論 説 報 告

土木學會誌 第十七卷第九號 昭和六年九月

彈性地盤に於ける基礎の沈下に關する理論的研究

准員 工學士 松 村 孫 治

On the Settlement of the Elastic Foundation

By Magodi Matumura, C. E., Assoc. Member.

內 容 梗 概

本文は彈性地盤に於ける圓形及び矩形基礎の垂直荷重による沈下量に關する研究にして，第一章にては圓形基礎，第二章にては矩形基礎を取り扱ひ，地盤は一樣なる力學的性質を有するもの以外に硬地層，軟地層の沈下に及ぼす影響をも求めたり。而して先づ一樣なる力學的性質を有する地盤にありては圓形，正方形基礎の中央の沈下量は基礎面積の平方根に比例して增大すれど，矩形基礎にては然らざる事，類似の分布を有する荷重による基礎の中央の沈下は分布狀態には餘り影響されず，從つて基礎全體としての沈下量を求むるに當りては荷重分布を無視するも大なる誤差なき事，地中に硬地層の存在する時基礎の沈下量は減少し，その大いさは基礎の形に餘り影響されず，硬地層迄の深さを h，基礎の半徑を a（圓形基礎に對し）とすれば，a/h 及びポアソン比に關係し，a/h 及びポアソン比の大なる程大なる事，地中に軟地層存在する時，基礎の沈下量は減少する場合も亦增加する場合もあれど，前者と同じく a/h（h は軟地層迄の深さ）の函數にて示され，その値は著しく大なる場合を除き基礎の形に餘り關係せざる事を示し，更に二三の荷重分布による沈下量を計算せし結果，基礎の沈下とその點に働く荷重强度との間に比例的關係の成立せざる事を示せり。

目 次

緒　論

基礎地盤の許容支持力は構造物に許し得る沈下量を考慮の上決定すべきものにして，殊に軟弱なる地盤にありては，往々基礎の著しき沈下に伴ひ上部構造物に種々なる障害を生ずるのみならず，假令障害無きと雖も沈下量を或る限度内に止むるは望ましき事柄にして，時として豫め沈下の程度を推定する必要ある場合も尠なからず，從つて一般に基礎の沈下量の算定は工學上極めて緊要なる問題なり。

軟弱地盤の基礎沈下の原因は大體

（1） 基礎地盤の彈性的變形

（2） 基礎地盤のプラスチックの流 (plastic flow)

（3） 地盤中に存在する水分の逸流

に大別し得。

（1）の原因による沈下は基礎地盤を彈性體とし，彈性率 (modulus of elasticity) 及び剛性率 (modulus of rigidity) を知れば沈下量を求め得るは明かなれども，地盤を構成する赤土，粘土，砂交り粘土及び沈泥等は何れも多分の水分を含み，水の逸流による變形を除き純粹の彈性的變形を求むるは實驗的に幾多の困難を伴ふ。（2）のプラスチックの流は，彈性率及び剛性率の値の應力による變化及び一定應力の下に於ける變形の時間による増加の二つの原因を含めるものにして，前者による沈下量は彈性率，剛性率に適當なる修正を施し近似的に求め得べし。後者にありては，變形が時と共に益々進行する如き狀態なる場合は遂に基礎の破壞するは明かにして，玆には考慮せず。之れに反して變形が時と共に漸次平衡狀態に近づく場合には時間的關係を離れし終極の沈下量を大體推定し得べし。（3）の原因たる水の逸流に因る沈下量は一點に働く應力と水の逸流による變形量との間に彈性體の如き關係成り立つ時は，此の見掛上の彈性率及び剛性率を用ひ彈性體と同様の方法によりて終極の沈下量を求め得べし。應力と水の逸流による變形との間に上記の關係の存するや否やは實驗により證明さるべき事柄にして，高田内務技師[1]の實驗によれば少くとも赤土の抗壓試驗に於ては壓縮の量と荷重との間には大體上記の關係の存在するを示せり。氏は自然の儘の狀態より圓柱狀の供試體を刳り抜き水中及び大氣中にて抗壓試驗を行へり。されば供試體中の水は自由に

(1) 内務省土木試驗所報告　第二十號（昭和六年六月）參照

外部へ逸流し得べく，又水中に於ける試驗にありては赤土中に含まるゝ水の毛細管現象の影響は無きものと考へ得るを以て，此の試驗より得たる供試體の壓縮は彈性的變形と水の逸流による變形とより成るを以て上記の關係の近似的に成り立つを知る。而して實際斯かる關係が軟弱地盤を構成する他の物質に就ても成立し得るや否やは各場合に就き實驗的研究によりて初めて之れを決定し得べし。尙水の逸流による收縮は空隙の減少と等しく空隙率 (Porenziffer) と壓力との間に略比例的關係の成立するを示せる實驗結果[2]あり。半無限彈性體の表面に壓力の作用する問題並にその應用に就ては古來より幾多の學者[3]により研究され，我國にても寺澤教授の研究[4]あり。水の逸流換言すれば空隙の減少による沈下量は既に C. Terzaghi 氏により求められしも，その算定法は幾多の疑點あり。

沈下量は地盤の力學的性質及び荷重强度以外に載荷面積の大さ並に形に關係する事は古くより知られたる事實にして，之れ等に關しては既に種々なる研究及び實驗あり。載荷面積の大さと沈下量の關係に就き，C. Terzaghi 氏[5]は“凝集力ある土 (cohesive soil) にありては單位荷重による沈下量は載荷面の直徑に正比例し，完全に凝集力無き土にありては面積の大いさは餘り影響無し”と述べてをる。Goldbeck 氏及び Emperger 氏の實驗は夫々凝集力ある土に就き行はれ，何れも沈下量は大體載荷面積の平方根に比例するを示せり。更に Terzaghi 氏は此の法則の著しき除外例として實際の觀測の結果を列擧しをれど，實際の地盤は一樣なる力學的性質を有する物質より構成するものにあらず，地中に進むと共に種々の地層より成り立つと考ふるが至當にして，此の法則の實際に適合せざりし原因が地盤を構成する物質の本質に因れるか否かは甚だ疑問にして，更に考究の餘地あり。砂層の地盤にて行はれし基礎沈下の實驗に於て沈下量が載荷面積と共に增加する例もあり。

本文に於ては主として彈性體より成れる地盤上に造られたる基礎工に就き，

(1)　載荷面積と沈下量との間の關係

(2)　載荷面積の形と沈下量との間の關係

---

(2) K. A. Redlich, K.v. Terzaghi und R. Kampe. Ingenieurgeologie (1929).

(3) Lamé and Clapyron. Crellès Journal, vol. 7 (1831).
J. Boussinesq. “Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre........” (Paris, 1885).
J. H. Michell. Lond. Math. Soc. Proc., vol. 34, p. 134 (1902).
H. Lamb. “On Boussinesq's problem” Lond. Math. Soc. Proc., vol. 34, p. 276 (1902).
„ “The stress produced on a semi-infinite solid....” Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., vol. 228, p. 377 (1929).

(4) K. Terazawa “On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid....” Tokyo J. Coll. Sci vol. 37, art 7 (1916).

(5) C. Terzaghi “The science of foundation....” Proc. Am. Soc. Civ. Eng. p. 2263. (1927/Nov).

(3) 地中に極めて堅き地層及び軟き地層の存在の基礎沈下に對する影響

等に關して理論的研究を試みたり。

載荷面の形は圓形，矩形に止め，一樣に分布する垂直荷重による沈下を主として取り扱ひたるも，他の場合の沈下も一般式より容易に求むる事を得べし。更に二三の荷重分布による基礎沈下の分布を求め，彈性地盤に於て荷重强度と其の點の沈下量との間の比例的關係の有無を調べ，最後に近時屢々行はるゝ小面積荷重試驗の沈下量より大なる基礎の沈下量を推定し得る可能性に就て研究せり。玆に彈性體と稱ふるは應力と變形との間に普通の彈性體と同樣の關係を有する物體の意にして，彈性的反撥 (elastic rebound) 等の性質を缺くも本文の計算は適用し得る。

彈性體なる理想的物質より構成する地盤を取り扱ひたるを以て，計算の結果の必ずしも實際と合致せざるは止むを得ざる處なるも，理論的にも實驗的にも發端の域を脫せざる土質力學の現狀にありては，基礎地盤に對し斯かる假定を爲すも亦止むを得ざる處にして，加之地盤の狀況は場所により深さにより種々變化すべく，沈下量を實驗的に求むる事も亦殆んど不可能なる場合多し。尙本文は工學上の適用を主眼とするを以て，數學的計算は勉めて之れを省略し，且つ數學的に多少の嚴正を缺く處なきにあらずと雖も實際の應用に於て著しき誤差を生ずる虞れ無しと信ず。

本研究は物部博士の指導の下になせるものにして，山口教授よりも種々の助言を賜り，尙計算其の他に關し畏友本間工學士の助力による處頗る多し，玆に附記し兩博士並に本間工學士に深く感謝の意を表す。

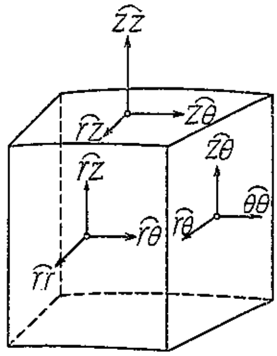
第一章 軸對稱荷重に依る圓形基礎の沈下

第一節 基本公式

半無限彈性體 (semi-infinite elastic body) の表面に外力の作用する問題は既に幾多の人々により取り扱はれしものにして，本章にては最も簡單なる軸對稱荷重 (axial symmetrical loading) の場合のみに限定せしが，軸に對し對稱ならざる場合も多少の煩雜なる計算を用ふれば同樣に解き得べし。

座標軸として圓壔座標 (cylindrical co-ordinate) を用ひ，r, θ, z を以て座標を表はし原點を地盤面上に取り，z は下向を正とす。

第一圖



記 號 (第一圖參照)

$\widehat{rr}$: r 軸に直角なる面内にて r の方向に作用する應力

$\widehat{\theta\theta}$： θ 軸に直角なる面內にて θ の方向に作用する應力
$\widehat{zz}$： z 軸に直角なる面內にて z の方向に作用する應力
$\widehat{rz}$： z 軸に直角なる面內にて r の方向に作用する應力
u ： r の方向の變位
w ： z の方向の變位
$(w)_{z=0}$： 基礎の沈下卽ち基礎地盤面の垂直變位
W： 基礎の中心の沈下
$p(r)$ ： 載荷面に作用する垂直荷重
p_0 ： 載荷面に作用する垂直荷重の平均値
a ： 載荷面の半徑
E ： 基礎地盤の彈性率
σ ： 基礎地盤のポアソン比 (Poisson's ratio)

半無限彈性體の表面に軸對稱荷重の作用する場合[7]は (1) 式を滿足する χ なる函數を求め得れば，

$$\nabla^4\chi=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

但し　$\nabla^4=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2$ を示す。

應力並に變形は次の (2) 式により表はさる。

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma\nabla^2\chi+\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\right\}\\
\widehat{\theta\theta}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma\nabla^2\chi-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right\}\\
\widehat{zz}&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\sigma)\nabla^2\chi-\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right\}\\
\widehat{rz}&=\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\sigma)\nabla^2\chi-\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right\}\\
u&=-\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z}\\
w&=\frac{1+\sigma}{E}\left\{(1+2\sigma)\nabla^2\chi+\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

今 (1) 式並に限界條件 (boundary condition) を滿足するが如き適當なる χ の函數を求め得れば，應力及び變形は (2) 式より容易に求め得べく，本文にては (1) 式を滿足する χ の一般解を求め之れに含まるゝ常數をして限界條件を滿足せしめしものなり。

(1)　$z\geqq 0$ なる範圍に適用し得る解

z の無限大の場合變形は零たるべきを以て解は e^{-kz} の函數を含む。今 χ を次の如く假定す。

---

(7) Love; "Mathematical theory of elasticity" p. 276.

$$\chi=\int_0^\infty (A+Bz)e^{-kz}J_0(kr)dr \quad \cdots\cdots(1')$$

χ が(1)式を満足するは明かにして，A 及び B は r,z に無關係なる常數なり。(1′)式を(2)式に代入すれば應力及び變形は次の(3)式の如し。

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr}&=\int_0^\infty k^2\Big[\Big\{(1+2\sigma)B-Bkz-Ak\Big\}J_0(kr)+\Big\{Ak+B(kz-1)\Big\}\frac{J_1(kr)}{kr}\Big]e^{-kz}dk\\
\widehat{\theta\theta}&=\int_0^\infty k^2\Big[(2\sigma BJ_0(kr)-\Big\{Ak+B(kz-1)\Big\}\frac{J_1(kr)}{kr}\Big]e^{-kz}dk\\
\widehat{zz}&=\int_0^\infty k^2\Big[Ak+Bkz+(1-2\sigma)B\Big]J_0(kr)e^{-kz}dk\\
\widehat{zr}&=\int_0^\infty k^2\Big[Ak+Bkz-2\sigma B\Big]J_1(kr)e^{-kz}dk\\
u&=-\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty k\Big\{Ak+Bkz-B\Big\}J_1(kr)e^{-kz}dk\\
w&=-\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty k\Big\{Ak+Bkz+2(1-2\sigma)B\Big\}J_0(kr)e^{-kz}dk
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

(2) kz の双曲線函數を含む解

此の解は z の無限大なる場所には適用し得ず。χ を次の如く假定す。

$$\chi=\int_0^\infty\Big\{(A+Bz)\mathrm{Sinh}\,kz+(C+Dz)\mathrm{Cosh}\,kz\Big\}J_0(kr)dk$$

χ が(1)式を満足するは明かにして，應力並に變形は(2)式より容易に求め得られ，次の(4)式に示さる。

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr}&=\int_0^\infty k^2\Big[\Big\{(A+Bz)k\mathrm{Cosh}kz+(C+Bz)k\mathrm{Sinh}kz\Big\}\Big\{J_0(kr)-\frac{J_1(kr)}{kr}\Big\}-(B\mathrm{Sinh}kz\\
&\qquad+D\mathrm{Cosh}\,kz)\frac{J_1(kr)}{kr}+(1+2\sigma)(B\mathrm{Sinh}\,kz+D\,\mathrm{Cosh}\,kz)J_0(kr)\Big]dk\\
\widehat{\theta\theta}&=\int_0^\infty k^2\Big[\Big\{(A+Bz)\mathrm{Cosh}kz+(C+Dz)\mathrm{Sinh}\,kz\Big\}J_1(kr)\\
&\qquad+(B\mathrm{Sinh}kz+D\mathrm{Cosh}kz)\Big\{2\sigma J_0(kr)+\frac{J_1(kr)}{kr}\Big\}\Big]dk\\
\widehat{zz}&=-\int_0^\infty k^2\Big[Ak\mathrm{Cosh}kz-B\Big\{(1-2\sigma)\mathrm{Sinh}kz-kz\mathrm{Cosh}kz\Big\}+Ck\mathrm{Sinh}kz\\
&\qquad-D\Big\{(1-2\sigma)\mathrm{Cosh}kz-kz\mathrm{Sinh}kz\Big\}\Big]J_0(kr)dk\\
\widehat{zr}&=\int_0^\infty k^2\Big[Ak\mathrm{Sinh}kz+B(2\sigma\mathrm{Cosh}kz+kz\mathrm{Sinh}kz)+Ck\mathrm{Cosh}kz\\
&\qquad+D(2\sigma\mathrm{Sinh}\,kz+kz\mathrm{Cosh}kz)\Big]J_1(kr)dk\\
u&=\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty k\Big[Ak\mathrm{Cosh}kz+B(\mathrm{Sinh}kz+kz\mathrm{Cosh}kz)+Ck\mathrm{Sinh}kz\\
&\qquad+D\,(\mathrm{Cosh}\,kz+kz\,\mathrm{Sinh}\,kz)\Big]J_1(kr)dk
\end{aligned}\right\}\cdots(4)$$

$$w=-\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty k\Big[Ak\mathrm{Sinh}\,kz-B\Big\{2(1-2\sigma)\mathrm{Cosh}kz-kz\mathrm{Sinh}\,kz\Big\}+Ck\mathrm{Cosh}\,kz$$
$$-D\Big\{2(1-2\sigma)\mathrm{Sinh}kz-kz\mathrm{Cosh}\,kz\Big]J_0(kr)dk$$

A, B, C, D は r, z に無關係なる常數なり。

第二節　垂直荷重に依る圓形基礎の沈下

無限の深さ迄一様なる力學的性質を有する彈性體より成る地盤面上に造られし基礎の沈下は，半無限彈性體の表面に作用する垂直荷重による垂直變位を以て表はし得る。實際の基礎地盤に於ては垂直荷重以外水平荷重の作用あるも，其の影響は垂直荷重と同一方法に依つて求め得るを以て，玆には垂直荷重の作用のみを考ふ。今垂直荷重を $p(r)$ とすれば，表面 $(z=0)$ に於ける限界條件は (5) 式にて示さる。但し $p(r)$ は壓力なる時を正とす。

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{zr}=0\\&\widehat{zz}=-p(r)\end{aligned}\quad \text{at } z=0\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

(3) 式と (5) 式より常數 A, B の間に (5′) 式に示す關係を得。

$$\left.\begin{aligned}&Ak-2\sigma B=0\\&\int_0^\infty k^2\Big\{Ak+(1-2\sigma)B\Big\}J_0(kr)dk=-p(r)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5')$$

