討　　論

土木學會誌　第十八卷第四號　昭和七年四月

單鉸拱振動に關する考究

(第十七卷第十二號所載)

會員　庄　野　卷　治

本會誌第十七卷第十二號に在る三浦博士の單鉸拱振動に關する考究は實に有益の論文にて此の種の實驗的研究は眞に貴重なものである。筆者は從來此の種類の問題に特別の興味を持ち色々研究して居ますが其の體驗に依りますと力學上の公式類の編成には豫想外の苦勞と困難の伴ふ場合の多きを痛感する次第にて博士の本研究も仲々容易でなかつたことゝ推察致します。從て多少の間違が有つても夫れは決して博士の本研究の價値を落すものではありません。殊に其の實驗上の價値は何者も之れを動かし得ぬ絶大の權威を保持して居ます。筆者が玆に些細な數學上の間違を指摘するのは筆者が今日迄參考書中の誤植されたる公式や雜誌中の論文にある公式類を鵜呑にして非常に迷惑したこと多きために過ぎないのであります。

著者の微分方程式 (3) は Forsyth "Differential Equations" 5th edition, page 80, Ex. 19. に依り解答しますと

$$u=A\cos\theta+B\sin\theta-\frac{Pr^3}{EJ}+\frac{Pr^3}{2EJ}\theta\sin\theta-\frac{Xr^3}{2EJ}(\theta\cos\theta-\sin\theta)$$

にして著者のは違ひます。然れども此の眞解に於て $\sin\theta$ の係數は B と $Xr^3\div2EJ$ の2種あるから著者の如く EJ を常數と見る場合に此の兩者を合せて新たに B と爲し得るに依り (4) 式は間違なきものとなります。著者が振動數の計算には J を不均一と見るに係らず振動曲線に於て之れを均一と見るのは不合理では有るが著者の見解通り極端の場合を除き振動數には大差なからんと思ひます。

著者が位置の勢力を求むるに

$$V=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\phi}\frac{M^2r}{EJ}d\theta$$

を用ひて居られるのは正當で，本式は任意の桁に適用することが出來ます。然るに次の行に移る時に著者は (1) 式にて u と M の關係式を與へてあるから

$$M=-\frac{EJ}{r^2}\left(\frac{d^2\eta}{d\theta^2}+\eta\right)$$

を用ひねばならぬのに著者は直桁の場合の

$$M=-\frac{EJ}{r^2}\times\frac{d^2\eta'}{d\theta^2}$$

を用ひて居ます。從て (17) 及び (18) に依る c 及び n の値は徑間 $2r\phi$ の單鉸直桁が單鉸拱同様の振動を爲すと見做す時の値にして餘りに無理な註文であります。斯くては寧ろ此の種直桁が直桁特有の振動を爲すと假定する方が却て實驗値に近似する結果を得べく想像されます。著者實驗の成績も之れを暗示して居ます。

單鉸拱の振動曲線は node を有する特異の曲線にして直桁のそれとは全然形狀が違ひます。然るにも係らず極端の場合として其の鉸點を開放し且つ直線に展開したる突桁特有の振動を爲すと想定する時にすら大體に於て大差なき振動數を得ることが著者の實驗に依り判明せるは實に快哉の至りである。單鉸拱の正しき解法に依る振動數は之れよりも一層實驗成績に接近するや明瞭であります。Lord Rayleigh が振動曲線を合理的に假定せば振動數には常に大差を見ずと保證せるは直棒のことである。著者が甚しく振動曲線を異にする彎の曲棒に於ても亦同様なることを實證されたるは感謝に堪へない次第であります。

拱の載荷實驗に於て徑間の擴大量を實測されて居ますのは實に穩當且つ必要の事柄であります。又著者は單鉸拱の撓度試驗に於て取付部の回轉は殆んど表はれざりし故を以て之れを無視されて居ますが微細の回轉も應力及び撓度に對して重大の影響を及ぼしますから等閑に附し得ない場合が隨分有ると思ひます。伊太利の Prof. C. Guidi が圓弧筒の水壓に對する撓度實驗に於て徑間の擴大を防止する方法其の他に最大の注意を拂ひたる實驗成績は理論上回轉に對し固定の不充分なるにあらざれば成立し難き撓度曲線を得て居ます。かの有名なる試驗用 Stevenson Creek Dam に於ては又別種の撓度弧線を得て居ます。要するに拱體自身も基礎岩盤も剛體でないから多少の移動回轉は免かれぬものである。從て實際には大凡そ何程の移動と回轉を見込んで設計すればよいかを定め得るに至るを理想とすべきであるから其の豫備手段として理論と實驗は成るべく詳密なるを可とする樣に考へます。勿論振動數は之れ等の條件に概して鈍感であるから著者が固定部の回轉を此の場合に無視されたのは贊成であります。撓度の實測が拱項のみならず其の他の諸點に於ても行はれて居ますならば其の觀測値を利用し Arthur Morley 博士の公式に依り容易く振動數を求め得る筈であるのに之れを避けられたのは撓度の觀測が各點に亘つて居ないのかと筆者は推察致します。要するに桁全體に亘り振動の振幅さへ判れば振動數の算出は容易であるから桁の靜荷重に對する撓度又能ふべくんば實際振動する時の振幅を擴大して全部寫眞に撮る樣な仕掛は出來ないものでせうか，筆者の空想に過ぎないかも知れないが若し實現せば學界の福音と信じます。

