_{r,s-1})-\frac{1}{6}\Delta_y\Big[\mu_{r+1,s-1}(2M^r_{r,s-1}+M^l_{r+1,s-1})\Big]$$
$$-\frac{1}{l_{r+1}}\Delta_y(\mu_{r+1,s-1}S^r_{r,s-1}) \quad \cdots\cdots(7')$$

を得る。此の中（6′）式は（5）式と（6）式とより誘導することが出來，また（7′）式は（4）式と（7）式とより誘導し得る式であるから，此の兩式は共に獨立の式ではない。

從つて上記の如き考察に依つて一つの格點に就き（1）式乃至（7）式の7個の各々互に獨立せる方程式を得た譯である。然るに決定を要すべき未知數は格點（rs）に關し Z_{rs}, R_{rs}, M^l_{rs}, M^r_{rs}, L^u_{rs}, L^o_{rs}, X_{rs} 及び Y_{rs} の8個であるが，一般に支承せられない格點に於ては反力は無いから $R_{rs}=0$ であり，また支承せられる格點では反力が存在する代りに $Z_{rs}=0$ である。從つて實際の未知數の數は一般に一格點に就き7個であつて，前記方程式の數と一致する。また之れに反し Z_{rs} と R_{rs} と同時に存在する場合，例へば彈性的に支持された場合に於ては Z_{rs} と R_{rs} との間に特殊の關係があるものと考へられるから，此の場合に於ても一格點に於ける未知數の數と方程式の數とは相一致する。之れは格子の內部の格點に就てであるが，邊緣の格點に於ては種々なる邊緣條件に依つて未知數の數は一般に7個より小となる。然し此の場合にも邊緣條件を考慮することに依つて未知數の數だけの各々獨立せる方程式を得ることが出來る。從つて結局に於て如何なる邊緣條件の場合にも格子全體の未知數の數と方程式の數とは相一致し，之れに依つて格子の靜力學的問題は解決し得るものと言へやう。

上記の格子の理論は其の解法さへ簡單ならば種々なる構造物に之れを應用することが出來る。例へば建築物のラーメンに之れに垂直に外力が作用した場合，床桁及び縱桁に依つて形成される橋梁の床部構造，殊に橋梁が skew なる場合，飛行機の翼の構造或は下水のマン・ホールの蓋等に應用することが出來る。然し之れ等種々の格子で其の格點の多いものを嚴密に解くことは殆んど不可能である。之れは前述の方程式を解くのは一般には消去法に依る外に道がなく，格點の數が增すに從つて其の7倍もある多數の方程式を消去法に依つて解くことは概念的には可能であつても實際上は殆んど不可能である。從つて之れ等のものを解くにはどうしても近似解法に依らなければならない。然し之れは後日の研究に讓ることにする。

玆で說明するのは格點の數が比較的に少く消去法に依つて簡單に其の解を得られるやうな格子及び前記の偏差方程式（Partielle Differenzengleichungen）とも見られるべき格子の一般方程式の代りに適當な順序に依つて普通の差方程式（Gewöhnliche Differenzengleichungen）を用ひて比較的に簡單に解き得る場合の例に就て述べることにする。此の後者に屬するものに梯子桁と一層ラーメンとがある。梯子桁とは著者が勝手に命名したものであつて，恰も梯子の如く2本の平行なる主桁と之れに直角に剛結された任意の數の橫桁とより成る構造物で，之れを含む面に直角に外力が作用した場合である。卽ち普通の鐵道橋の單線鋼鈑桁の如きものである。梯子桁の兩端が單純に支承せられた場合は卽ち前記の鋼鈑桁の場合であつて，其の理論は今迄床桁は主桁に鉄に依つて剛結せらるゝに拘はらず床桁も主桁も各獨立せる單桁として計算するを常とせる普通の計算方法に對し其の嚴密なる算法を示すものと言へ

やう。また一端固定，他端自由なる梯子桁は言ひ換へれば一張間(二柱)多層ラーメンである。

また梯子桁の一主桁の斷面を無限大と考へれば柱脚固定の一層ラーメンとなる。其の一般解法は之れを昨年 10 月應用力學聯合大會で發表した。茲では其の簡單なる場合の例を示すことにする。

最後に格子に關する實驗に就て述べる。實驗は厚さ 3mm のエボナイト板より切り拔いて作つた格子に重さを掛けて，其の格點の變位を測定し之れと上記の理論より生ずる計算値を比較したのである。計算に依つて變位を求めるには其の彈性係數を知る必要があるから，先づ彎曲試驗に依つてヤング係數 E の値を求めた。其の結果に依ると普通の計算方法に依る緣維應力が 100 kg/cm² 迄はヤング係數は大體 $E=33\,200$ kg/cm² であつた。

E の他に剛性係數 G を知る必要もあるが，之れを測定する裝置が無かつたので已むを得ずポアソン係數 m を 4 卽ち $G=E/2.5$ として計算に依つて出した。之れ等の彈性係數を用ひて計算した變位と實測に依る變位との差は大なる場合で約 8 %，小なる場合は殆んど零であつて，實驗の精密でなかつたこと，彈性係數の不確實であること等を考へれば實驗の結果と計算の結果とは可成りよく一致したものと言へる。此の實驗に當つては東京帝國大學教授山口昇博士が往年板に於ける熱應力の實驗に際して製作せられた裝置をそのまゝ借用したものであつて茲に謝意を表する次第である。

以上は單に格子の一般方程式の一體系と之れに依つて解き得る比較的簡單なる應用例であるが，橋梁の床部構造或は建築構造等は之れを格子として考へる方が實際に近く，また之等 monolythic な構造物の效用價値を高める上に於ても妥當であるから，單に計算が面倒であるとか或はまた其の嚴密なる解を得ることが困難であると言ふ理由に依つて，之等構造物を簡單なる算法に依り片付けることをせず，格子として其の近似解を求めることは今後の重要なる問題として研究すべきものではないかと考へられる。

(以　上)