$p(r)$ が Hankel's reciprocal relation を滿足する函數ならば (5′) 式より A, B を求め得べく，(3) 式に代入し，$p(r)$ なる垂直荷重のみ作用する場合の應力及び變位は次の (6) 式によつて示さる。

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{rr}=\int_0^\infty X(k)\Big[2\sigma\frac{J_1(kr)}{kr}+\Big\{J_0(kr)-\frac{J_1(kr)}{kr}\Big\}(1-kz)\Big]e^{-kz}dk\\
&\widehat{\theta\theta}=\int_0^\infty X(k)\Big[(1-kz)\frac{J_1(kr)}{kr}+2\sigma\Big\{J_0(kr)-\frac{J_1(kr)}{kr}\Big\}\Big]e^{-kz}dk\\
&\widehat{zz}=\int_0^\infty X(k)\Big\{(1+kz)J_0(kr)\Big\}e^{-kz}dk\\
&\widehat{zr}=z\int_0^\infty X(k)kJ_1(kr)e^{-kz}dk\\
&u=\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}\Big\{1-2\sigma)+kz\Big\}J_1(kr)e^{-kz}dk\\
&w=-\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}\Big\{2(1-\sigma)+kz\Big\}J_0(kr)e^{-kz}dk
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

但し $X(k)$ は (7) 式の函數なり。

$$X(k)=-k\int_0^\infty p(\alpha)J_0(k\alpha)\alpha d\alpha\cdots\cdots\cdots(7)$$

垂直荷重 $p(r)$ が既知ならば $X(k)$ の値は (7) 式にて表はされ，應力及び變位は (6) 式より求め得る。

實際問題に於ては基礎地盤に作用する垂直荷重の分布狀態は場合によりて異なり，上部構造物の荷重分布，構造物の變形に對する抵抗，地盤の力學的性質等に關係するを以て，之れを簡單に求むるは困難なり。從つて $p(r)$ は既知とし，二三の與へられたる垂直荷重に對し基礎沈下を求めたり。

(1) 半徑 a なる圓形基礎に一樣なる垂直荷重の作用する場合

壓力分布は次の如く表はし得,

$$p(r)=p_0, \qquad (r\leqq a)$$

$$p(r)=0, \qquad (r>a)$$

(7) 式より $X(k)$ を求むれば,

$$X(k)=-p_0 aJ_1(ka) \qquad \cdots\cdots(8)$$

(6) 式より變位並に應力を求むれば,

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{zz}&=-p_0a\int_0^\infty(1+kz)J_1(ka)J_0(kr)e^{-kz}dk\\
\widehat{zr}&=-p_0az\int_0^\infty kJ_1(ka)J_1(kr)e^{-kz}dk\\
u&=-\frac{1+\sigma}{E}p_0a\int_0^\infty\left\{(1-2\sigma)+kz\right\}\frac{J_1(ka)}{k}J_1(kr)e^{-kz}dk\\
w&=\frac{1+\sigma}{E}p_0a\int_0^\infty\left\{2(1-\sigma)+kz\right\}\frac{J_1(ka)}{k}J_0(kr)e^{-kz}dk
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(9)$$

此の場合 $\widehat{rr}$ 及び $\widehat{\theta\theta}$ は不必要なれば省略す。

更に基礎沈下は (9) 式に $z=0$ と置き,

$$(w)_{z=0}=\frac{1+\sigma}{E}p_0a\int_0^\infty 2(1-\sigma)\frac{J_1(ka)}{k}J_0(kr)e^{-kz}dk$$

又は

$$\left.\begin{aligned}
(w)_{z=0}&=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right) && (0\leqq r\leqq a)\\
&=\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\frac{a}{r}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;\frac{a^2}{r^2}\right) && (r\geqq a)
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

但し ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x^2)$ は hypergeometric function にして，次の級數を示す。

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x^2)=1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x^2+\frac{\alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^4+\cdots\cdots$$

中心に於ける沈下は (11) 式に示さる。

$$W=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a \qquad \cdots\cdots(11)$$

(11) 式より中心に於ける沈下量は一定の荷重強度に對しては半徑に比例し增加するを知る。

(2) 半徑 a なる載荷面内にて一樣なる基礎沈下の生ずる場合

完全に剛にして且つ地盤との間に摩擦力の作用せざる圓形板にて地盤を壓する場合に相當し，Riemann-Weber[3] によれば，

$$X(k)=-\frac{1}{2}p_0 a\sin ka \quad\cdots\cdots(12)$$

但し p_0 は平均垂直荷重を示す。

垂直荷重並に基礎沈下は (13) 式に表はさる。

$$\left.\begin{aligned} p(r)&=\frac{1}{2}p_0\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}} && (r<a)\\ &=0 && (r\geqq a)\\ (w)_{z=0}&=\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sigma^2}{E}p_0 a && (r\leqq a)\\ &=\frac{1-\sigma^2}{E}p_0 a\sin^{-1}\frac{a}{r} && (r>a)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(13)$$

中心に於ける沈下は明らかに $W=\pi(1-\sigma^2)p_0a/2E$ にして，(1) の場合と同じく垂直荷重強度一定なる時は載荷面の直徑に比例す。

(3) (14) 式にて與へらるゝ垂直荷重の場合

$$\left.\begin{aligned} p(r)&=p\left(1+n\frac{r^2}{a^2}\right) && (r\leqq a)\\ &=0 && (r>a)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(14)$$

(14) 式に於て n の値を適當に定むれば種々の壓力分布を表はし得 (第二圖參照)。平均垂直荷重を p_0 とすれば $p=2p_0/(n+2)$ なる關係ある故に，(14) 式は次の如く書き改め得。

$$\left.\begin{aligned} p(r)&=\frac{2p_0}{n+2}\left\{1+n\frac{r^2}{a^2}\right\} && (r\leqq a)\\ &=0 && (r>a)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

(15) 式より $X(k)$ 及び基礎沈下は夫々 (16), (17) 式及び (18) 式にて示さる。

$$X(k)=-p_0 a\frac{2}{n+2}\left\{(n+1)J_1(ka)-2n\frac{J_2(ka)}{ka}\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

$$\left.\begin{aligned}(w)_{z=0}&=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\,\frac{2}{2+n}p_0 a\left[(n+1)\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{2n}{3}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)\right] && (r\leqq a)\\ &=\frac{1-\sigma^2}{E}\,\frac{2}{2+n}p_0 a\left[(n+1)\frac{a}{r}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{n}{2}\frac{a}{r}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};3;\frac{r^2}{a^2}\right)\right] && (r>a)\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(17)$$

$$W=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\,\frac{2}{3}\,\frac{n+3}{n+2}p_0 a\quad\cdots\cdots(18)$$

又 W_a を周邊の沈下とすれば次式によつて之れを表はし得る。

$$W_a=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{2}{9}\,\frac{5n+9}{n+2}p_0 a\quad\cdots\cdots(19)$$

---

(3) Riemann-Weber; Differential-gleichungen der Physik, II Teil, S. 669.

(18)式より一定の荷重强度に於ける基礎中央の沈下量は載荷面積の半徑に比例して增加するを知る。

(4)　二つの同心圓に挾まるゝ環狀部分に一樣なる垂直荷重の作用する場合

大圓の半徑を a, 小圓の半徑を b とすれば, 壓力分布は次の如し。

$$p(r)=0 \qquad (0<r<b)$$
$$=p_0 \qquad (b\leqq r\leqq a)$$
$$=0 \qquad (r>a)$$

(1) の場合を組み合せ, $X(k)$ 及び基礎沈下量は次式を以て表はさる。

$$X(k)=-p_0aJ_0(ka)+p_0bJ_0(kb) \qquad \cdots\cdots(20)$$

$$\left.\begin{aligned}(w)_{z=0}&=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0\left\{a\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)-b\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{b^2}\right)\right\} & (r<b)\\ &=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0\left\{a\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{b^2}{2r}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;\frac{b^2}{r^2}\right)\right\} & (b\leqq r\leqq a)\\ &=\frac{(1-\sigma^2)}{E}p_0\left\{\frac{a^2}{r}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{b^2}{r}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;\frac{b^2}{r^2}\right)\right\} & (r>a)\end{aligned}\right\}\cdots(21)$$

$$W=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0(a-b)$$

第三節　垂直荷重の分布と基礎沈下

第二節に於て垂直荷重による基礎沈下を與ふる公式の二三を求めたるが, 本節に於て其れ等に關し數量的計算を行はんとす。

I. 荷重分布と基礎中心の沈下

前述の如く任意の場合に對し地盤下の荷重分布を簡單に求むる事困難なるも, 全荷重の相等しき場合に於て荷重分布の沈下に及ぼす影響を知れば基礎沈下量を求むるに有益なるを以て, 先づ第二節に與へられたる (1), (2), (3) の荷重分布に依る基礎沈下を計算せんとす。

(1),(2),(3)の場合の荷重分布及び基礎中心の沈下を夫々 $p_0(r)$, $p'(r)$, $p_n(r)$ 及び W_0, W', W_n にて示せば, 是等は第二節の諸式より得らるべく, 且つ $p_0(r)$ は $p_n(r)$ に $n=0$ と置ける特別の場合なれば, 一般的には (2) 及び (3) の場合のみを取り扱へば充分にして, W', $p'(r)$, $p_n(r)$, W_n 等は次式により表はさる。

$$p'(r)=\frac{1}{2}p_0\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}} \qquad (0\leqq r<a)\cdots\cdots(13)$$

$$p_n(r)=\frac{2}{n+2}p_0\left\{1+n\frac{r^2}{a^2}\right\} \qquad (0\leqq r\leqq a)\cdots\cdots(15)$$

$$W'=\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\pi}{2}p_0a \qquad \cdots\cdots(13)$$

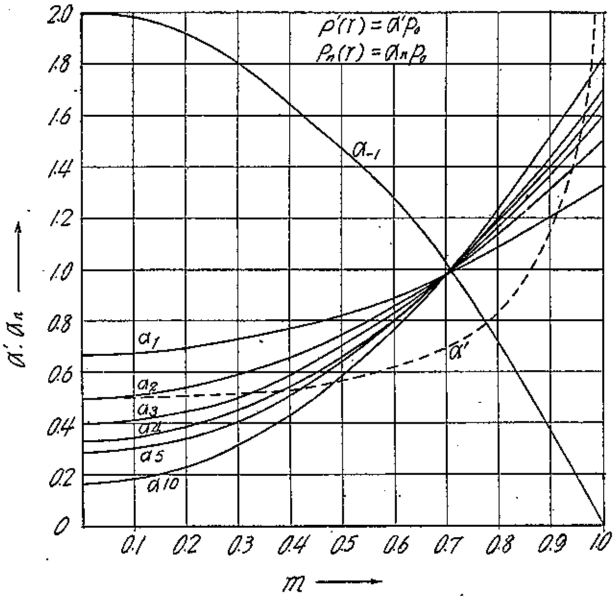
$$W_n=\frac{1-\sigma^2}{E}\,\frac{4}{3}\,\frac{n+3}{n+2}p_0a \quad \cdots\cdots(18)$$

荷重分布を求むる爲に $r=ma\ (0\leqq m\leqq 1)$ と置けば，

$$\left.\begin{aligned} &p'(r)=\alpha' p_0\\ &p_n(r)=\alpha_n p_0\\ &\text{但し}\quad \alpha'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\\ &\qquad\ \alpha_n=\frac{2}{2+n}(1+nm^2)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

(20) 式にて與へらるゝ α', α_n により荷重分布の有樣を示し得べく，平均値 1 なる荷重に對する壓力分布の狀態卽ち α', α_n の値は **第二圖** の如し。

第 二 圖　垂直荷重分布



更に中央に於ける荷重強度を 1 とする時の他の點の荷重強度を **第一表** に示す。

第 一 表　中央の强度 1 なる時の荷重强度

m	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$p'(r)$	1.00	1.02	1.06	1.26	1.40	1.66	2.30	∞
$p_{-1}(r)$	1.00	0.96	0.84	0.64	0.51	0.36	0.18	0.00
$p_0(r)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$p_{+1}(r)$	1.00	1.04	1.16	1.36	1.49	1.64	1.81	2.00
$p_2(r)$	1.00	1.08	1.32	1.72	1.98	2.28	2.62	3.00
$p_3(r)$	1.00	1.12	1.48	2.08	2.47	2.92	3.43	4.00

m	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$p_4(r)$	1.00	1.16	1.64	2.24	2.96	3.56	4.24	5.00
$p_5(r)$	1.00	1.20	1.80	2.80	3.45	4.20	5.05	6.00
$p_{10}(r)$	1.00	1.40	2.60	4.60	5.90	7.40	9.10	11.00

第二圖 及び **第一表**より荷重分布の變化の可成り大なるを知る。

荷重分布の沈下量に及ぼす影響を知る爲に，基礎の中心及び周邊の沈下量を求めたり。中心の沈下は (13) 及び (18) 式にて與へられ，周邊の沈下は (2) の場合は (13) 式，(3) の場合は (19) 式によつて與へらる。

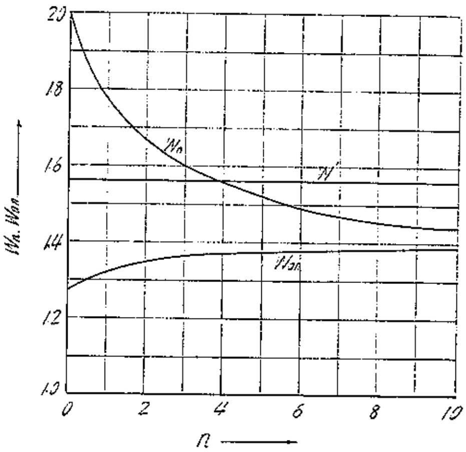
$$W_{an}=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\frac{2}{\pi}\frac{2}{9}\frac{5n+9}{n+2}p_0a \quad \cdots\cdots(19)$$

$(1-\sigma^2)p_0a/E=1$ とする際の W_n 及び W_{an} の値を**第二表**及び**第三圖**に示す。

第二表　W_n 及び W_{an} の値

n	0	1	2	3	4	5	10	∞
W_n	2.00	1.78	1.67	1.60	1.56	1.52	1.44	1.33
W_{an}	1.27	1.32	1.34	1.36	1.37	1.37	1.39	1.41

第三圖



第二表の値は $(1-\sigma^2)p_0a/E$ の係數に相當するものにして，W' に對しては中心，周邊共に 1.57 の値を有す。

以上の計算より次の事項を知る。

(1) 基礎の中心並に周邊の沈下は上記の三つの荷重分布に於て一定の平均荷重强度にありては載荷面の半徑に比例して增加す。

(2) 荷重分布は**第二圖**に示す如く可成りの差異あるに係らず，$0<n<10$ なる範圍にありては沈下量の最大値と最小値との差の最大値に對する比は，基礎の中央の沈下に對し 28%，周邊の沈下に對し 19% に過ぎず，類似の荷重分布による基礎の中央の沈下量即ち基礎全體としての沈下量は荷重分布狀態には餘り影響無しと云ひ得べく，從つて基礎全體としての沈下量は類似の荷重分布に因る値を以て近似的に示し得。

II. 荷重分布と基礎の各點の沈下

荷重分布により基礎沈下の形（基礎地盤の表面の垂直變位をも含む）の著しく變化するは明かにして，今地盤の力學的性質，平均荷重及び基礎面相等しき場合荷重分布の及ぼす影響を求めん。第二節の (2) 及び (3) に示す荷重による基礎沈下(基礎地盤の垂直變位)は(13)式及び(17)式に表はさる。

$$
\left.\begin{aligned}
(w)_{z=0}&=\frac{\pi}{2}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a && (r\leqq a)\\
&=\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\sin^{-1}\frac{a}{r} && (r>a)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(w)_{z=0}&=\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\left[\frac{4(n+1)}{n+2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{8n}{3(n+2)}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)\right] && (r\leqq a)\\
&=\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\frac{a}{r}\left[\frac{2(n+1)}{n+2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{n}{n+2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};3;\frac{a^2}{r^2}\right)\right] && (r>a)
\end{aligned}\right\}
$$

$$\cdots\cdots(17)$$

(17) 式より代表とし $n=0, 2$ 及び 5 なる三つの場合を採り，是等の基礎地盤の垂直變位は**第三表**及び**第四圖**に示すが如し。但し表中の數値は實際の沈下量を $(1-\sigma^2)p_0a/E$ を以て除したるものなり。