筆者は數年前に圓弧桁の任意點の撓度を求むるに不純の假定を交ゆるもの多きに慨憤し，微分方程式の解法に依り本問題を解決せんと欲し，色々取調べしも持合の參考書中には讒に

其の微分方程式を發見するを得ず，全く無いものと諦らめて筆者自身に誘導したる圓弧桁の放射撓度の微分方程式は

彎曲率に對し $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{r_n^2M}{EJ'}$

軸壓力に對し $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{r_nC}{EF}$

剪力に對し $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\tau r}{EF}S\right)$

式中 M: 彎曲率

C: 軸壓力

S: 剪　力

E: 桁材の應張及び應壓彈性係數

$\tau=\{E\div$(對剪力彈性係數$)\}\times1.2$

r: 重心線の半徑

r_n: 中和軸の半徑

F: 桁の斷面積

$J'=(r-r_n)r_nF$ にして弧惰性率とも云ふべきもの

なるも實際に煩はしき演算を要し，殊に對剪力撓度は任意常數の選定に困難を來たし應用殆んど不可能なるを發見しましたため近來は圓弧桁の任意點の撓度を求むるに微分方程式を利用する如き迂遠な方法は採らないことにして居ます。斯くの如き次第で漸く筆者の記憶を脫せんとして居た公式が俄然著者の（1）式として現はれたので筆者は飛立つ程に驚いたのです。（1）式の出所を教へて下さらば非常に筆者の參考になります。今上式彎曲率に對する撓度の微分方程式に於て拱厚を薄きものと見て r_n を r，J' を J とせば著者の（1）式となります。故に（1）式は振動曲線の微分方程式にあらずして撓度のそれである。動力學的の振動曲線を靜力學的の撓度曲線と見做して其の振動數を求むるは既に Arthur Morley 氏の試みた方法で兩者同一轍である，公式誘導の徑路を辿るも當然同一の結果に到達する筈の樣に思ひます。著者の（1）式に代るべき均一斷面圓弧桁の振動曲線の微分方程式は理論上

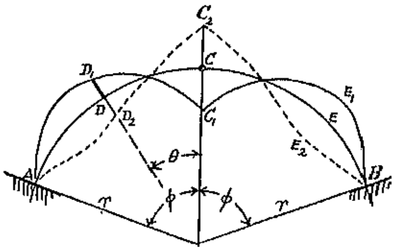
$$\frac{d^4\eta}{d\theta^4}+\frac{d^2\eta}{d\theta^2}+\frac{r^4(F\rho+p)}{EJg}\times\frac{d^2\eta}{dt^2}=0$$

にして Lord Rayleigh が直棒を扱ひたる方法に準じ其の一般解を得る事，及び單鉸拱に對し任意常數を決定する事容易なるも肝腎の周期を求むる公式極めて複雜となり振動數を算出する事，實際的に不可能であります。從て矢張り略法に滿足せねばならぬと筆者は思ひます。

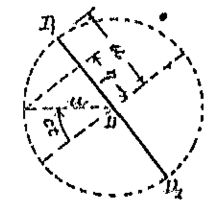
Arthur Morley 博士の其の著 "Strength of Materials" Chapter XIV に於て各種の振動を明快且つ實用的に說明して居ます。其の Art. 102 は均一斷面の直桁の橫振動の振動數を求むる略法でありますが，振動曲線を合理的に假定せば振動數に大差を見ずと云ふ評譯が曲棒にも當嵌まるものとせば任意の桁に其の儘應用することが出來ます。次に其の理由を說