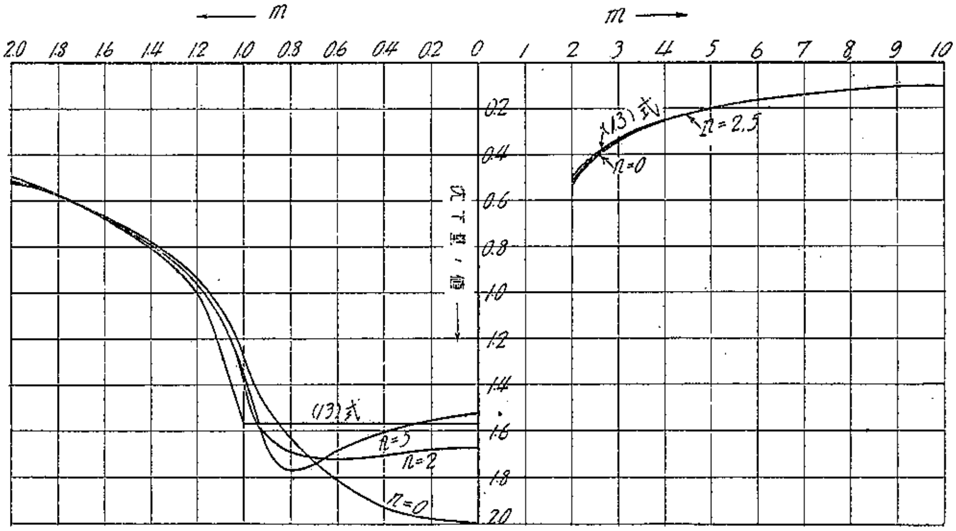
第三表　基礎地盤の垂直變位

m	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
(13)式	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57
$n=0$	2.00	1.98	1.92	1.81	1.62	1.50	1.27
$=2$	1.67	1.68	1.70	1.72	1.68	1.62	1.35
$=5$	1.52	1.55	1.61	1.68	1.77	1.67	1.38

m	1.2	1.5	2	3	4	5	10
(13)式	0.99	0.73	0.52	0.34	0.25	0.20	0.10
$n=0$	0.93	0.71	0.50	0.34	0.25	0.20	0.10
$=2$	0.96	0.72	0.52	0.34	0.25	0.20	0.10
$=5$	0.96	0.73	0.52	0.34	0.25	0.20	0.10

但し表中の m は r/a を示す

第四圖　基礎沈下量

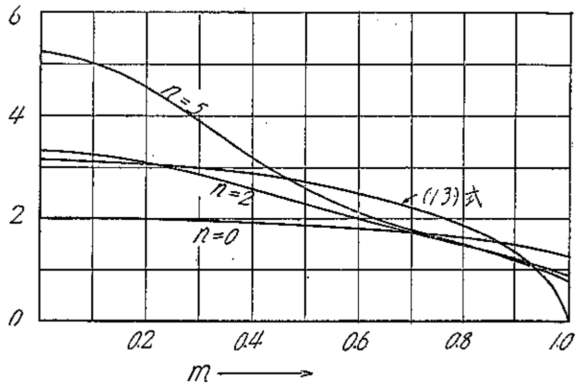


更に基礎の沈下量とその點に作用する荷重强度，換言すれば地盤の反力との比は**第四表**及び**第五圖**に示す如し。但し表中の數値は實際の値を $(1-\sigma^2)a/E$ にて除したるものなり。

第四表　基礎の沈下と荷重强度との比

m	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
(13)式	3.14	3.04	2.90	2.49	1.89	1.37	0.00
$n=0$	2.00	1.98	1.92	1.81	1.62	1.50	1.27
$=2$	3.34	3.11	2.58	2.00	1.47	1.24	0.90
$=5$	5.22	4.56	3.16	2.10	1.48	1.16	0.80

第五圖　基礎沈下と荷重强度との比



上記の計算より次の結果を得る。

(1)　基礎沈下の分布は荷重分布により著しき影響あり。

(2)　上記四つの荷重分布にありては載荷面より少しく距りし（此の場合は約半徑の2倍）場所の基礎地盤の垂直變位は略相等し。

(3)　沈下は載荷面を距ると共に急に減少し，上記の荷重分布にありては直徑の約5倍距れる點の垂直變位は中心のそれの僅に 6% に過ぎず。

(4)　基礎沈下と共の點の荷重强度との間には比例的關係無し，卽ち彈性地盤にありては所謂道床係數 (Bettung-ziffer) の存在せざるを知れり，此の事實は既に Wieghart 氏[9]により證明されたり。

第四節　地下の硬地層の基礎沈下に及ぼす影響

前節に於ては地盤が一樣なる力學的性質を有する場合を取り扱ひたるが，實際には斯かる理想的の地盤は存在せず，其の力學的性質は深さと共に變化すと考ふるが至當なるを以て，地層の變化の基礎沈下に對する影響を考慮する必要あり。本節にては一つの極端なる例として h なる深さに剛性大にして實際上變形を無視し得る程度の地層の存在する場合に就き前節と同じく垂直荷重のみを考へ，基礎の沈下量を算定せんとす。

(4) 式に含まるゝ常數を次の (21) 式に與へらるゝ限界條件を充たす如く定むれば (22) 式を得。

---

(9) Wieghart; Z. ang. Math. 1922, S. 165.

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{zz}=0\\&\widehat{zr}=0\end{aligned}\quad \text{at } z=0\right\}\cdots\cdots(21)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{zz})_2&=\int_0^\infty k^2\left\{B(\mathrm{Sinh}\,kz-kz\mathrm{Cosh}\,kz)-Dkz\mathrm{Sinh}\,kz\right\}J_0(kr)dk\\
(\widehat{zr})_2&=\int_0^\infty k^2\left\{Bkz\,\mathrm{Sinh}\,kz+D(\mathrm{Sinh}\,kz+kz\mathrm{Cosh}\,kz)\right\}J_1(kr)dk\\
(w)_2&=\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty k\Big[B\left\{2(1-\sigma)\mathrm{Cosh}\,kz-kz\mathrm{Sinh}\,kz\right\}+D\left\{(1-2\sigma)\mathrm{Sinh}\,kz-kz\mathrm{Cosh}\,kz\right\}\Big]J_0(kr)dk\\
(u)_2&=\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty k\Big[B\left\{2(1-\sigma)\mathrm{Sinh}\,kz+kz\mathrm{Cosh}\,kz\right\}+D\left\{2(1-2\sigma)\mathrm{Cosh}\,kz+kz\mathrm{Sinh}\,kz\right\}\Big]J_1(kr)dk
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(22)$$

更に（6）式は，

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{zz})_1&=\int_0^\infty X(k)(1+kz)J_0(kr)e^{-kz}dk\\
(\widehat{zr})_1&=z\int_0^\infty X(k)kJ_1(kr)e^{-kz}dk\\
(w)_1&=-\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}\left\{2(1-\sigma)+kz\right\}J_0(kr)e^{-kz}dk\\
(u)_1&=\frac{1+\sigma}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}\left\{(1-2\sigma)-kz\right\}J_1(kr)e^{-kz}dk
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

但し　$X(k)=-k\int_0^\infty p(\alpha)J_0(k\alpha)\alpha\,d\alpha$

次の（23）式に表はさるゝ解は基礎地盤面上 i.e. $z=0$ に於て $\widehat{zr}=0$, 且つ $p(r)$ が Hankel's reciprocal relation を滿足する時は $\widehat{zz}=-p(r)$ なる關係存在すべく，明かに垂直荷重のみ作用する場合に相當す。

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{zz}&=(\widehat{zz})_1+(\widehat{zz})_2\\
\widehat{zr}&=(\widehat{zr})_1+(\widehat{zr})_2\\
w&=w_1+w_2\\
u&=u_1+u_2
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

h なる深さに剛なる地層の存在する時，上部の地層が其の境界面にて滑動せざる限り地盤はその面にて全く變形せずと考ふるを得。h が著しく小ならざる限り兩地層は境界面にて滑動せざるものと考へ得るが故に，$z=h$ に於ける限界條件は次式にて與へらる。

$$\left.\begin{aligned}&u=0\\&w=0\end{aligned}\quad\text{at}\quad z=h\right\}\cdots\cdots(24)$$

(24) 式より B, D は (25) 式の如く求めらる。

$$\left.\begin{aligned}
B&=\frac{kh(1+kh)(\mathrm{Cosh}\,kh+\mathrm{Sinh}\,kh)+(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}\,kh+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}\,kh}{\overline{kh}^2+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}^2\,kh-(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}^2\,kh}\,\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\
D&=-\frac{\{2(1-\sigma)(1-2\sigma)+\overline{kh}^2\}(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)}{\overline{kh}^2+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}^2\,kh-(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}^2\,kh}\,\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}
\end{aligned}\right\}\cdots(25)$$

基礎の沈下のみを求むる際は D を含む項は消失するを以て，計算には B のみを考ふれば可なり，更に B を (26) 式の如く書き改む。

$$\left.\begin{aligned} &B=\beta(kh)\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh} \\ &\text{但し}\qquad \beta(kh)=\frac{kh(1+kh)(\operatorname{Cosh}kh+\operatorname{Sinh}kh)+(1-2\sigma)^2\operatorname{Sinh}kh}{\overline{kh}^2+4(1-\sigma)^2\operatorname{Cosh}^2kh-(1-2\sigma)^2\operatorname{Sinh}^2kh} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

基礎の沈下は (27) 式にて表はさる。

$$(w)_{z=0}=-\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}J_0(kr)dk+\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\int_0^\infty\beta(kh)\frac{X(k)}{k}J_0(kr)e^{-kh}dk \qquad (27)$$

(27) 式の第一項は (6) 式に示すものに相當し，無限の深さ迄一様なる力學的性質を有する地盤の基礎の沈下を示し，地層の變化による影響は第二項によりて表はさる。(26) 式に於て $\beta(kh)$ は比較的複雜なる形を有し，$X(k)$ の一般的の値に對し積分を求むるは困難なれど，$\beta(kh)$ は kh の値の增加すると共に急に減少する函數なれば，數値積分 (numerical integration) により比較的容易に積分値を求め得る。

先きに述べし如く實際の荷重分布は種々雜多なれば，特別なる荷重分布に就き計算せんとす。

(I.) 垂直荷重が半徑 a なる圓内に一様に分布する場合

$X(k)$ は次式に示さる。

$$X(k)=-p_0aJ_1(ka) \qquad (8)$$

(8) 式を (27) 式に代入すれば基礎沈下は次式に依つて示され，

$$\left.\begin{aligned} (w)_{z=0}&=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a\Big[{}_2F_1\Big(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\Big) \\ &\qquad -\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)J_0(kr)}{k}e^{-kh}dk\Big] \qquad (r\leqq a) \\ &=\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\Big[\frac{a}{r}\,{}_2F_1\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;\frac{a^2}{r^2}\Big) \\ &\qquad -2\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)J_0(kr)}{k}e^{-kh}dk\Big] \qquad (r\geqq a) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

中心の沈下は次式を以て表はし得。

$$W=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a\left\{1-\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk\right\} \qquad (29)$$

(1) 基礎の中心の沈下量に及ぼす影響

S_1 を補正値とすれば (29) 式により

$$S_1=\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk$$

よつて $kh=x$ と置けば，

$$S_1=\int_0^\infty \beta(x)\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{k}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(30)$$

S_1 の數値は $a/h\leqq 1$ なる範圍にては $J_1\left(x\frac{a}{h}\right)$ を無限級數に展開し各項別積分より，$a/h>1$ なる場合は數値積分法により求めたり。

第一法　$J_1\left(\frac{a}{h}x\right)$ は絶對收斂級數に展開し得るを以て (30) 式は次の如く示し得る。

$$S_1=\frac{1}{2}\frac{a}{h}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{h}\right)^{2n}\int_0^\infty\beta(x)x^{2n}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(31)$$

(31) 式の級數が收斂する場合は此の級數を以て S_1 を示し得べく (32) 式の積分を得れば可なり。

$$I_{2n}=\int_0^\infty\beta(x)x^{2n}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(32)$$

$x>10$ なる範圍にありては $\beta(x)\fallingdotseq 4x^2e^{-x}/\{4(1-\sigma^2)-(1-2\sigma)^2\}$ にして，$a/h<1$ なる場合は $x>10$ なる部分は餘り著しき影響を及ぼさゞるを以て，I_{2n} は比較的容易に求め得べし。その値は**第五表**に示す如し。

第　五　表　I_{2n} の 値

n	0	1	2	3	4	5
$\sigma=0.0$	1.230	1.908	1.187×10	1.49×10^2	3.05×10^3	9.35×10^4
$=0.3$	1.402	2.512	1.701×10	2.26×10^2	4.93×10^3	1.60×10^5
$=0.5$	1.800	3.935	2.80×10	3.81×10^2	8.47×10^3	2.75×10^5

n	6	7	8	9	10	11
$\sigma=0.0$	4.17×10^6	2.41×10^8	1.79×10^{10}	1.66×10^{12}	1.86×10^{14}	2.53×10^{16}
$=0.3$	7.13×10^6	4.17×10^8	3.09×10^{10}	2.84×10^{12}	3.19×10^{14}	4.31×10^{16}
$=0.5$	1.21×10^7	7.06×18^8	5.28×10^{10}	4.91×10^{12}	5.56×10^{14}	7.56×10^{16}

S_1 は $\left(\frac{1}{2}\frac{a}{h}\right)$ の冪級數として (33) 式の如く示さる。

$$S_1=\frac{1}{2}\frac{a}{h}\sum_{n=0}^\infty(-)^nA_n\left(\frac{1}{2}\frac{a}{h}\right)^{2n} \quad \cdots\cdots(33)$$

式中の係數 A_n は**第五表**より容易に求め得べし。

此の方法は一見甚だ煩雑の如くなれど，**第五表**の I_{2n} を計算し置けば，$X(k)$ が k の奇數冪の項のみより成れる級數に展開し得る總ての荷重分布に適用し得る利點あり。

第二法　(33) 式の級數は $a/h>1$ にては收斂遲きを以て直接數値積分によるを有利とす。0 より大なる任意の數を b とすれば S_1 に對し次の不等式成立し得べし。

$$|S_1|\leqq\left|\int_0^b\beta(x)\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{x}e^{-x}dx\right|+\left|\int_b^\infty\beta(x)\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{x}e^{-x}dx\right|$$

$\beta(x)$ は x の或る値以上にては x の増加と共に急に減少するを以て，$x>b$ にて，$\left|\dfrac{\beta(x)J_1\left(x\dfrac{a}{h}\right)}{x}\right|$ の最大値は必ず存在すべく，其の値を M にて示せば，

$$|S_1|-\left|\int_0^b \beta(x)\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{x}e^{-x}dx\right|\leqq|M|e^{-b}$$

にて，S_1 の値を小數點下 3 位迄求むるには，$b=5$ と置けば可なり。從つて (30) 式は次式にて近似的に示さる。

$$S\fallingdotseq\int_0^5 \beta(x)\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{x}e^{-x}dx \qquad (34)$$

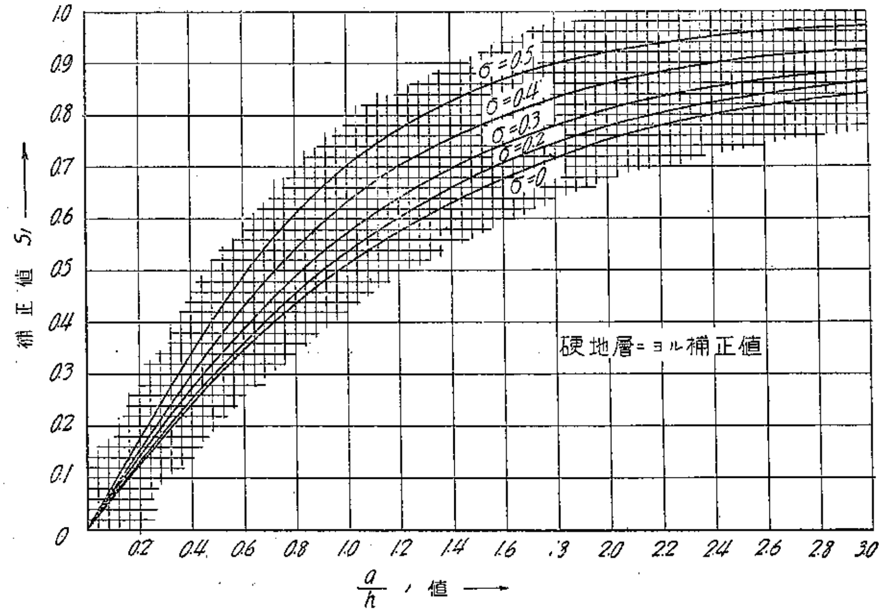
此の方法は荷重分布の異なる毎に別に計算するを要すれば稍煩雜にして，第一法の適用出來ざる a/h の大なる場合に用ひらる。

S_1 の値は**第六表**及び**第六圖**に示さる。

第　六　表　補正値 S_1 の値 (圓形)

a/h	0.1	0.5	1	2	3
$\sigma=0.0$	0.06	0.30	0.51	0.75	0.84
$=0.3$	0.07	0.33	0.57	0.81	0.89
$=0.5$	0.09	0.42	0.70	0.92	0.97

第　六　圖



尙 a/h の 3 以上の場合は S_1 の値を求むるは稍煩雜なれば本文にては 3 迄の値に止めたり。

第六表に示すが如く硬地層による影響は可成り著しく，$a/h=2$ の場合にありては沈下量は硬地層の存在せざる値に比し，$\sigma=0$ にては 25%，$\sigma=0.3$ にては 19%，$\sigma=0.5$ の場合 8% なり。又 **第六圖**を用ひ a/h の値を知る時は補正値は容易に求め得べし。

(2)　基礎沈下の分布に對する影響

一様なる垂直荷重による基礎各點の沈下は ($r>a$ なる範圍にありては基礎地盤の表面の垂直變位) 既に (28) 式に示され，即ち

$$\left.\begin{aligned}(w)_{z=0}&=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a\Big[{}_2F_1\Big(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\Big)\\&\qquad-\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)J_0(kr)}{k}e^{-kh}dk\Big]\qquad(r\leqq a)\\&=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a\Big[\frac{a}{2r}{}_2F_1\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\Big)\\&\qquad-\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)J_0(kr)}{k}e^{-kh}dk\Big].\qquad(r>a)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28)$$

既に述べし如く，小數點下第三位迄の數字を求むる際には補正値 S_1 は $|J_0(x)|\leqq1$ なる故に，

$$S_1\doteqdot\int_0^5\beta(x)\frac{J_1\Big(x\frac{a}{h}\Big)J_0\Big(x\frac{r}{h}\Big)}{x}e^{-x}dx$$

S_1 の値は第二法によれり，本文にては基礎沈下の大體の分布を知れば足るを以て，$\sigma=0$ 及び $\sigma=0.5$ に就き $a=h$，$a=2h$ の場合に對し求めたり，その値は **第七表 (a)**，**第七圖**の如し。

第　七　表 (a)　基礎沈下の分布

		m	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$a/h=1$	$\sigma=0.0$	S_1 の値	0.514	0.514	0.509	0.487	0.462	0.432
		實際の沈下	0.490	0.480	0.470	0.450	0.400	0.320
	$\sigma=0.5$	S_1 の値	0.700	0.700	0.683	0.654	0.610	0.558
		實際の沈下	0.300	0.300	0.290	0.280	0.250	0.190

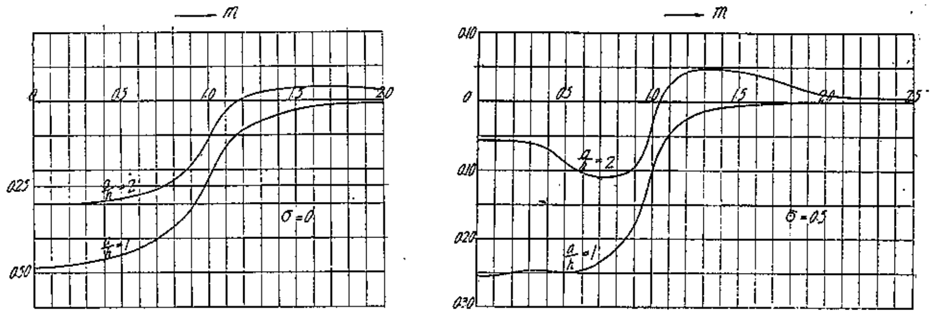
		m	1.0	1.1	1.3	1.5	2.0
$a/h=1$	$\sigma=0.0$	S_1 の値	0.415	0.393	0.364	0.334	0.260
		實際の沈下	0.220	0.130	0.060	0.020	0.010
	$\sigma=0.5$	S_1 の値	0.530	0.501	0.447	0.395	0.289
		實際の沈下	0.107	0.030	−0.020	−0.040	−0.030

		m	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$a/h=2$	$\sigma=0.0$	S_1 の値	0.746	0.743	0.728	0.684	0.627	0.558
		實際の沈下	0.254	0.254	0.232	0.250	0.236	0.189
	$\sigma=0.5$	S_1 の値	0.943	0.939	0.916	0.845	0.754	0.650
		實際の沈下	0.057	0.058	0.061	0.089	0.109	0.096

			m	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5
$a/h=2$	$\sigma=0.0$	S_1 の 値		0.554	0.444	0.357	0.254	0.205
		實際の沈下		0.183	0.027	0.000	−0.005	−0.001
	$\sigma=0.5$	S_1 の 値		0.604	0.509	0.394	0.237	0.208
		實際の沈下		0.033	−0.042	−0.040	−0.008	−0.004

但し　$m=r/a$

第七圖　基礎沈下の分布



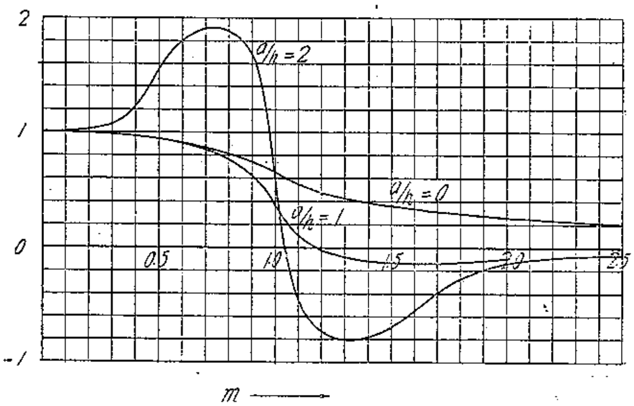
地盤面の變形狀況を表はさん爲，基礎の中心の沈下を1とする場合の各點の相對的沈下を求むれば**第七表**(b)，**第八圖**の如し。

第　七　表 (b)　相對的沈下量

m	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
$a/h=0$	1.00	1.00	0.98	0.93	0.86	0.75	0.64
$=1$	1.00	0.99	0.98	0.93	0.84	0.63	0.36
$=2$	1.00	1.02	1.07	1.56	1.91	1.68	0.56

m	1.1	1.2	1.3	1.5	2.0	2.5
$a/h=0$	0.53	0.47	0.42	0.36	0.26	0.20
$=1$	0.09	—	−0.08	−0.13	−0.10	—
$=2$	—	−0.74	—	−0.70	−0.14	−0.07

第八圖　相對的沈下量



(II.) (13)式にて與へらるゝ荷重分布

一樣なる力學的性質を有する基礎地盤に於て一樣なる基礎沈下を生ずる荷重分布に相當し，$X(k)$ 及び荷重分布は既に(12),(13)式に示す如し。

$$p(r)=-\frac{p_0}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\qquad (r<a)$$
$$=0\qquad (r\geqq a)\qquad\cdots\cdots(13)$$

$$X(k)=-\frac{1}{2}p_0a\sin ka\qquad\cdots\cdots(12)$$

(12)式の $X(k)$ を(27)式に代入すれば，基礎沈下は(36)式に依つて表はされ，

$$(w)_{z=0}=\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\pi}{2}p_0a-\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\int_0^\infty\beta(kh)\frac{\sin kaJ_0(kr)}{k}e^{-kh}dk\qquad (r<a)\cdots\cdots(36)$$

中心の沈下は，

$$W=\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\pi}{2}p_0a\left\{1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\beta(kh)\frac{\sin ka}{k}e^{-kh}dk\right\}\qquad\cdots\cdots(37)$$

此の場合單に中心の沈下量に及ぼす影響のみに對し補正値 S_1 を求むれば，

$$S_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\beta(kh)\frac{\sin ka}{k}e^{-kh}dk$$

又は $kh=x$ と置けば，

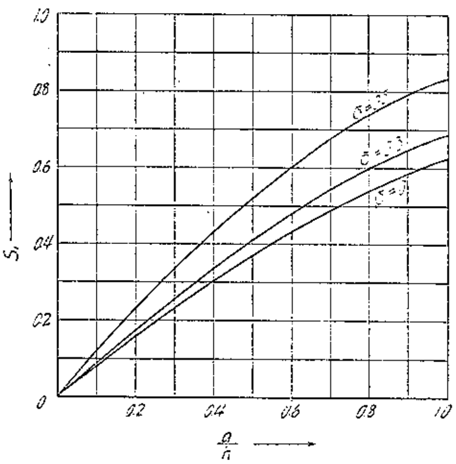
$$S_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\beta(x)\frac{\sin\frac{a}{h}x}{x}e^{-x}\,dx\qquad\cdots\cdots(37)$$

(37)式の S_1 は第一法により a/h の羃級數の形にて(38)式の如く示す。

$$S_1=\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nA_n\left(\frac{a}{h}\right)^{2n}\qquad\cdots\cdots(38)$$

(38)式の係數 A_n は第五表の I_{2n} より容易に求められ，級數の收斂なる範圍に於ける a/h に對して(37)式の補正値 S_1 を與ふ。S_1 の値は第八表及び第九圖に示さる。

第九圖　補正値(II の荷重分布)



第八表　補正値 S_1 の値

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00
$\sigma=0.0$	0.08	0.37	0.51	0.63
$=0.3$	0.09	0.41	0.57	0.69
$=0.5$	0.12	0.52	0.71	0.84

(III.) 第二節(3)の場合の荷重分布

荷重分布及び $X(k)$ は(14),(16)式に示され，

$$
\left.\begin{aligned}
p(r)&=\frac{2}{n+2}p_0\left\{1+n\frac{r^2}{a^2}\right\} && (0\leqq r\leqq a)\\
&=0 && (r>a)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(14)
$$

$$
X(k)=-p_0a\frac{2}{n+2}\left\{(n+1)J_1(ka)-2n\frac{J_2(ka)}{ka}\right\}\quad\cdots\cdots(16)
$$

(16) 式の $X(k)$ を (27) 式に代入すれば基礎沈下は次式に依つて表はされ,

$$
\begin{aligned}
(w)_{z=0}=&\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\frac{2}{n+2}p_0a\left[(n+1)\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{2n}{3}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2};1;\frac{r^2}{a^2}\right)\right]\\
&-\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\frac{2}{n+2}p_0a\left[(n+1)\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_0(kr)J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk\right.\\
&\left.-2n\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_2(ka)J_0(kr)}{k^2a}e^{-kh}dk\right]\quad\cdots\cdots(39)
\end{aligned}
$$

基礎の中心の沈下は

$$
\begin{aligned}
W=&\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{4}{3}\frac{n+3}{n+2}p_0a\left[1-\frac{3}{n+3}\left\{(n+1)\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk\right.\right.\\
&\left.\left.-2n\int_0^\infty\beta(kh)\frac{J_2(ka)}{k^2a}e^{-kh}dk\right\}\right]\quad\cdots\cdots(40)
\end{aligned}
$$

此の場合も基礎の中心の沈下に及ぼす影響のみを求むるに, 補正値 S は

$$
S_1=\frac{3+3n}{3+n}\int_0^\infty\beta(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx-\frac{6n}{3+n}\int_0^\infty\beta(x)\frac{J_2\left(\frac{a}{h}x\right)}{x^2\frac{a}{h}}e^{-x}dx\quad\cdots\cdots(41)
$$

(41) 式の S_1 は第一法により $n=2$ 及び $n=5$ の場合のみ求めたり。

(a) $n=2$ の場合

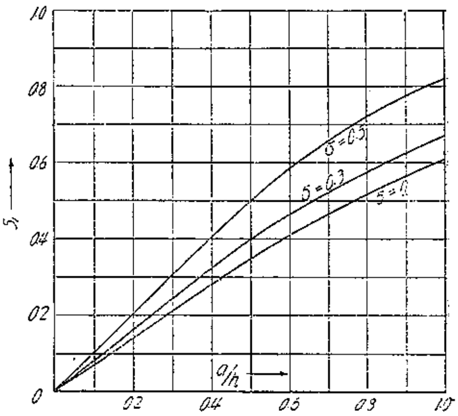
$$
S_1=\frac{9}{5}\int_0^\infty\beta(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx-\frac{12}{5}\int_0^\infty\beta(x)\frac{J_2\left(\frac{a}{h}x\right)}{x^2\frac{a}{h}}e^{-x}dx\quad\cdots\cdots(41_1)
$$

(41_1) 式の S_1 の値は前述の方法と全く同樣に求められ, **第九表**及び**第十圖**に示さる。

第 九 表　S_1 の値 ($n=2$)

m	0.10	0.50	0.75	1.00
$\sigma=0.0$	0.07	0.35	0.49	0.61
$=0.3$	0.08	0.40	0.55	0.67
$=0.5$	0.10	0.50	0.69	0.82

第 十 圖　補正値 ($n=2$ の荷重分布)



(b) $n=5$ の場合

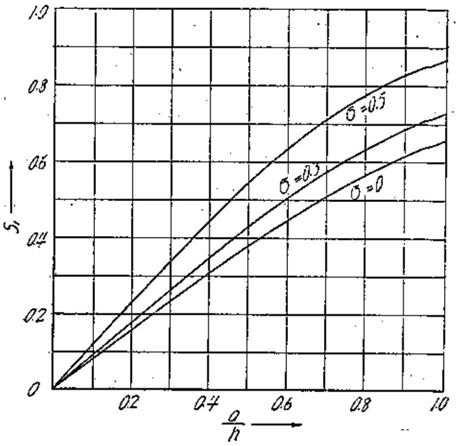
$$
\begin{aligned}
S_1=&\frac{18}{8}\int_0^\infty\beta(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx\\
&-\frac{30}{8}\int_0^\infty\beta(x)\frac{J_2\left(\frac{a}{h}x\right)}{x^2\frac{a}{h}}e^{-x}dx\quad\cdots\cdots(41_2)
\end{aligned}
$$

(41_2) 式の S_1 の値は**第十表**及び**第十一圖**の如し。

第十表 S_1 の値 $(n=5)$

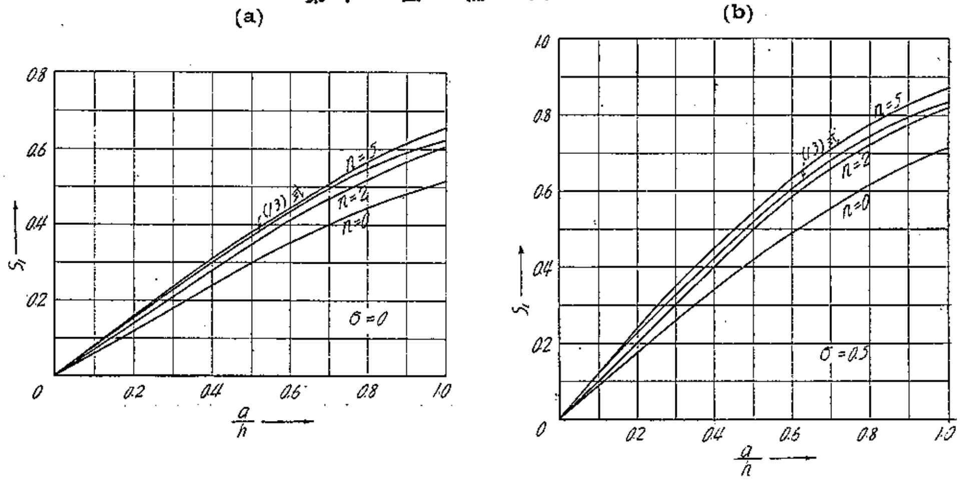
m	0.10	0.50	0.75	1.00
$\sigma=0.0$	0.08	0.38	0.54	0.66
$=0.3$	0.09	0.43	0.60	0.73
$=0.5$	0.12	0.55	0.75	0.87

第十一圖 補正値 ($n=5$ の荷重分布)



荷重分布による補正値の變化を知る爲に上記四つの場合の値を比較するに，$\sigma=0$ に對しては**第十二圖**(a)，$\sigma=0.5$ は**第十二圖**(b) に示すが如し。

第十二圖 補正値の比較



上記の計算より，

(a) 地中に存在する硬地層の基礎中心の沈下に及ぼす影響は a/h 及び σ の値に關係す。

(b) σ の大なる程補正値大にして，其の增加の割合は $\sigma=0.5$ に近づくと共に大となる。

(c) a/h の增加と共に補正値は增加し，從つて沈下量は減少す。

(d) 類似の荷重分布に於て中心の沈下に及ぼす影響は餘り著しき差異無し。

(e) 基礎沈下の分布は下部の硬地層によりて著しき影響を受け，從つて沈下の分布の與へらるゝ場合地盤に作用する荷重分布も亦著しき影響を受く。

第五節 地中の軟地層の基礎沈下に及ぼす影響

第四節に於て硬地層の影響を取り扱ひたるが，本節に於ては反對の極端なる場合とし，沈泥

等の如く小なる應力に依つて容易に流動し，その性質の寧ろ粘性液體 (viscous fluid) に近き地層が地下に存在する場合を取り扱はんとす。此の場合垂直荷重の作用するときの基礎の沈下を考ふれば流動は極めて徐々にして，從つて沈下も時と共に增加すべく，本文には終極の平衡狀態のみを考ふるを以て普通の靜水力學と同樣に取り扱ひ得る。

解として前述の (23) 式を用ひ，靜水力學の法則を適用し得るが故に，ρ_0 を以て軟地層の密度とすれば $z=h$ にて滿足すべき限界條件として次式の關係を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{zr}=0\\&\rho_0 gw=-\widehat{zz}\end{aligned}\right\}\quad \text{at}\quad z=h \qquad\cdots\cdots(44)$$

但し g は重力加速度を示す

(44) 式より B, D の値を求むれば，

$$\left.\begin{aligned}B&=\frac{F\{kh(\operatorname{Sinh}kh+\operatorname{Cosh}kh)+\operatorname{Sinh}kh\}-kh\{kh(1+kh)(\operatorname{Sinh}kh+\operatorname{Cosh}kh)+\operatorname{Sinh}kh\}}{F(kh+\operatorname{Sinh}kh\operatorname{Cosh}kh)+kh(\operatorname{Sinh}^2kh-\overline{kh}^2)}\\&\qquad\times\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\D&=\frac{F\{kh(\operatorname{Sinh}kh+\operatorname{Cosh}kh)\}-\overline{kh}^3(\operatorname{Sinh}kh+\operatorname{Cosh}kh)}{F(kh+\operatorname{Sinh}kh\operatorname{Cosh}kh)+kh(\operatorname{Sinh}^2kh-\overline{kh}^2)}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\&\text{但し}\qquad F=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\rho_0 gh\end{aligned}\right\}\cdots(45)$$