明し筆者の考案を述べたいと思ひます。

第一圖



第二圖



假りに對稱的の圓弧桁を用ひて説明せん。**第一圖**に於て ADCEB は何物も作用せざる時の無應力平衡狀態に在る圓弧桁の重心線にして其の半徑を r とす。又 $AD_1C_1E_1B$ 及び $AD_2C_2E_2B$ は理論的若しくは實驗上判明せる振動の半振幅曲線にして若し理論的にも實驗的にも形狀不明の時は夫々自重並に外力の正負の作用に對する靜力學的撓度曲線を使用しても振動數を求むる目的には差閊無しと假定す。其のいづれの場合に於ても放射振動は單弦運動を爲すものと見做す。又桁の自重や荷重は桁の重心線內に集合配置すと見る，從て問題は質量を有する線弧の振動を考ふることになります。

今 D 點附近に作用する垂直力の密度を $(F\rho+p)$ とせば其の附近 $rd\theta$ なる微區間の重量は $(F\rho+p)rd\theta$，質量は $\{F\rho+p)+g\}rd\theta$ である。この質點の振動通路を放射線に投影せるものが D_1D_2 にして放射振動は D_1D_2 $(=2u)$ を振幅とする單弦運動であります。**第二圖**はこれを擴大せるもので半振幅 u を半徑とする指導圓を畫き質點が D に在る瞬間より時間 t を數へるものとし，角速度を c とせば t 時間の後 ct 角を張る指導圓の半徑を D_1D_2 に投影せるものが η であるから質點の單弦運動は $\eta=u\sin ct$ にて表はさる。而して振動數 $n=c\div 2\pi$ を得るのである。質點が振幅 D_1D_2 を運動する速度は $c\sqrt{u^2-\eta^2}$ なることは物理學上周知の事柄である。故に質點の速度は $\eta=0$ に於て最大にして cu を得，從て此の瞬間に質點の有する勢力は全部運動の勢力にして $\frac{1}{2}\{(F\rho+p)(cu)^2\div g\}rd\theta$ にて表はさる。故に桁全體が ADCEB の位置にある時運動系の勢力は悉く運動の勢力にして其の總和を T とせば

$$T=2\times\frac{c^2r}{2g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2d\theta$$

更に $\eta=u$，即ち D_1 點に於ては速度零にして質點の有する勢力は全部位置の勢力である。位置の勢力零なる D 點より D_1 迄の距離は u であるから，この位置の勢力は $\frac{1}{2}(F\rho+p)urd\theta$ にて表はさる。故に桁全體が $AD_1C_1E_1B$ の位置に在る時，運動系の勢力は皆位置の勢力にして其の總和を V とせば

$$V=2\times\frac{r}{2}\int_0^\phi(F\rho+p)ud\theta$$

$T=T'$ であらねばならぬに依り直ちに

$(F\rho+p)$ が各部不同なる時は

$$c^2=\frac{g\int_0^{\phi}(F\rho+p)ud\theta}{\int_0^{\phi}(F\rho+p)u^2d\theta},\ \text{從て}\quad n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\int_0^{\phi}(F\rho+p)ud\theta}{\int_0^{\phi}(F\rho+p)u^2d\theta}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$(F\rho+p)$ が各部均一なる時は

$$c^2=\frac{g\int_0^{\phi}ud\theta}{\int_0^{\phi}u^2d\theta},\ \text{從て}\quad n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\int_0^{\phi}ud\theta}{\int_0^{\phi}u^2d\theta}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

上の各式は $(F\rho+p)$ 及び u が C 點の左右對稱的の場合なるも非對稱的の時には積分限界を桁の全體を包含する樣に取れば可なること明白である。

Morley 氏は均一斷面の直桁に對し (b) 式を舉げて居ますが以上說明の經路に徵し (a), (b) 兩式は圓弧桁及び直桁のみならず其の他任意の桁に其の儘適用し得ること明瞭にして工學的振動に關し重寶な公式であると思ひます。但し其の應用に方り注意せねばならぬことが澤山ある。卽ち箇條書きにすれば