基礎の沈下のみを問題とする際は D を含む項は消失するを以て，B のみを考慮すれば足る，今 B を次の如く書き改む。

$$\left.\begin{aligned}B&=\beta'(kh)\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\\beta'(kh)&=\frac{F\{kh(\operatorname{Sinh}kh+\operatorname{Cosh}kh)+\operatorname{Sinh}kh\}-kh\{kh(1+kh)(\operatorname{Sinh}kh+\operatorname{Cosh}kh)+\operatorname{Sinh}kh\}}{F(kh+\operatorname{Cosh}kh\operatorname{Sinh}kh)+kh(\operatorname{Sinh}^2kh-\overline{kh}^2)}\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(46)$$

基礎の沈下は

$$(w)_{z=0}=-\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}J_0(kr)dk+\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\int_0^\infty\beta'(kh)\frac{X(k)}{k}J_0(kr)dk\quad\cdots\cdots(47)$$

にして，基礎の中心の沈下は，

$$W=-\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}dk+\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\int_0^\infty\beta'(kh)\frac{X(k)}{a}dk\cdots\cdots(48)$$

第二項は補正値にして，$X(k)$ が與へらるれば數値積分により比較的簡單に求め得る。(46) 式に於て $kh=x$ と置けば，$\beta'(x)$ は

$$\beta'(x)=\frac{F\{x(\operatorname{Sinh}x+\operatorname{Cosh}x)+\operatorname{Sinh}x\}-x\{x(1+x)(\operatorname{Sinh}x+\operatorname{Cosh}x)+\operatorname{Sinh}x\}}{F(x+\operatorname{Cosh}x\operatorname{Sinh}x)+x(\operatorname{Sinh}^2x-x^2)}$$

にて，F の値は 0 より無限大迄變化するも，玆には $10^2<F<10^{-4}$ の範圍の F のみを計算せり，而して $F>10^2, F<10^{-4}$ の場合の $\beta'(x)$ の値は夫々 $F=10^2$, $F=10^{-4}$ の値に略相等しきを以

て，之れを代用するも實用上差し支へ無し。

(I)　半徑 a なる圓内に垂直荷重が一様に分布する場合

(8) 式の $X(k)$ を (48) 式に代入すれば，基礎の中心の沈下量は次式の如し。

$$W=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}p_0a\left\{1-\int_0^\infty \beta'(kh)\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk\right\} \quad \cdots\cdots(49)$$

補正値 S_2 は (50) 式に示され，

$$S_2=\int_0^\infty \beta'(kh)\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk$$

$kh=x$ と置けば，

$$S_2=\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(50)$$

S_2 の値は a/h の小なる時は第一法にて，大なる時は第二法に依つて積分を行ふ。

第一法　$J_1\left(\frac{a}{h}x\right)$ を a/h の級數に展開すれば，

$$S_2=\frac{1}{2}\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{h}\right)^{2n}\int_0^\infty x^{2n}\beta'(x)e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(51)$$

尙第四節の場合の如く，

$$I_{2n}=\int_0^\infty \beta'(x)x^{2n}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(52)$$

の積分を求むる必要あり。(52) 式を次の如く書き改むる。

$$I_{2n}=\int_0^{10}\beta'(x)x^{2n}e^{-x}dx+\int_{10}^\infty \beta'(x)x^{2n}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(53)$$

此の場合 $\beta'(x)$ の値は $x\geqq 10$ の範圍にありては近似的に次の如く表し得る。

F	$\leqq 1$	2	5	10
$\beta'(x)$	$-x^2e^{-x}$	$-\frac{1.1}{1.2}x^2e^{-x}$	$-\frac{1.1}{1.5}x^2e^{-x}$	$-\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

但し $F>10$ にては $\beta'(x)$ を簡單なる形と爲すを得ざるも，n の値小なる場合は (53) 式の第二項は第一項に比して小にして，加之 $a/h\leqq 1$ なる範圍にては初めの數項のみ重要なれば第一項のみを用ふるも誤差は非常に小に，$F>10$ の場合にありても a/h の小なる時は第一法により S_2 の値を求め得べし。(53) 式の積分値 I_{2n} は第十一表の如し。

第十一表　I_{2n} の値

n	0	1	2	3
$F=100$	1.184	1.457	7.047	6.737×10
$=50$	1.159	1.342	5.982	4.916×10
$=10$	0.962	0.570	1.008	-5.54×10
$=5$	0.785	-0.148	-6.550	-1.34×10^2

n	0	1	2	3
$F=$ 2	0.342	-1.588	-1.54×10	-2.37×10^2
$=$ 1	-0.291	-2.855	-2.247×10	-3.11×10^2
$=$ 0.5	-1.212	-4.298	-2.81×10	-3.60×10^2
$=$ 0.2	-3.197	-5.917	-3.37×10	-4.02×10^2
$=$ 0.1	-5.027	-7.384	-3.66×10	-4.15×10^2
$=$ 0.05	-7.931	-8.916	-3.75×10	-4.23×10^2
$=$ 0.02	-13.930	-10.710	-3.90×10	-4.29×10^2
$=$ 0.01	-19.930	-12.020	-4.00×10	-4.30×10^2
$=$ 0.001	-23.570	-15.790	-4.09×10	-4.32×10^2
$=$ 0.0001	-65.570	-19.310	-4.11×10	-4.32×10^2

n	4	5	6	7
$F=100$	1.047×10^3	——	——	——
$=50$	6.003×10^2	——	——	——
$=10$	-1.82×10^3	-7.36×10^4	-3.62×10^6	-1.75×10^8
$=$ 5	-3.54×10^3	-1.25×10^5	-5.75×10^6	-3.26×10^8
$=$ 2	-5.54×10^3	-1.82×10^5	-8.06×10^6	-4.43×10^8
$=$ 1	-6.87×10^3	-2.17×10^5	-9.33×10^6	-5.04×10^8
$=$ 0.5	-7.64×10^3	-2.47×10^5	-1.01×10^7	-5.09×10^8
$=$ 0.2	-8.28×10^3	-2.52×10^5	-1.06×10^7	-5.60×10^8
$=$ 0.1	-8.41×10^3	-2.55×10^5	-1.06×10^7	-5.60×10^8
$=$ 0.05	-8.49×10^3	-2.55×10^5	-1.06×10^7	-5.61×10^8
$=$ 0.02	-8.54×10^3	-2.56×10^5	-1.06×10^7	-5.61×10^8
$=$ 0.01	-8.56×10^3	-2.56×10^5	-1.06×10^7	-5.61×10^8
$=$ 0.001	-8.57×10^3	-2.57×10^5	-1.07×10^7	-5.61×10^8
$=$ 0.0001	-8.57×10^3	-2.57×10^5	-1.07×10^7	-5.61×10^8

(51) 式は a/h の冪級數として (54) 式の如く示さる。

$$S_2=\frac{1}{2}\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n A_n\left(\frac{1}{2}\frac{a}{h}\right)^{2n} \qquad \cdots\cdots(54)$$

式中の係數は I_{2n} より容易に求め得べし。

補正値 S_2 は第十二表及び附圖第一 (a) 及び (b) に示せり。

第十二表　補正値 S_2 の値

F	100	50	10	5	2	1	0.5
$a/h=0.1$	0.06	0.06	0.05	0.04	0.02	-0.01	-0.06
$=0.5$	0.29	0.28	0.24	0.20	0.10	-0.05	-0.27
$=1.0$	0.52	0.51	0.45	0.39	0.24	-0.01	-0.40
$=2.0$	0.74	0.73	0.69	0.62	0.47	0.22	-0.23
$=3.0$	0.83	——	0.80	0.76	0.66	0.48	-0.10

F	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001	0.0001
$a/h=0.1$	-0.16	-0.30	-0.40	-0.70	-1.00	-1.18	-3.28
$=0.5$	-0.76	-1.20	-1.92	-3.38	-4.89	-5.67	-16.20
$=1.0$	-1.30	-2.13	-3.49	-6.36	-9.30	-10.89	-31.70
$=2.0$	-1.65	-2.68	-4.78	-9.19	-14.60	-55.00	-183.00
$=3.0$	-1.02	-2.45	-4.95	——	-18.80	-75.50	-262.00

表中の値は $a/h\leqq 1$ なる場合は第一法により，$a/h>1$ なる場合は第二法により求めたり。

(II) (13) 式に示す荷重分布

$X(k)$ の値は既に (12) 式に示せるを以て，之れを (48) 式に代入すれば基礎中心の沈下を示す式として次式を得。

$$W=\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\pi}{2}p_0a\left\{1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\beta'(kh)\frac{\sin ka}{k}e^{-kh}dk\right\} \qquad (55)$$

補正値 S_2 は (56) 式による。

$$S_2=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\beta'(x)\frac{\sin\frac{a}{h}x}{x}e^{-x}dx \qquad (56)$$

(56) 式を級數に展開し，

$$S=\frac{2}{\pi}\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nA_n\left(\frac{a}{h}\right)^{2n} \qquad (57)$$

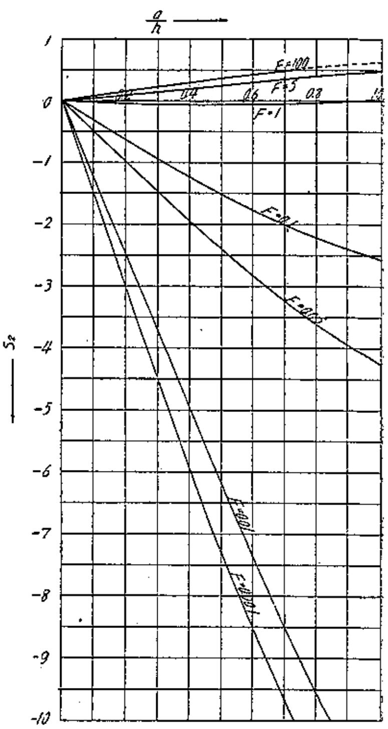
式中の係數 A_n は**第十一表**より求むるを得べく，S_2 の値は**第十三表**及び**第十三圖**の如し。

第十三表 S_2 の値

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00
$F=100$	0.08	0.36	0.51	0.63*
$=5$	0.05	0.25	0.38	0.49
$=1$	-0.02	-0.06	-0.04	0.03
$=0.1$	-0.32	-1.51	-2.11	-2.57
$=0.05$	-0.50	-2.41	-3.43	-4.26
$=0.01$	-1.26	-6.19	-9.02	-11.58
$=0.001$	-1.47	-7.30	-10.20	-13.50

表中 $F=100$ の $a/h=1$ なる時の値は正確ならず。

第十三圖



(III) 第二節 (3) の場合の荷重分布

(16) 式の $X(k)$ を (48) 式に代入すれば，基礎中心の沈下は次式の如し。

$$W=\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{4}{3}\frac{n+3}{n+2}p_0a\left[1-\left\{\frac{3(n+1)}{n+3}\int_0^\infty\beta'(kh)\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk-\frac{6n}{n+3}\int_0^\infty\beta'(kh)\frac{J_2(ka)}{k^2a}e^{-kh}dk\right\}\right] \qquad (57)$$

補正値 S_2 は

$$S_2=\frac{3(n+1)}{n+3}\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx-\frac{6n}{n+3}\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_2\left(\frac{a}{h}x\right)}{x^2\frac{a}{h}}e^{-x}dx \quad\cdots\cdots(58)$$

S_2 の値は n の任意の値に對し計算し得るも，其の代表的のものとし，$n=2, 5$ の二つの場合に止めたり。

(a) $n=2$ の場合

$$S_2=\frac{9}{5}\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx-\frac{12}{5}\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_2\left(\frac{a}{h}x\right)}{x^2\frac{a}{h}}e^{-x}dx \quad\cdots\cdots(58_1)$$

S_2 の値は**第十四表**及び**第十四圖**の如し。

第十四表　**S_2 の値**　($n=2$)

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00
$F=100$	0.07	0.34	0.49	0.61
〃 5	0.05	0.24	0.35	0.46
〃 1	−0.02	−0.06	−0.05	0.01
〃 0.1	−0.30	−1.43	−2.02	−2.49
〃 0.05	−0.48	−2.29	−3.29	−4.10
〃 0.01	−1.20	−5.85	−8.56	−11.03
〃 0.001	−1.41	−6.90	−10.01	−12.89

(b) $n=5$ の場合

$$S_2=\frac{18}{8}\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx-\frac{6n}{n+3}\int_0^\infty \beta'(x)\frac{J_2\left(\frac{a}{h}x\right)}{x^2\frac{a}{h}}e^{-x}dx \quad\cdots\cdots(58_2)$$

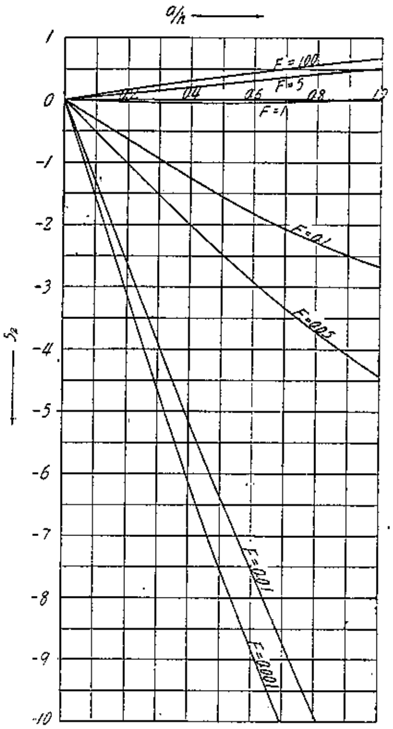
(58_2) の S_2 の値は**第十五表**及び**第十五圖**の如し。

第十五表　**S_2 の値**　($n=5$)

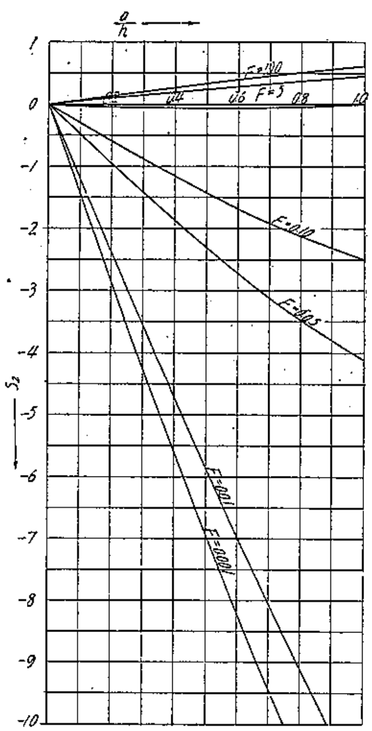
a/h	0.10	0.50	0.75	1.00
$F=100$	0.08	0.37	0.53	0.66
〃 5	0.05	0.26	0.39	0.51
〃 1	−0.02	−0.06	−0.04	0.02
〃 0.1	−0.33	−1.56	−2.20	−2.69
〃 0.05	−0.52	−2.49	−3.54	−4.44
〃 0.01	−1.31	−6.39	−9.33	−11.90
〃 0.001	−1.54	−7.53	−10.96	−14.01

更に荷重分布の補正値に及ぼす影響を知らんが爲上記四種の補正値を比較すれば**附圖第二**(1), (2), (3), (4), (5), 及び (6) に示すが如し。

第十四圖



第十五圖



上記の計算より，

(a) 軟地層の存在の基礎中心の沈下に及ぼす影響は a/h 及び F の値に關係す。

(b) F の大なる際は補正値は正，換言すれば沈下量は減少するも，F の小なるに從ひ補正値は負となり，沈下量は著しく增大す。

(c) 補正値は a/h と共に一様に變化せず。

(d) 類似の荷重分布による中心の沈下量に對する補正値は著しき差異なし。

第二章 矩形基礎の沈下

第一節 基本公式

第一章に於ては軸對稱荷重による圓形基礎の沈下量の計算方法を述べたるが，本章にては矩形基礎に就き第一章と同様の計算を行ひ，沈下量に及ぼす基礎平面形の影響を考究せり。矩形基礎は實際上最も多く用ひらるゝ形なるも，以下記する如く其の計算方法は圓形の場合に比し更に煩雜たるを免れず，從つて本章に於ては一様に分布する垂直荷重による沈下量の

算定を主とするも，他の荷重分布に對しても一般式より同様の方法に依り沈下量を求め得べし。

計算方法は第一章と同じく基礎地盤を半無限彈性體とし，表面に作用する荷重をフーリエの積分により表はしたるが,[10]若し荷重がフーリエの積分を以て表はし得ざる場合に對しては該積分にて表はし得る類似の荷重分布を代用する事とせしも，此の方法は實際上充分なる結果を與ふるを以て，垂直荷重に依る沈下量を求むる場合に一般的に適用し得る。

直角座標軸を用ひ，座標を x,y,z とし，原點を基礎面上にとり，z は鉛直下向を正とす。

記號（第十六圖参照）

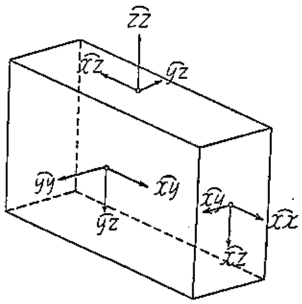
u ： x 軸の方向の變位

v ： y 軸の方向の變位

w ： z 軸の方向の變位

$\widehat{xx}$ ：	x 軸に直角なる面内にて		x 軸の方向に作用する應力	
$\widehat{yy}$ ：	y	〃	y	〃
$\widehat{zz}$ ：	z	〃	z	〃
$\widehat{zy}$ ：	z	〃	y	〃
$\widehat{yz}$ ：	y	〃	z	〃
$\widehat{xz}$ ：	x	〃	z	〃
$\widehat{zx}$ ：	z	〃	x	〃
$\widehat{yx}$ ：	y	〃	x	〃
$\widehat{xy}$ ：	x	〃	y	〃