1. 桁斷面の回轉及び切線方向の移動，運動の惰性，桁內分子の摩擦，空氣其の他外部の抵抗に對する勢力等を全部無視せること。
2. 之れ等公式に用ふべき u が精密なる實驗上の値，又は理論的振動曲線の半振幅なる時は (a) 及び (b) は正しき値を與ふ。靜力學的撓度曲線の u なる時は正しき値と大差なき結果を與ふ。
3. 直桁の如く基本振動が node を有せざるものは u の代數式を之れ等公式中の u に代入して c 及び n の代數式を誘導すること容易なるは Morley 氏の試みた通りである。
4. 然れども圓弧桁其の他基本振動が node を有するものは u の代數式を之れ等公式中の u に代入する場合 (a) 及び (b) 式の分子の樣に積分記號內に u を有するものは積分限界を node の點每に分割し且つ各々絕對値のみを取らねばならぬ。然るに實際は node の位置を代數式で表はすこと困難なる場合多く，從て積分限界を區分し得ざるため (a) 及び (b) に依り c 及び n の代數式を誘導するは不可能なり。

   其の理由は u の代數式は **第一圖** ADCEB より下に測るを正號とせば上に測るは負號となる筈である。然るに (a), (b) 兩式を誘導する爲，位置の勢力を考ふる時には双方共正號を採用する約束にたつて居り，且つ分母の積分內は u^2 を含むため u の符號に無關係なるも分子の積分內には u を含み u の符號に從ひ實値に正負の別を來すためである。故に直桁以外の場合に (a) 及び (b) 式を實用に供するには以下記載の方法に據るを可とす。

5. 振動曲線に nodo を有する擬あるものは次の如くす。

先づ一般に (a) 式に就て論ぜんとす。

u の公式を用ひ桁内成るべく多數の點に於て計算せる u の絶對値を 2 倍して諸點の振幅 $U(=2|u|)$ を求む。若し各點に於て實測せる振幅あらば直に其の實測値を採用す。

次に桁長を適宜の縮尺に展開せるものを横線とし，各點の $(F\rho+p)U$ を適宜縮尺にて縱距とする圖表を畫き，其の全面積を測り之れを實尺に換算したるものを A_1 とす。

次に同樣に $(F\rho+p)U^2$ を縱距とする圖表の全面積を測り之れを實尺に換算したものを A_2 とす。

此の場合云ふ迄もなく

水平縮尺	桁長	1 cm を以て a cm を表はし
垂直縮尺	$(F\rho+p)U$ 又は $(F\rho+p)U^2$	1 cm. を以て夫れ等の b を表はし
圖上面積	實測の結果	m cm².

なる時は (實尺面積)$=ab\,m$ である。

斯くの如くして A_1 及び A_2 を求めば (a) 式は次の如くなる。

$$c^2=\frac{2gA_1}{A_2},\quad 従て\quad n=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{gA_1}{2A_2}} \qquad\cdots\cdots(e)$$

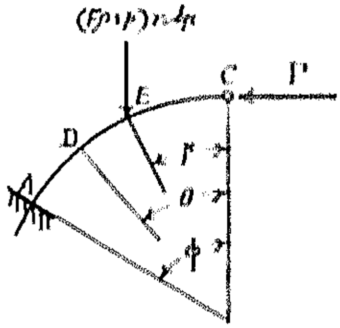
本式に依て c 及び n を求むることが出來ます。

均一斷面の桁に於ては A_1 及び A_2 を求むる際 $(F\rho+p)U$ の代りに U，$(F\rho+p)U^2$ の代りに U^2 を用ふればよいので一層手數が省けます。

以上の方法は勿論 nodo の有無に關せず總ての場合に適用出來ます。

單鉸拱に於ても諸點の振幅が極めて精密に實測され居る場合には (e) 式を利用して正しき振動數を算出すること容易なるも，然らざる場合は靜力學的の撓度を用ひて大差なき振動數を求むるに滿足せねばならぬ。其の目的に向て任意點の撓度公式等を必要とするからこれ等を次に求めます。勿論原著に準し單に彎曲率のみを考へ，桁の重心線と中和軸は一致すと見做し，荷重は p なる密度を以て重心線に等布され，桁は鉸點の左右對稱的にして各部等質とし，特に均一斷面且つ兩端取付部の移動回轉が對稱的の場合だけを述べます。

第三圖



第一番に求むべきは重心線内任意 D 點の應力公式である。今桁の鉸點に於ては彎曲率は常に零である，又拱體も荷重も鉸點の左右對稱的且つ兩端取付部の移動回轉亦對稱的なる單鉸拱の鉸點に於ては剪力も零である。從て第三圖の如く鉸點にて拱を兩斷し，其の一片 AC を A 端固定，C 端自由の突桁にして C 端に未知水平力 P を加へて切斷前同樣の平

衡狀態を保つと想像するを得。從て斯く想像したる突桁に於て D 點の應力を求めればよい。今 CD 間適意 E 點の微面積は $rd\mu$ にして自重密度は $F\rho$，荷重密度は p なる故に此の微區間に作用する垂直力は $(F\rho+p)rd\mu$ である。其の他第三圖の通りとせば CA 間任意 D 點の應力は

彎曲率　$$M=Pr(1-\cos\theta)-(F\rho+p)r^2\int_0^\theta(\sin\theta-\sin\mu)d\mu$$
$$=Pr(1-\cos\theta)-(F\rho+p)r^2(\theta\sin\theta+\cos\theta-1)$$

軸壓力　$$C=P\cos\theta+(F\rho+p)r\int_0^\theta\sin(\theta-\mu)d\mu=P\cos\theta+(F\rho+p)r(1-\cos\theta)$$

剪　力　$$S=-P\sin\theta+(F\rho+p)r\int_0^\theta\cos(\theta-\mu)d\mu=-P\sin\theta+(F\rho+p)r\sin\theta$$

今式中の未知量 P を求むるため半分拱の彎曲率のみに對する全內働を L とせば

$$L=\frac{r}{2EI}\int_0^\phi M^2d\theta$$

茲に兩端取付部の移動回轉と應力の關係を考察せねばならぬ。對稱的垂直移動は單に拱體の全體的上下移動を招くのみにて變形せず從て拱體の應力に無關係なる故考慮する要無し。對稱的水平移動は徑間の伸縮を來し拱體に變形を招くに依り無視してはならぬ。水平移動は單純に徑間の伸縮量を以て度るべきもので荷重も拱體も對稱的なる場合，半分拱 AC を考ふる時には A 端が徑間伸縮量の半分だけ水平に移動すと見ればよい。卽ち

Δl＝徑間の伸縮量（伸長を正號，短縮を負號と約束す）

とせば水平的に C 點不動，A 點は P と同方向に $\Delta l\div2$ の移動となるのが實際であるけれども A 端不動と見る AC 突桁を考ふる場合には之れを反對に見て C 點が P の反對方向に $\Delta l\div2$ の移動を爲すものと見ねばならぬ。又兩端の對稱的回轉は拱體に變形を起すに依り無視するを得ず。

Δ_ϕ＝A 及び B 端の各回轉量

A 端にては反時計針回轉を正號，B 端に於ては時計針回轉を正號とす。

とせば AC 突桁に於ては C 點が P の方向に $r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi$ だけ移動する筈である。然るに全體拱として此の移動は許されざるに依り AC 突桁の C 點には P の反對方向に $r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi$ だけの移動を强制せねばならぬ。斯くの如くして AC 突桁の應力が全體拱の時と同様なる爲には C 點が P の反對方向に $r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi+\Delta l\div2$ の移動を爲すと見ねばならぬ。一方 C 點の P 方向の移動は Castigliano 定理に依り dL/dP であるから

$$-\left\{\frac{1}{2}\Delta l+r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi\right\}=\frac{dL}{dP},$$ 而して L の公式より

$$\frac{dL}{dP}=\frac{r}{EI}\int_0^\phi M\frac{\partial M}{\partial P}d\theta,$$ 應力公式より $\frac{\partial M}{\partial P}=r(1-\cos\theta)$ であるから

$$\frac{dL}{dP}=\frac{r^2}{EI}\int_0^\phi M(1-\cos\theta)d\theta$$

本式中の M に應力公式中の M を入れて

$$\frac{dL}{dP}=\frac{r^3}{EJ}\left\{P\int_0^\phi(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta-(F\rho+p)r\int_0^\phi(2\cos\theta+\theta\sin\theta-\theta\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta-1)d\theta\right\}$$

然るに　$\displaystyle\int_0^\phi\theta\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{1}{4}(2\phi\sin^2\phi+\sin\phi\cos\phi-\phi)$

其の他の積分は皆有りふれた簡單のものであるから直ちに

$$\frac{dL}{dP}=\frac{r^3}{EJ}\Big[P\left\{\phi-2\sin\phi+\frac{1}{2}(\phi+\sin\phi\cos\phi)\right\}-(F\rho+p)r\Big\{2\sin\phi+\sin\phi-\phi\cos\phi$$
$$-\frac{1}{4}(2\phi\sin^2\phi+\sin\phi\cos\phi-\phi)-\frac{1}{2}(\phi+\sin\phi\cos\phi)-\phi\Big\}\Big]$$