第十六圖



$\varDelta$ ： 體積の變化率 (dilatation)

$p(x,y)$ ： 載荷面に働く垂直荷重

p_0 ： 載荷面に働く垂直荷重の平均値

$2a,\ 2b$ ： 矩形載荷面の兩邊の長さ

$(w)_{z=0}$ ： 基礎の沈下又は基礎地盤の垂直變位

W ： 基礎の中央の沈下

E ： 基礎地盤の彈性率

σ ： 基礎地盤のポアソン比

彈性體の平衡條件は次式に依つて示され，

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial \varDelta}{\partial x}=0\\
&\nabla^2 v+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial \varDelta}{\partial y}=0\\
&\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial \varDelta}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

(59)式を夫々 x,y,z に就て微分して加ふれば $\varDelta$ の滿足すべき (60) 式を得る。

(10) Riemann-Webers; Differential-gleichungen der Physik. II, S. 664

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\Delta=0\\ \text{但し}\quad \nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(60)$$

(60) 式より Δ の値を求むれば,

$$\Delta=\begin{matrix}\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{matrix}\Bigg\}\ \begin{matrix}\sin\beta y\\ \cos\beta y\end{matrix}\Bigg\}\ \begin{matrix}e^{-\gamma z}\\ e^{+\gamma z}\end{matrix}\quad \text{又は}\quad \begin{matrix}\mathrm{Sinh}\gamma z\\ \mathrm{Cosh}\gamma z\end{matrix}\cdots\cdots\cdots(61)$$

但し $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$

(61) 式を適當に組み合せ (59) 式より變位, 從つて應力を表はす式を求めて限界條件を滿足する如く常數を定む。

(1) $z\geqq 0$ に適用し得る解

u, v, w は z の增加と共に零に近づくを要すれば, Δ の値としては (61) 式中の $e^{-\gamma z}$ を含むものゝみを用ふ。

i) $\widehat{zz}$ が x,y に對稱なる解

$$u=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{B_1-\frac{A_1z}{2(1-2\sigma)}\frac{\alpha}{\gamma}\right\}\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$v=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{C_1-\frac{A_1z}{2(1-2\sigma)}\frac{\beta}{\gamma}\right\}\cos\alpha x\sin\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$w=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\alpha}{\gamma}B_1+\frac{\beta}{\gamma}C_1-\frac{3-4\sigma}{2(1-2\sigma)}\frac{A_1}{\gamma}-\frac{A_1z}{2(1-2\sigma)}\right\}\cos\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xx}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_1+B_1\alpha-\frac{A_1z}{2(1-2\sigma)}\frac{\alpha^2}{\gamma}\right\}\cos\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{yy}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_1+\beta C_1-\frac{A_1z}{2(1-2\sigma)}\frac{\beta^2}{\gamma}\right\}\cos\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zz}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}A_1-\alpha B_1-\beta C_1+\frac{A_1z}{2(1-2\sigma)}\gamma\right\}\cos\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zy}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{A_1\frac{\beta}{\gamma}+\frac{A_1z\beta}{1-2\sigma}-\frac{\alpha^2+2\beta^2}{\gamma}C_1-\frac{\alpha\beta}{\gamma}B_1\right\}\cos\alpha x\sin\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zx}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{A_1\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{A_1\alpha z}{1-2\sigma}-\frac{2\alpha^2+\beta^2}{\gamma}B_1-\frac{\alpha\beta}{\gamma}C_1\right\}\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xy}=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\beta B_1+\alpha C_1-\frac{A_1z}{1-2\sigma}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right\}\sin\alpha x\sin\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\quad\cdots\cdots(62)$$

ii) $\widehat{zz}$ が y に對してのみ對稱なる解

$$u=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{B_2+\frac{1}{2(1-2\sigma)}\frac{\alpha}{\gamma}A_2z\right\}\cos\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$v=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{C_2-\frac{1}{2(1-2\sigma)}\frac{\beta}{\gamma}A_2z\right\}\sin\alpha x\sin\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$w=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{-\frac{\alpha}{\gamma}B_2+\frac{\beta}{\gamma}C_2-\frac{3-4\sigma}{2(1-2\sigma)}\frac{1}{\gamma}A_2-\frac{1}{2(1-2\sigma)}A_2z\right\}\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xx}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_2-B_2\alpha-\frac{1}{2(1-2\sigma)}\frac{\alpha^2}{\gamma}A_2z\right\}\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{yy}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_2+\beta C_2-\frac{1}{2(1-2\sigma)}\frac{\beta^2}{\gamma}A_2z\right\}\sin\alpha x\cos\beta y\; e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zz}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}A_2+\alpha B_2-\beta C_2+\frac{A_2z}{2(1-2\sigma)}\gamma\right\}\sin\alpha x\cos\beta y\; e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zy}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\alpha\beta}{\gamma}B_2-\frac{2\beta^2+\alpha^2}{\gamma}C_2+\frac{\beta}{\gamma}A_2+\frac{\beta}{1-2\sigma}A_2z\right\}\sin\alpha x\sin\beta y\; e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xz}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{-\frac{2\alpha^2+\beta^2}{\gamma}B_2+\frac{\alpha\beta}{\gamma}C_2-\frac{\alpha}{\gamma}A_2-\frac{\alpha}{1-2\sigma}A_2z\right\}\cos\alpha x\cos\beta y\; e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xy}=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\beta B_2-\alpha C_2+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\alpha\beta}{\gamma}A_2z\right\}\cos\alpha x\sin\beta y\; e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\ldots\ldots\ldots\ldots(63)$$

其の他の場合も容易に求め得るも，後節に於て必要なるもののみに止む。式中 $A_1, A_2, B_1, B_2, \ldots\ldots$ は常數を示す。

(2) 双曲線函數を含む解

此の解は z の有限なる範圍にのみ適用し得る。

i) $\widehat{zz}$ が x, y に對し對稱なる解

$$u=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left\{C_1+\frac{\alpha B_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\left\{D_1+\frac{\alpha A_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Cosh}\gamma z\right]\sin\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$v=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left\{E_1+\frac{\beta B_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\left\{F_1+\frac{\beta A_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Cosh}\gamma z\right]\cos\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta$$

$$w=-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\left[\left\{\alpha C_1+\beta E_1-\frac{3-4\sigma}{2(1-2\sigma)}A_1\right\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\left\{\alpha D_1+\beta F_1-\frac{3-4\sigma}{2(1-2\sigma)}B_1\right\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma A_1z}{2(1-2\sigma)}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\gamma A_2z}{2(1-2\sigma)}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\right]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xx}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_1\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\sigma}{1-2\sigma}B_1\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\left\{\alpha C_1+\frac{\alpha^2B}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z\right.$$
$$\left.+\left\{\alpha D_1+\frac{d^2A_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\right]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{yy}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_1\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\sigma}{1-2\sigma}B_1\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\left\{\beta E_1+\frac{B^2B_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z\right.$$
$$\left.+\left\{\beta F_1+\frac{\beta^2A_1}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\right\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\right]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zz}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}A_1\,\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}B_1\mathrm{Cosh}\,\gamma z-(\alpha C_1+\beta E_1)\mathrm{Sinh}\,\gamma z\right.$$
$$\left.-(\alpha D_1+\beta F_1)\mathrm{Cosh}\,\gamma z-\frac{A_1\gamma z}{2(1-2\sigma)}\mathrm{Cosh}\,\gamma z-\frac{B_1\gamma z}{2(1-2\sigma)}\mathrm{Sinh}\,\gamma z\right]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zy}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\left[\left\{\alpha\beta C_1+(2\beta^2+\alpha^2)E_1-\beta A_1\right\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\left\{\alpha\beta D_1+(2\beta^2+\alpha^2)F_1+\beta B_1\right\}\right.$$
$$\left.\times\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\gamma\beta A_1z}{1-2\sigma}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\gamma\beta B_1z}{1-2\sigma}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\right]\cos\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zx}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\left[\left\{(2\alpha^2+\beta^2)C_1+\alpha\beta E_1-\alpha A_1\right\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\left\{(2\alpha^2+\beta^2)D_1+\alpha\beta F_1-\alpha B_1\right\}\right.$$
$$\left.\times\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\gamma\alpha A_1z}{1-2\sigma}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\gamma\alpha B_1z}{1-2\sigma}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\right]\sin\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xy}=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[(C_1\beta+E_1\alpha)\mathrm{Sinh}\,\gamma z+(D_1\beta+F_1\alpha)\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\frac{\alpha\beta A_1}{1-2\sigma}\frac{z}{\gamma}\mathrm{Cosh}\,\gamma z$$
$$+\frac{\alpha\beta B_1}{1-2\sigma}\frac{z}{\gamma}\mathrm{Sinh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta \qquad (64)$$

ii) $\widehat{zz}$ が y のみに對稱なる解

$$u=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{C_2-\frac{\alpha B_2}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\Big\{D_2-\frac{\alpha A_2}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$v=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{E_2+\frac{\beta B_2}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\Big\{F_2+\frac{\beta A_2}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta$$

$$w=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{\frac{3-4\sigma}{2(1-2\sigma)}\frac{B_2}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}D_2-\frac{\beta}{\gamma}F_2-\frac{A_2}{2(1-2\sigma)}z\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\Big\{\frac{3-4\sigma}{2(1-2\sigma)}\frac{A_2}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}C_2$$
$$-\frac{\beta}{\gamma}E_2-\frac{B_2}{2(1-2\sigma)}z\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xx}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{\sigma}{1-\sigma}A_2\mathrm{Sinh}\gamma z+\frac{\sigma}{1-2\sigma}B_2\mathrm{Cosh}\,\gamma z-\Big\{C_2\alpha-\frac{B_2 z}{2(1-2\sigma)}\frac{\alpha^2}{\beta}\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z$$
$$-\Big\{D_2\alpha-\frac{A_2 z}{2(1-2\sigma)}\frac{\alpha^2}{\gamma}\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{yy}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_2\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\frac{\sigma}{1-2\sigma}B_2\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\Big\{E_2\beta+\frac{B_2 z}{2(1-2\sigma)}\frac{\beta^2}{\gamma}\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z$$
$$+\Big\{F_2\beta+\frac{A_2 z}{2(1-2\sigma)}\frac{\beta^2}{\gamma}\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zz}=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}A_2+\alpha C_2-\beta E_2-\frac{B_2 z}{2(1-2\sigma)}\gamma\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z$$
$$+\Big\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}B_2+\alpha D_2-\beta F_2-\frac{A_2 z}{2(1-2\sigma)}\gamma\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zy}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{\frac{A_2 z}{1-2\sigma}\beta+\frac{2\beta^2+\alpha^2}{\gamma}F_2-B_2\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\alpha\beta}{\gamma}D_2\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z$$
$$+\Big\{\frac{B_2 z}{1-2\sigma}\beta+\frac{2\beta^2+\alpha^2}{\gamma}E_2-\frac{\alpha\beta}{\gamma}C_2-\frac{\beta}{\gamma}A_2\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{zx}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{B_2\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{2\alpha^2+\beta^2}{\gamma}D_2-\frac{\alpha\beta}{\gamma}F_2-\frac{A_2 z}{1-2\sigma}\alpha\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z$$
$$+\Big\{A_2\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{2\alpha^2+\beta^2}{\gamma}C_2-\frac{\alpha\beta}{\gamma}E_2-\frac{B_2 z}{2(1-2\sigma)}\alpha\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xy}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{E_2\alpha-C_2\beta+\frac{B_2 z}{1-2\sigma}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\Big\}\mathrm{Sinh}\,\gamma z+\Big\{F_2\alpha-D_2\beta+\frac{A_2 z}{1-2\sigma}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\Big\}\mathrm{Cosh}\,\gamma z\Big]$$
$$\times\cos\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta \qquad (65)$$

$A_1, A_2\cdots\cdots$ は總て常數なり。

第二節 垂直荷重に依る基礎の沈下

前節に於て半無限彈性體の表面に垂直荷重のみが作用する場合を取り扱ひしが，水平荷重の作用する場合も同樣に求め得べし。垂直荷重 $p(x, y)$ をフーリエの積分にて表はせば (66) 式の如し。但し $p(x, y)$ がフーリエの積分にて正しく表はし得ざる時はフーリエの積分によ

り表はし得る類似の荷重を代用す。

$$p(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty p(\lambda,\mu)\cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta(y-\mu)d\lambda d\mu \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(66)$$

若し $p(x,y)$ が y に對し對稱なる時は (66) 式は (67) 式になり，

$$p(x,\ y)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty d\lambda\int_0^\infty p(\lambda,\mu)\cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta\mu\cos\beta y\,d\mu \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(67)$$

更に $p(x,y)$ が $x,\ y$ に關し對稱なる時は次の (68) 式となる。

$$p(x,\ y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_0^\infty\int_0^\infty p(\lambda,\mu)\cos\alpha x\cos\beta y\cos\alpha\lambda\cos\beta\mu d\lambda d\mu \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

基礎地盤面に垂直荷重のみの作用する場合は $z=0$ に於て (62), (63) 式は (69) 式の示す限界條件を滿足せざるべからず。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zx}&=0\\ \widehat{zy}&=0\end{aligned}\right\}\quad \text{at}\quad z=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

(69) 式を滿足する如く係數を定むれば，(62), (63) 式は夫々次の (70) 及び (71) 式の如くなる。

$$\begin{aligned}
u&=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{z}{1-2\sigma}\right\}A_1\sin\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha\,d\beta\\
v&=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{z}{1-2\sigma}\right\}A_1\cos\alpha x\sin\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
w&=-\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{2(1-2\sigma)}\right\}A_1\cos\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{zz}&=\frac{E}{2(1-2\sigma)(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\gamma z)A_1\cos\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{xx}&=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+2\sigma\frac{\beta^2}{\gamma^2}-z\frac{\alpha^2}{\gamma}\right\}A_1\cos\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{yy}&=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\beta^2}{\gamma^2}+2\sigma\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-z\frac{\beta^2}{\gamma}\right\}A_1\cos\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{zy}&=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}z\int_0^\infty\int_0^\infty\beta A_1\cos\alpha x\sin\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{zx}&=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}z\int_0^\infty\int_0^\infty\alpha A_1\sin\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{xy}&=-\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\{(1-2\sigma)-\gamma z\}A_1\sin\alpha x\sin\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta \quad\ldots\ldots(70)
\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
u&=-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{z}{1-2\sigma}\right\}A_2\cos\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
v&=+\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{z}{1-2\sigma}\right\}A_2\sin\alpha x\sin\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
w&=-\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\frac{1}{\gamma}+\frac{z}{2(1-2\sigma)}\right\}A_2\sin\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma z}d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

$$\widehat{zz}=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\gamma z)A_2\sin\alpha x\cos\beta y\, e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xx}=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+2\sigma\frac{\beta^2}{\gamma^2}-z\frac{\alpha^2}{\gamma}\right\}A_2\sin\alpha x\cos\beta y\, e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{yy}=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}+2\sigma\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-z\frac{\beta^2}{\gamma}\right)A_2\sin\alpha x\cos\beta y\, e^{-\gamma z}d\alpha\, d\beta$$

$$\widehat{zy}=\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}z\int_0^\infty\int_0^\infty\beta A_2\sin\alpha x\sin\beta y\, e^{-\gamma z}d\alpha\, d\beta$$

$$\widehat{zx}=-\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}z\int_0^\infty\int_0^\infty\alpha A_2\cos\alpha x\cos\beta y\, e^{-\gamma z}d\alpha\, d\beta$$

$$\widehat{xy}=+\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\{(1-2\sigma)-\gamma z\}A_1\cos\alpha x\sin\beta y\, e^{-\gamma z}d\alpha d\beta \quad\ldots\ldots(71)$$

(70) 式は垂直荷重が x, y に關し對稱なる時に用ひられ，(71) 式は y に關してのみ對稱なる時に用ひらる。

垂直荷重を $p(x,y)$ とすれば (70) 式に於ける A_1 は次に示され，

$$A_1=\frac{8}{\pi^2}\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E}\int_0^\infty\int_0^\infty p(\lambda,\mu)\cos\alpha\lambda\cos\beta\mu d\lambda d\mu\quad\ldots\ldots(72)$$

又 y に關してのみ對稱なる場合の解は (70) 式及び (71) 式を加へたるものにして，A_1, A_2 の値は (73) 式に表はさる。

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{4}{\pi^2}\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E}\int_{-\infty}^\infty d\lambda\int_0^\infty p(\lambda,\mu)\cos\alpha\lambda\cos\beta\mu\, d\mu\\A_2&=\frac{4}{\pi^2}\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E}\int_{-\infty}^\infty d\lambda\int_0^\infty p(\lambda,\mu)\sin\alpha\lambda\cos\beta\mu d\mu\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(73)$$

今最も簡單なる例として矩形載荷面内に垂直荷重が一様に分布する場合を考ふれば，

$$\left.\begin{aligned}p(x,y)&=-p_0 &&(a\geqq|x|,\ b\geqq|y|)\\&=0 &&(a<|x|\ \text{又は}\ b<|y|)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(74)$$

(74) 式に與へらるゝ $p(x,y)$ を (72) 式に代入すれば，

$$A_1=-\frac{8(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E\pi^2}p_0\frac{\sin\alpha a\sin\beta b}{\alpha\beta}\quad\ldots\ldots(75)$$

應力並に變位は (70) 式，(75) 式より

$$u=-\frac{8(1-2\sigma)(1+\sigma)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{z}{1-2\sigma}\right\}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\sin\alpha x\cos\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$v=-\frac{8(1-2\sigma)(1+\sigma)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{z}{1-2\sigma}\right\}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\sin\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$w=-\frac{8}{\pi^2}\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\frac{1}{\gamma}+\frac{z}{2(1-2\sigma)}\right\}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\cos\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\widehat{xx}=-\frac{4}{\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma^2}\{\alpha^2+2\sigma\beta^2-z\alpha^2\gamma\}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\cos\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta$$

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{yy}&=-\frac{4}{\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma^2}\{\beta^2+2\sigma\alpha^2-z\beta^2\gamma\}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\cos\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{zz}&=\frac{4}{\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\gamma z)\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\cos\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha\, d\beta\\
\widehat{zy}&=-\frac{4}{\pi^2}p_0 z\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\sin\beta y}{\alpha}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{zx}&=-\frac{4}{\pi^2}p_0 z\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\sin\alpha x\cos\beta y}{\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta\\
\widehat{xy}&=\frac{4}{\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\{(1-2\sigma)-\gamma z\}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\sin\alpha x\sin\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha d\beta
\end{aligned}\right\}(76)$$

基礎の沈下卽ち $(w)_{z=0}$ は (76) 式により

$$(w)_{z=0}=\frac{2(1-\sigma^2)}{E\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\cos\beta y}{\alpha\beta}d\alpha d\beta$$

又は

$$\left.\begin{aligned}
(w)_{z=0}&=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0[F_1(a+x,b+y)+F_1(a+x,b-y)+F_1(a-x,b+y)\\
&\qquad+F_1(a-x,b-y)] \qquad (x\leqq a,\quad y\leqq b)\\
&=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0[F_1(a+x,b+y)+F_1(a+x,b-y)-F_1(x-a,b+y)\\
&\qquad-F_1(x-a,b-y)] \qquad (x>a,\quad y\leqq b)\\
&=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0[F_1(a+x,b+y)-F_1(a+x,y-b)+F_1(a-x,b+y)\\
&\qquad-F_1(a-x,y-b)] \qquad (x\leqq a,\quad y>b)\\
&=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0[F_1(a+x,b+y)-F_1(a+x,y-b)-F_1(x-a,b+y)\\
&\qquad+F_1(x-a,y-b)] \qquad (x>a,\quad y>b)
\end{aligned}\right\}\cdots(77)^{(11)}$$

但し $F_1(\alpha,\beta)=\beta\log\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}+\alpha\log\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta}$ ....(78)

而して (77) 式は x, y が正なる時換言すれば第一象限に於ける沈下量を與ふる式にして，他の象限の沈下量は對稱の關係より容易に求め得べく，中央に於ける基礎沈下は次の (79) 式に依つて示さる。

$$W=\frac{2}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0\left\{b\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}-a}+a\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}\right\}$$

又は $b=na$ とすれば，

$$W=\frac{2}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0 a\left\{n\log\frac{\sqrt{1+n^2}+1}{\sqrt{1+n^2}-1}+\log\frac{\sqrt{1+n^2}+n}{\sqrt{1+n^2}-n}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

基礎地盤面上にありては $\widehat{xz}$, $\widehat{zy}$ は零にして $\widehat{zz}$ は既知なれば $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$, $\widehat{xy}$ の値のみを求むれば足り，其れ等の値は

(11) (77) 式は Schleicher 氏により求められたり "Zur Theorie des Baugrunds" Bauing. 1926 Ht. 48/49.

$$(\widehat{xx})_{z=0}=-\frac{4}{\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha^2+2\sigma\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{\sin\alpha a\,\sin\beta b\,\cos\alpha x\,\cos\beta y}{\alpha\beta}d\alpha\,d\beta$$

$$(\widehat{yy})_{z=0}=-\frac{4}{\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta^2+2\sigma\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{\sin\alpha a\,\sin\beta b\,\cos\alpha x\,\cos\beta y}{\alpha\beta}d\alpha\,d\beta$$

$$(\widehat{xy})_{z=0}=\frac{4}{\pi^2}p_0(1-2\sigma)\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\sin\alpha a\,\sin\beta b\,\sin\alpha x\,\sin\beta y\,d\alpha\,d\beta$$

又は

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{xx})_{z=0}=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(a+x,\,b+y)+F_2(a-x,\,b+y)+F_2(a+x,\,b-y)\\
&\quad+F_2(a-x,\,b-y)] &&(\text{if}\quad a\geqq x,\quad b\geqq y)\\
=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(a+x,\,b+y)+F_2(a-x,\,b+y)-F_2(a+x,\,y-b)\\
&\quad-F_2(a-x,\,y-b)] &&(\text{if}\quad a\geqq x,\quad b<y)\\
=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(a+x,\,b+y)-F_2(x-a,\,y+b)+F_2(a+x,\,b-y)\\
&\quad-F_2(x-a,\,b-y)] &&(\text{if}\quad a<x,\quad b\geqq y)\\
=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(a+x,\,b+y)-F_2(x-a,\,y+b)-F_2(a+x,\,y-b)\\
&\quad+F_2(x-a,\,y-b)] &&(\text{if}\quad a<x,\quad b<y)\\
(\widehat{yy})_{z=0}=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(b+y,\,a+x)+F_2(b+y,\,a-x)+F_2(b-y,\,a+x)\\
&\quad+F_2(b-y,\,a-x)] &&(\text{if}\quad a\geqq x,\quad b\geqq y)\\
=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(b+y,\,a+x)+F_2(b+y,\,a-x)-F_2(y-b,\,a+x)\\
&\quad-F_2(y-b,\,a-x)] &&(\text{if}\quad a\geqq x,\quad b<y)\\
=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(b+y,\,a+x)-F_2(b+y,\,x-a)+F_2(b-y,\,a+x)\\
&\quad-F_2(b-y,\,x-a)] &&(\text{if}\quad a<x,\quad b\geqq y)\\
=&-\frac{p_0}{\pi^2}[F_2(b+y,\,a+x)-F_2(b+y,\,x-a)-F_2(y+b,\,a+x)\\
&\quad+F_2(y-b,\,x-a)] &&(\text{if}\quad a<x,\quad b<y)\\
(\widehat{xy})_{z=0}=&\frac{1-2\sigma}{4\pi}p_0\log\frac{\{(a-x)^2+(b+y)^2\}\{(a+x)^2+(b-y)^2\}}{\{(a-x)^2+(b-y)^2\}\{(a+x)^2+(b+y)^2\}}\\
\text{但し}\qquad &F_2(\alpha,\,\beta)=(1+2\sigma)\left\{\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\tan^{-1}\frac{\pi}{2}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(80)$$

先に述べたる如く (80) 式は第一象限に於ける應力を與ふる式にして，他の象限の値は對稱の關係より求め得べし。更に $\widehat{zz}$ の値は

$$\widehat{zz}=\frac{4p_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\gamma z)\frac{\sin\alpha a\,\sin\beta b\,\cos\alpha x\,\cos\beta y}{\alpha\beta}e^{-\gamma z}d\alpha\,d\beta$$

又は

$$\widehat{zz}=\frac{p_0}{\pi^2}\{F_3(a+x,\,b+y)+F_3(a+x,\,b-y)+F_3(a-x,\,b+y)+F_3(a-x,\,b-y)\}\qquad(\text{if}\quad x\leqq a,\quad y\leqq b)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=\frac{p^0}{\pi^2}\{F_3(a+x,b+y)-F_3(a+x,y-b)+F_3(a-x,b+y)\\
&\qquad -F_3(a-x,y-b)\} \qquad\qquad (\text{if}\quad x<a,\quad y>b)\\
&=\frac{p_0}{\pi^2}\{F_3(a+x,b+y)+F_3(a+x,b-y)-F_3(y-a,b+y)\\
&\qquad -F_3(x-a,y-b)\} \qquad\qquad (\text{if}\quad x>a,\quad y<b)\\
&=\frac{p_0}{\pi^2}\{F_3(a+x,b+y)-F_3(a+x,y-b)-F_3(x-a,b+y)\\
&\qquad +F_3(x-a,b-y)\} \qquad\qquad (\text{if}\quad x>a,\quad y>b)\\
\text{但し}\quad &F_3(a_1,b_1)=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\log\frac{z^2+(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)^2}{z^2+(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)^2}d\theta\\
&\quad +2a_1b_1z^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\{z^2+(a_1\cos\theta-b_1\sin^2\theta)^2\}\{z^2+(a_1\cos\theta+b_1\sin^2\theta)^2\}}
\end{aligned}\right\}\cdots(81)
$$

(81) 式に示さるゝ $F_3(a_1,b_1)$ の値は a_1, b_1 及び z の與へらるゝ時，數値積分により之れを求め得べし。此の場合基礎の沈下量のみを必要とするを以て數字的計算は $(w)_{z=0}$ の値のみに止めたれども應力も同様に上記の諸式より計算するを得べし。

i) 基礎の中央の沈下量

中央の沈下量と矩形の兩邊の比 n との關係は (79) 式より求め得べく，**第十六表**及び**第十七圖**に示すが如し。

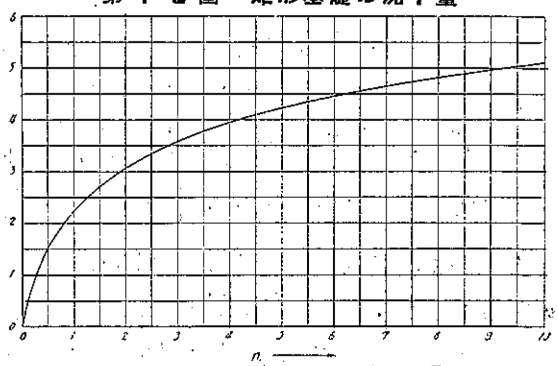
第十六表　中央の沈下量と n との關係

n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
S_0 (沈下量)	0	0.83	1.32	1.71	2.00	2.25
n	2	3	4	5	7	10
S_0 (沈下量)	3.06	3.57	3.93	4.21	4.63	5.00

第十六表に示す沈下量は $\frac{(1-\sigma^2)p_0a}{E}=1$ とする時の値なり。

更に正方形即ち $n=1$ なる時の沈下量を 1 とする場合の矩形の沈下量を α とし，沈下量が載荷面積の平方根に比例すと假定する時の値を α_2 にて示せば，α 及び α_2 の値は**第十七表**及び**第十八圖**に示すが如し。

第十七圖　矩形基礎の沈下量



第十七表　α 及び α_2 の値

n	0	0.2	0.6	1	2
α	0	0.37	0.76	1	1.36
α_2	0	0.45	0.77	1	1.41

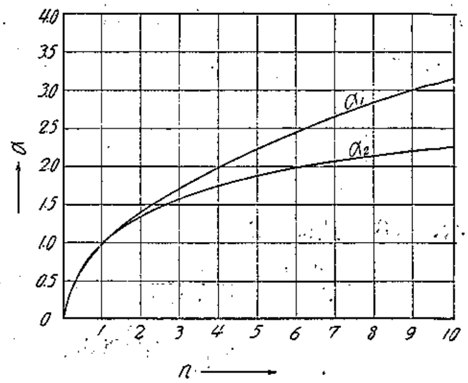
n	3	4	5	7	10
α	1.59	1.75	1.88	2.06	2.22
α_2	1.73	2.00	2.24	2.65	3.16

是等の計算より

1) 矩形載荷面に一様なる垂直荷重の作用する時の基礎の中心の沈下量は正方形にありては面積の平方根に比例して增加すれども，矩形にありては面積の平方根に比例すと考へし場合より小にして，兩者の差異は $n=10$ なる時に於て 39% に及ぶ。

2) 正方形と其の邊長と相等しき直徑を有する圓形とを比較すれば，基礎中心の沈下量は正方形に於て大に，兩者の比は略 1.12 なり。

第十八圖　沈下量の比較



ii) 基礎沈下の分布

基礎沈下の分布は (77) 式より求むるを得べく，正方形の場合の沈下量及び半徑 a なる圓形載荷面の直徑上の沈下量を夫々 $\dfrac{1-\sigma^2}{E}p_0a$ にて除したる値を示せば**第十八表**の如し。

第十八表

(1) 正方形基礎の沈下分布

m	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$y=0$	2.25	2.24	2.17	2.06	1.87	1.53	1.21
$=b$	1.53	1.52	1.50	1.42	1.32	1.13	0.93
$=2b$	0.65	—	0.66	0.64	—	0.59	—

m	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	4.0	5.0
$y=0$	0.98	0.84	0.70	0.65	0.44	0.32	0.26
$=b$	0.81	0.73	0.64	0.59	0.41	0.32	—
$=2b$	0.54	0.51	—	0.46	—	—	—

(2) 正方形基礎と圓形基礎の沈下の分布の比較

m	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y=0$	2.25	2.24	2.17	2.06	1.87	1.53
圓	2.00	1.98	1.92	1.81	1.62	1.27

m	1.2	2.0	3.0	4.0	5.0
$y=0$	1.21	0.65	0.44	0.32	0.26
圓	0.93	0.50	0.34	0.25	0.20

但し　$r=ma$

上表より圓形と正方形との間には大なる差異無き事を知る。先に圓形載荷面に就て述べし如く基礎沈下と其の點の荷重強度との間に比例的關係無し。

第三節 地中の硬地層の基礎沈下に及ぼす影響

第一章にて載荷面の圓形なる場合，地中の硬地層の影響の可成り著しき事を知れり。本節に於ては更に載荷面の形による此の影響を知らんが爲，矩形載荷面上に一様なる垂直荷重の作用する場合の基礎の沈下量を計算して圓形載荷面の場合と比較せんとす。

第一節の (64) 式に於て次式の限界條件を滿足する如く常數を定むれば，

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}&=0\\ \widehat{zy}&=0\\ \widehat{zx}&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{at} \quad z=0 \qquad \cdots\cdots(82)$$

次の (83) 式に示さる。

$$\left.\begin{aligned}
u_2&=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{\frac{\alpha A_1'}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}+D_1\Big\}\operatorname{Cosh}\gamma z+\Big\{\frac{\alpha}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\frac{z}{\gamma}\\
&\qquad+\frac{\alpha}{2\gamma^2}A_1'\Big\}\operatorname{Sinh}\gamma z\Big]\sin\alpha x\cos\beta y\,d\alpha d\beta\\
v_2&=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\Big\{\frac{\beta}{2\gamma^2}A_1'+\frac{\beta}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\frac{z}{\gamma}\Big\}\operatorname{Sinh}\gamma z\\
&\qquad+\Big\{\frac{\beta A_1'}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}+F_1\Big\}\operatorname{Cosh}\gamma z\Big]\cos\alpha x\sin\beta y d\alpha d\beta\\
w_2&=-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\Big[-\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}A_1'\operatorname{Cosh}\gamma z-\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Sinh}\gamma z\\
&\qquad+\frac{A_1'\gamma z}{2(1-2\sigma)}\operatorname{Sinh}\gamma z+\frac{\gamma z}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Cosh}\gamma z\Big]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta\\
\widehat{xx}_2&=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_1'\operatorname{Sinh}\gamma z+\frac{\sigma}{1-\sigma}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Cosh}\gamma z+\frac{\alpha^2}{\gamma}\Big\{\frac{A_1'}{2\gamma}\\
&\qquad+\frac{z}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\Big\}\operatorname{Sinh}\gamma z+\Big\{\alpha D_1+\frac{\alpha^2 A_1'}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\Big\}\operatorname{Cosh}\gamma z\Big]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta\\
\widehat{yy}_2&=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{\sigma}{1-2\sigma}A_1'\operatorname{Sinh}\gamma z+\frac{\sigma}{1-\sigma}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Cosh}\gamma z+\frac{\beta^2}{\gamma}\Big\{\frac{A_1'}{2\gamma}\\
&\qquad+\frac{z}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\Big\}\operatorname{Sinh}\gamma z+\Big\{\beta F_1+\frac{\beta^2 A_1'}{2(1-2\sigma)}\frac{z}{\gamma}\Big\}\operatorname{Cosh}\gamma z\Big]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta\\
\widehat{zz}_2&=\frac{E}{1+\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{1}{2(1-2\sigma)}A_1'\operatorname{Sinh}\gamma z-\frac{A_1'\gamma z}{2(1-2\sigma)}\operatorname{Cosh}\gamma z\\
&\qquad-\frac{\gamma z}{2(1-\sigma)}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Sinh}\gamma z\Big]\cos\alpha x\cos\beta y d\alpha d\beta\\
\widehat{zy}_2&=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{1}{\gamma}\Big\{\alpha\beta D_1+(2\beta^2+\alpha^2)F_1-\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\beta(\alpha D_1+\beta F_1)\Big\}\operatorname{Sinh}\gamma z\\
&\qquad+\frac{\beta A_1'z}{1-2\sigma}\operatorname{Sinh}\gamma z+\frac{\beta z}{1-\sigma}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Cosh}\gamma z\Big]\cos\alpha x\sin\beta y\,d\alpha\,d\beta\\
\widehat{zx}_2&=\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{1}{\gamma}\Big\{\alpha\beta F_1+(2\alpha^2+\beta^2)D_1-\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\alpha(\alpha D_1+\beta F_1)\Big\}\operatorname{Sinh}\gamma z\\
&\qquad+\frac{\alpha z}{1-2\sigma}A_1'\operatorname{Sinh}\gamma z+\frac{\alpha z}{1-\sigma}(\alpha D_1+\beta F_1)\operatorname{Cosh}\gamma z\Big]\sin\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta
\end{aligned}\right\}(83)$$

$$\widehat{xy}_2=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}A_1'\mathrm{Sinh}\,\gamma z+(D_1\beta+F_1\alpha)\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\frac{\alpha\beta}{1-2\sigma}A_1'\frac{z}{\gamma}\mathrm{Cosh}\,\gamma z+\frac{z}{1-\sigma}\frac{\alpha\beta}{\gamma}(\alpha D_1+\beta F_1)\mathrm{Sinh}\,\gamma z\Big]\sin\alpha x\sin\beta y\,d\alpha\,d\beta$$