初めの式中の $\dfrac{dL}{dP}$ に此の値を入れ未知量 P を求むれば容易に次式を得。

$$P=(F\rho+p)r\beta'$$

式中
$$\beta'\equiv\frac{2(\sin\phi-\phi\cos\phi)+\frac{1}{2}(\phi-\sin\phi\cos\phi)-\phi\sin^2\phi-\frac{EJ}{r^4(F\rho+p)}\left\{\Delta l+2r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi\right\}}{3\phi+\sin\phi\cos\phi-4\sin\phi}-1$$

この P を既記 M, C, S 各公式中の P に適用すれば任意點の應力公式を得ますが更に β' の代りに $\beta=\beta'+1$ なる關係を有する常數 β を用ふれば公式が一層簡單になります。即ち

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{彎曲率} & M=(F\rho+p)r^2\{\beta(1-\cos\theta)-\theta\sin\theta\} \\
\text{軸壓力} & C=(F\rho+p)r(\beta\cos\theta+1-2\cos\theta) \\
\text{剪　力} & S=(F\rho+p)r(-\beta\sin\theta+2\sin\theta) \\
\text{式　中} & \beta\equiv\dfrac{1}{3\phi+\sin\phi\cos\phi-4\sin\phi}\Big[2(\sin\phi-\phi\cos\phi)+\dfrac{1}{2}(\phi-\sin\phi\cos\phi) \\
 & \quad -\phi\sin^2\phi-\dfrac{EJ}{r^4(F\rho+p)}\{\Delta l+2r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi\}\Big]
\end{array}\right\}\cdots\cdots(イ)$$

右半拱内の應力は對稱的であるから別に求むる必要ありません。

次に任意點の放射撓度の公式を求めます。之れは著者の目的に添ふ樣拱頂の撓度 u_0 を與へた場合と然らざる場合との 2 種を論究します。著者の (1) 式中の M に上の値を入れる時は直ちに次の放射撓度の微分方程式を得ます。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\{\beta(1-\cos\theta)-\theta\sin\theta\}$$

本微分方程式の一般解は

$$u=A\cos\theta+B\sin\theta-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\left\{\beta\left(1-\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)+\frac{\theta}{4}(\theta\cos\theta-\sin\theta)\right\}$$

$$\frac{du}{d\theta}=-A\sin\theta+B\cos\theta-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\Big\{-\frac{\beta}{2}(\sin\theta+\theta\cos\theta)$$
$$+\frac{1}{4}(\theta\cos\theta-\theta^2\sin\theta-\sin\theta)\Big\}$$

今 A 端即ち $\theta=\phi$ に於ては $u=-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi$, $\frac{du}{d\theta}=r\tan\delta_\phi$ なるを以て

$$-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi=A\cos\phi+B\sin\phi-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\left\{\beta\left(1-\frac{1}{2}\phi\sin\right)+\frac{\phi}{4}(\phi\cos\phi-\sin\phi)\right\}$$

$$r\tan\delta_\phi=-A\sin\phi+B\cos\phi-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\left\{-\frac{\beta}{2}(\sin\phi+\phi\cos\phi)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}(\phi\cos\phi-\phi^2\sin\phi-\sin\phi)\right\}$$

以上兩式より任意常數 A 及び B を求めば

$$A=\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\left\{\beta\left(\cos\phi+\frac{1}{2}\sin^2\phi\right)+\frac{1}{4}(\phi^2+\sin^2\phi-\phi\sin 2\phi)\right\}$$
$$-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi\cos\phi-r\sin\phi\tan\delta_\phi$$

$$B=\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\left\{\beta\left(\sin\phi-\frac{1}{2}\sin\phi\cos\phi-\frac{1}{2}\phi\right)+\frac{1}{4}(\phi\cos 2\phi-\sin\phi\cos\phi)\right\}$$
$$-\frac{\Delta l}{2}\sin^2\phi+r\cos\phi\tan\delta_\phi$$

この A 及び B を u の式中の A 及び B に適用して次の結果を得。

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\tau-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi\cos(\phi-\theta)-r\tan\delta_\phi\sin(\phi-\theta)\\ \text{式中}\quad&\tau=\frac{1}{4}\left\{(\phi^2-\theta^2)\cos\theta-(\phi-\theta)\sin\theta-(2\phi\cos\phi-\sin\phi)\sin(\phi-\theta)\right\}\\&\quad-\beta\left\{1-\cos(\phi-\theta)+\frac{1}{2}(\phi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\phi\sin(\phi-\theta)\right\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(e)$$

式中の β は (d) 式に據る。

之れ任意點の放射撓度の公式である。拱頂の撓度 u_0 を與へたる公式を求むるには

$\theta=\phi$ に於て $u=-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi$, 又 $\theta=0$ に於て $u=u_0$ なるを以て

$$-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi=A\cos\phi+B\sin\phi-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\left\{\beta\left(1-\frac{1}{2}\phi\sin\phi\right)+\frac{\phi}{4}(\phi\cos\phi-\sin\phi)\right\}$$

$$u_0=A-\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\beta$$

以上兩式より任意常數 A 及び B を求めば

$$A=u_0+\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ}\beta$$

$$B=-\frac{\cos\phi}{\sin\phi}u_0-\frac{\Delta l}{2}+\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ\sin\phi}\left\{\beta\left(1-\cos\phi-\frac{1}{2}\phi\sin\phi\right)+\frac{\phi}{4}(\phi\cos\phi-\sin\phi)\right\}$$

この A 及び B の値を u の公式中の A 及び B に適用して次式を得。

$$u=\frac{\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi}u_0+\frac{r^4(F\rho+p)}{EJ\sin\phi}\left[\frac{1}{4}\left\{\phi^2\cos\phi\sin\theta-\theta^2\sin\phi\cos\theta-(\phi-\theta)\sin\phi\sin\theta\right\}\right.$$
$$\left.-\beta\left\{\frac{1}{2}(\phi-\theta)\sin\phi\sin\theta+(\sin\phi-\sin\theta)-\sin(\phi-\theta)\right\}\right]-\frac{\Delta l}{2}\sin\theta\cdots\cdots\cdots(f)$$

式中の β は (d) 式に據る。

(e) 又は (f) に依り諸點の u を計算したる後 (c) 式を用ひて振動數を求め得るのである。

單鉸拱の鉸點に W なる單一荷重の作用する場合は全く上記同樣の方法に準じて次の樣な諸公式を得ます。勿論桁の自重は無視してあります。

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{彎曲率} & M=Wr\{\beta(1-\cos\theta)-\sin\theta\} \\
\text{軸壓力} & C=W(\beta\cos\theta+\sin\theta) \\
\text{剪　力} & S=W(-\beta\sin\theta+\cos\theta) \\
\text{式　中} & \beta\equiv\dfrac{(1-\cos\phi)^2-\dfrac{EJ}{r^3W}\{\varDelta l+2r(1-\cos\phi)\tan\varDelta_\phi\}}{3\phi+\sin\phi\cos\phi-4\sin\phi}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(g)$$

放射撓度の一般方程式は

$$u=A\cos\theta+B\sin\theta-\frac{r^3W}{2EJ}\{\beta(2-\theta\sin\theta)+\theta\cos\theta-\sin\theta\}$$

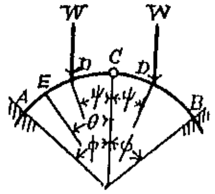
任意點の撓度は

$$\left.\begin{array}{ll}
 & u=\dfrac{r^3W}{EJ}\gamma-\dfrac{\varDelta l}{2}\sin\phi\cos(\phi-\theta)-r\tan\varDelta_\phi\sin(\phi-\theta) \\
\text{式中} & \gamma\equiv\dfrac{1}{2}\Big\{(\phi-\theta)\cos\theta-\cos\phi\sin(\phi-\theta)\Big\} \\
 & \quad-\beta\Big\{1-\cos(\phi-\theta)+\dfrac{1}{2}(\phi-\theta)\sin\theta-\dfrac{1}{2}\sin\phi\sin(\phi-\theta)\Big\}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(h)$$

拱頂の撓度 u_0 を以て表はす任意點の撓度は

$$u=\frac{\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi}u_0+\frac{r^3W}{EJ\sin\phi}\Big[\frac{(\phi-\theta)}{2}\sin(\phi-\theta)$$
$$-\beta\Big\{\frac{(\phi-\theta)}{2}\sin\phi\sin\theta+\sin\phi-\sin\theta-\sin(\phi-\theta)\Big\}\Big]-\frac{\varDelta l}{2}\sin\theta.\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

第　四　圖



更に參考の爲第四圖の如く鉸點の左右對稱的に ψ 角を張る兩點に同量の單一荷重 W が夫々作用する場合を求めると以下の結果を得ます。

CD 間任意點の應力

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{彎曲率} & M=Wr\beta(1-\cos\theta) \\
\text{軸壓力} & C=W\beta\cos\theta \\
\text{剪　力} & S=-W\beta\sin\theta \\
\multicolumn{2}{l}{\text{DA 間任意點の應力}} \\
\text{彎曲率} & M=Wr\{\beta(1-\cos\theta)+\sin\psi-\sin\theta\} \\
\text{軸壓力} & C=W(\beta\cos\theta+\sin\theta) \\
\text{剪　力} & S=W(-\beta\sin\theta+\cos\theta)
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(j)$$

式中
$$\beta=\frac{1}{3\phi+\sin\phi\cos\phi-4\sin\phi}\Big[2(\cos\psi-\cos\phi)-(\sin\phi-\sin\psi)^2-2(\phi-\psi)\sin\psi-\frac{EI}{r^3W}\Big\{\Delta l+2r(1-\cos\phi)\tan\Delta_\phi\Big\}\Big]$$

CD 間任意點の撓度は

$$u=\frac{r^3W}{EI}\Big[\frac{1}{2}\Big\{(\phi-\psi)\cos\theta-\sin(\phi-\psi)\cos(\phi+\psi-\theta)\Big\}-\Big\{\cos(\psi-\theta)-\cos(\phi-\theta)\Big\}\sin\psi-\beta\Big\{1-\cos(\phi-\theta)+\frac{1}{2}(\phi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\phi\sin(\phi-\theta)\Big\}\Big]-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi\cos(\phi-\theta)-r\tan\Delta_\phi\sin(\phi-\theta)\ldots\ldots(k)$$

DA 間任意點の撓度は

$$u=\frac{r^3W}{EI}\Big[\frac{1}{2}\Big\{(\phi-\theta)\cos\theta-\cos\phi\sin(\phi-\theta)\Big\}-\Big\{1-\cos(\phi-\theta)\Big\}\sin\psi-\beta\Big\{1-\cos(\phi-\theta)+\frac{1}{2}(\phi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\phi\sin(\phi-\theta)\Big\}\Big]-\frac{\Delta l}{2}\sin\phi\cos(\phi-\theta)-r\tan\Delta_\phi\sin(\phi-\theta)\ldots\ldots(l)$$

均一斷面の單鉸拱に於ては上記の各式を利用し，容易に諸點の u を求め得るに依り (c)式に依て振動數を計算することが出來ます。

筆者は單鉸拱の撓度曲線が如何なる形を爲すかの概念を得んと欲し，$\Delta l=0$, $\Delta_\phi=0$, $\phi=60°$ の時等布荷重に對する (e) 式の γ，及び鉸點單一荷重に對する (h) 式の γ を試みに θ の 5° 毎に計算せるに前者に於ては $\beta=1.860130$ 後者に於ては $\beta=2.262307$ にして γ の計算値は次表の通りでありました。

θ	(e) 式の γ	(h) 式の γ
0°	+0.001288	+0.02430
5	+0.000954	+0.01645
10	+0.000610	+0.00907
15	+0.000288	+0.00203
20	−0.000010	−0.00288
25	−0.000257	−0.00586
30	−0.000433	−0.00770
35	−0.000520	−0.00800
40	−0.000500	−0.00700
45	−0.000409	−0.00509
50	−0.000248	−0.00282
55	−0.000083	−0.00085
60	0	0

即ち兩者共 θ が 15° から 20° の間に node を有して居ます。

次に不均一斷面の場合は上記の例に準じ初めに M の公式を求め次に u の公式を求め得

る筈なるも，均一斷面の場合に比し餘程複雑になる樣です。今の所筆者はこれを試むる暇なきため深入りするをやめました。

著者の解法も亦不均一斷面の時でも撓度曲線 u を求むる時には均一斷面と見做すのであるから筆者の (f) 式にて諸點の u を求め (e) 式にて振動數を求めば全く著者のと同一結果を得る筈にて演算の勞も餘程省けると思ひます。勿論著者の方法は全く代數的にて毫も圖式計算を要せず作圖上有り勝の誤差を免がる便益と特徴を有する貴重な方法であります。但し (16), (17), (18), (20), (21), の諸式に散見する $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2$ は抑 $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)^2$, (27) 式も同樣 $\left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2$ は $\left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}+u'\right)^2$ に改め實驗中の計算を之れに伴ふて變へねばなりません。筆者には之れ等の改算を施せば實驗値に最も近き振動數を得る筈に思はれてなりません。猶筆者は他の目的の爲，特に不均一斷面の單鉸拱に就て實驗せられしことと推察しますが，曲棒振動の實驗と云ふ立場から見て理論も製作も比較的簡單なる均一斷面の單鉸拱及び其の他に就ても研究の歩を進め賜はらんことを御願ひ致します。眞に有益なる著者の實驗に對し満腔の敬意を表し深く感謝して擱筆します。