(83) 式は垂直荷重が x, y に關し對稱なる場合のみに用ひらる。(70) 式を夫々 u_1, v_1 とし (83) 式と加ふれば,

$$\left.\begin{aligned}u&=u_1+u_2\\v&=v_1+v_2\\w&=w_1+w_2\\\widehat{zz}&=\widehat{zz}_1+\widehat{zz}_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(83)$$

(83) 式は $z=0$ にて $\widehat{zx}=0$, $\widehat{zy}=0$, 即ち基礎地盤面に垂直荷重のみ作用する場合なり。

さて第一章にて述べし如く硬地層の存在する時は其の境界面に於て變位は零なりと考へ得るを以て $z=h$ の限界條件は

$$\left.\begin{aligned}u&=0\\v&=0\\w&=0\end{aligned}\quad\text{at } z=h\right\}\cdots\cdots(84)$$

(84) 式を滿足せしむる爲には常數間に次の如き關係あり。

$$\left.\begin{aligned}A_1'&=\frac{\gamma h(1+\gamma h)(\mathrm{Sinh}\,\gamma h+\mathrm{Cosh}\,\gamma h)+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}\,\gamma h+(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}\,\gamma h}{\overline{\gamma h}^2+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}^2\gamma h-(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}^2\gamma h}e^{-\gamma h}A_1\\D_1&=-\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\frac{\{\overline{\gamma h}^2+2(1-\sigma)(1-2\sigma)\}\{\mathrm{Sinh}\,\gamma h+\mathrm{Cosh}\,\gamma h\}}{\overline{\gamma h}^2+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}^2\gamma h-(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}^2\gamma h}\frac{\alpha}{\gamma^2}A_1e^{-\gamma h}\\F_1&=-\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\frac{\{\overline{\gamma h}^2+2(1-\sigma)(1-2\sigma)\}\{\mathrm{Sinh}\,\gamma h+\mathrm{Cosh}\,\gamma h\}}{\overline{\gamma h}^2+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}^2\gamma h-(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}^2\gamma h}\frac{\beta}{\gamma^2}A_1e^{-\gamma h}\end{aligned}\right\}\cdots(85)$$

常數 A_1 は先に示せる如く垂直荷重の分布により定められ, 尙基礎の沈下のみを問題とする時は D_1, F_1 を含む項は消ゆる故に A_1' のみを考ふれば足る。A_1' を改むれば,

$$\left.\begin{aligned}&A_1'=f(\gamma h)e^{-\gamma h}A_1\\\text{但し}\quad&f(x)=\frac{x(1+x)(\mathrm{Sinh}\,x+\mathrm{Cosh}\,x)+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}\,x+(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}\,x}{x^2+4(1-\sigma)^2\mathrm{Cosh}^2x-(1-2\sigma)^2\mathrm{Sinh}^2x}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(86)$$

$f(x)$ は第一章の (26′) 式に與へられし $\beta(x)$ と同一にして, 從つて基礎の沈下は次式にて與へらる。

$$(w)_{z=0}=-\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{A_1}{\gamma}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta+\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\gamma h)\frac{A_1}{\gamma}e^{-\gamma h}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\ ..(87)$$

兩邊の長さを夫々 $2a, 2b$ なる矩形載荷面に一樣なる垂直荷重が作用する場合には A_1 は (75) 式にて與へらるゝ故に, $(w)_{z=0}$ は次の如くなる。

$$(w)_{z=0}=\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b}{\alpha\beta}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta-\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(\gamma h)}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b}{\alpha\beta}\cos\alpha x\cos\beta y\,e^{-\gamma h}d\alpha\,d\beta\ \cdots\cdots(88)$$

中央の沈下量は

$$W=\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2 E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\alpha a\,\sin\beta b}{\alpha\beta}d\alpha d\beta$$

$$-\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2 E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(\gamma h)}{\gamma}\,\frac{\sin\alpha a\,\sin\beta b}{\alpha\beta}e^{-\gamma h}d\alpha d\beta \qquad (89)$$

(88) 式, (89) 式の第二項は補正項に相當し, $f(x)$ は相當複雜なる形を有すれば, 第一章の如く數値積分により其の値を求め得。此の場合基礎の中央の沈下量に對する補正値のみを算定す。

次の S_1 なる積分を考ふるに,

$$S_1=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(\gamma h)}{\gamma}\,\frac{\sin\alpha a\,\sin\beta b}{\alpha\beta}e^{-\gamma h}d\alpha d\beta \qquad (90)$$

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ なれば, 上式に $\alpha=\gamma\cos\theta$, $\beta=\gamma\sin\theta$ 及び $\gamma h=x$ と置けば, S_1 は次の如く書き得る。

$$S_1=\int_0^\infty dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}h\frac{f(x)\sin\left(\frac{a}{h}x\cos\theta\right)\sin\left(\frac{b}{h}x\sin\theta\right)}{x^2\sin\theta\cos\theta}e^{-x}d\theta \qquad (91)$$

此の積分は a/h の級數に變じて計算せり。

i) 正方形の場合

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{a}{h}x\cos\theta\right)\sin\left(\frac{a}{h}x\sin\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}d\theta$ は附錄の (11) 式により次の如くなる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{a}{h}x\cos\theta\right)\sin\left(\frac{a}{h}x\sin\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=2x^2\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{\pi}{2}\Big[\frac{1}{2!}-\frac{2}{4!}\left(\frac{a}{h}x\right)^2+\frac{3.5}{6!}\left(\frac{a}{h}x\right)^4$$

$$-\frac{6}{8!}\left(\frac{a}{h}x\right)^6+\frac{10.4}{10!}\left(\frac{a}{h}x\right)^8-\frac{18.3}{12!}\left(\frac{a}{h}x\right)^{10}+\frac{32.7}{14!}\left(\frac{a}{h}x\right)^{12}+\cdots\Big] \qquad (92)$$

更に (92) 式を (91) 式に代入し各項別に積分すれば, S_1 は a/h の羃級數にて表はされ,

$$S_1=\pi a\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n A_n\left(\frac{a}{h}\right)^{2n} \qquad (93)$$

(93) 式の係數 A_n は**第五表**より容易に求められ S_1 の値は $a/h\leqq1$ なる範圍にては (93) 式より計算し得る。

(89) 式は

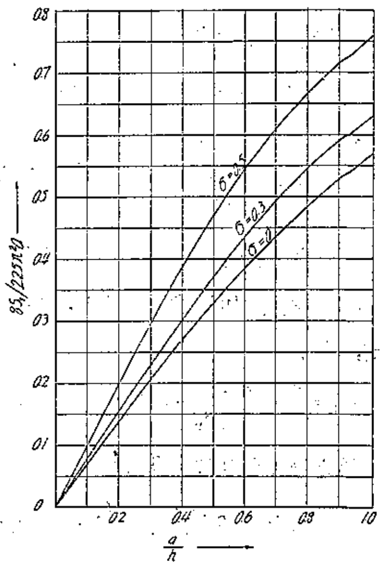
$$W=2.25\frac{1-\sigma^2}{E}p_0 a\left[1-\frac{8}{2.25\pi^2}\,\frac{1}{a}S_1\right] \qquad (94)$$

となり, S_1 を求むる時は補正値は $8S_1/2.25\pi^2 a$ にて與へられ, 其の値は**第十九表**及び**第十九圖**の如し。

第十九表　補正値 $8S_1/2.25\pi^2a$ の値（正方形）

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00
$\sigma=0.0$	0.07	0.33	0.46	0.57
$=0.3$	0.08	0.37	0.52	0.63
$=0.5$	0.10	0.47	0.64	0.76

第十九圖　補正値（正方形基礎）



今半徑 a なる圓形載荷面の場合と比較すれば**第二十表**に示す如く，

第二十表　補正値の比較

a/h		0.1	0.5	1.0
$\sigma=0.0$	圓形載荷面	0.06	0.30	0.51
	正方形載荷面	0.07	0.33	0.57
$\sigma=0.5$	圓形載荷面	0.09	0.42	0.70
	正方形載荷面	0.10	0.47	0.76

即ち兩者の最大差は約10％に過ぎず，從つて實用上は正方形載荷面に對し圓形載荷面に對する補正値を用ふるも著しき誤差の生ぜざるを知る。

ii)　矩形の場合

$b=\frac{1}{2}a$ 及び $b=\frac{1}{5}a$ の二つの場合に就てのみ計算す。

a)　$b=\frac{1}{2}a$ の場合

附錄の (13) 式を用ひて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{a}{h}x\cos\theta\right)\sin\left(\frac{a}{2h}x\sin\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\pi x^2\left[\frac{1}{2!}-\frac{1.25}{4!}\left(\frac{a}{h}x\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1.21}{6!}\left(\frac{a}{h}x\right)^4-\frac{1.22}{8!}\left(\frac{a}{h}x\right)^6+\frac{2.4}{10!}\left(\frac{a}{h}x\right)^8-\cdots\cdots\cdots\right]\cdots\cdots\cdots(95)$$

(95) 式を (91) 式に代入し各項別積分を行へば，S_1 は次式に示され，

$$S_1=\frac{\pi}{2}a\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nA_n\left(\frac{a}{h}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots(96)$$

式中の係數 A_0，A_1 等は**第五表**より容易に求め得べく，S_1 の値が與へらるゝ時 (89) 式は

$$W=1.53\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\left\{1-\frac{8}{1.53\pi^2}\frac{1}{a}S_1\right\}\cdots\cdots\cdots(97)$$

なるを以て，補正値 $\frac{8}{1.53\pi^2}\frac{1}{a}S_1$ は**第二十一表**及び**第二十圖**に示すが如し。

第二十一表　補正値 $8S_1/1.53\pi^2a$ の値（$a=2b$）

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00	1.25
$\sigma=0.0$	0.05	0.25	0.35	0.44	0.52
$=0.3$	0.06	0.28	0.40	0.51	0.57
$=0.5$	0.08	0.35	0.50	0.61	0.70

b)　$b=\frac{1}{5}a$ の場合

附錄(14)式より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{a}{h}x\cos\theta\right)\sin\left(\frac{a}{5h}x\sin\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{a}{h}\right)^2\pi x^2\left[\frac{1}{2!}-\frac{1.04}{4!}\left(\frac{a}{h}x\right)^2+\frac{1.18}{6!}\left(\frac{a}{h}x\right)^4-\frac{0.94}{8!}\left(\frac{a}{h}x\right)^6+\cdots\right]\quad\text{..(98)}$$

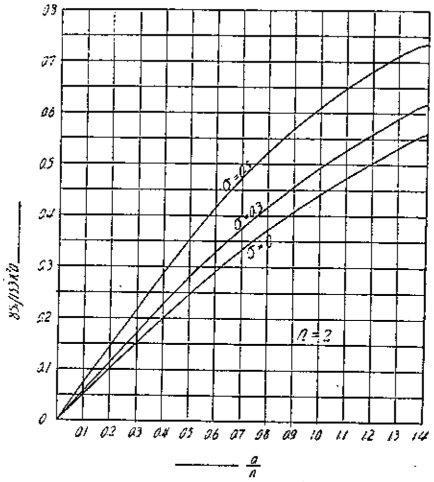
(98) 式を (91) 式に代入し，各項別に積分すれば，S_1 は

$$S_1=\frac{\pi}{5}a\,\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n A_n\left(\frac{a}{h}\right)\quad\text{.........(99)}$$

前と全く同樣に (89) 式は，

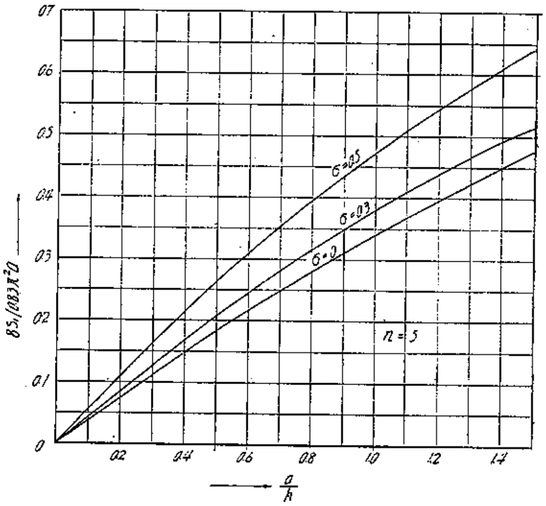
$$W=0.83\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\left\{1-\frac{8}{0.83\pi^2}\frac{1}{a}S_1\right\}\quad\text{......(100)}$$

第二十圖　補正値(矩形基礎)



なるを以て，補正値 $\frac{8}{0.83\pi^2}\frac{1}{a}S_1$ は**第二十二表**及び**第二十一圖**に示す如し。

第二十一圖　補正値(矩形基礎)



第二十二表　補正値 $8S_1/0.83\pi^2a$ の値($a=5b$)

a/h	0.20	0.50	1.00	1.50
$\sigma=0.0$	0.08	0.18	0.34	0.48
$=0.3$	0.09	0.21	0.38	0.53
$=0.5$	0.11	0.26	0.47	0.64

iii)　矩形の場合の補正値の比較

補正値に及ぼす矩形の兩邊の比の影響を知らんが爲に，矩形と同面積の正方形に對する補正値と比較せり。其の結果は $a=2b$ に對しては**第二十三表**(a)，$a=5b$ に對しては**第二十三表**(b)に示す，但し比較は $\sigma=0$ 及び $\sigma=0.5$ の二つの場合に止む。

第二十三表(a)　補正値の比較　($a=2b$)

a/h		0.10	0.50	0.75	1.00	1.25
$\sigma=0$	矩形	0.05	0.25	0.35	0.44	0.52
	同面積の正方形	0.05弱	0.23	0.33	0.44	0.52

a/h		0.10	0.50	0.75	1.00	1.25
$\sigma=0.5$	矩　形	0.08	0.35	0.50	0.61	0.70
	同面積の正方形	0.07	0.31	0.47	0.62	0.71

第二十三表(b)　補正値の比較 $(a=5b)$

a/h		0.20	0.50	1.00	1.50
$\sigma=0$	矩　形	0.08	0.18	0.34	0.48*
	同面積の正方形	0.06	0.15	0.30	0.41
$\sigma=0.5$	矩　形	0.11	0.26	0.47	0.64*
	同面積の正方形	0.09	0.22	0.43	0.58

備考：＊を附せるは略算値なり。

第二十三表(a) 及び (b) により補正値は兩邊の比に依りて著しき差を生ぜず，$a=2b$ にありては最大 13%，$a=5b$ にては a/h の小なる範圍を除き約 18% にして，兩邊の比大なる程差異大に，a/h の比較的小なる範圍にありては矩形の補正値に對し正方形の値を代用するも實用上大過なし。

第四節　地下の軟地層の基礎沈下に及ぼす影響

第三節と同じく地下に軟地層の存在する場合，其の基礎沈下に及ぼす形の影響を知らんが爲に，矩形載荷面上に一様に分布する垂直荷重による沈下量を求めんとす。計算方法は第一章第五節と全く同様なり。

此の場合解として (83) 式を用ひ，$z=h$ にて滿足すべき限界條件は次の如し。

$$\left.\begin{aligned}&\rho_0 g w=-(\widehat{zz})\\&\widehat{zx}=0\\&\widehat{zy}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{at } z=h \qquad \cdots\cdots(101)$$

但し ρ_0 は軟地層の密度とす。

此の條件を滿足する爲必要なる係數間の關係は，

$$\left.\begin{aligned}
A_1'&=\frac{F\{\gamma h(\operatorname{Sinh}\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h)+\operatorname{Sinh}\gamma h\}-\gamma h\{\gamma h(1+\gamma h)(\operatorname{Sinh}\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h)+\operatorname{Sinh}\gamma h\}}{F(\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h\operatorname{Sinh}\gamma h)+\gamma h(\operatorname{Sinh}^2\gamma h-\overline{\gamma h}^2)}A_1e^{-\gamma h}\\
D_1&=-\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{F\{\gamma h(\operatorname{Sinh}\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h)\}-\overline{\gamma h}^3(\operatorname{Sinh}\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h)}{F(\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h\operatorname{Sinh}\gamma h)+\gamma h(\operatorname{Sinh}^2\gamma h-\overline{\gamma h}^2)}\,\frac{\alpha}{\gamma^2}e^{-\gamma h}A_1\\
F_1&=-\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{F\gamma h(\operatorname{Sinh}\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h)-\overline{\gamma h}^3(\operatorname{Sinh}\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h)}{F(\gamma h+\operatorname{Cosh}\gamma h\operatorname{Sinh}\gamma h)+\gamma h(\operatorname{Sinh}^2\gamma h-\overline{\gamma h}^2)}\,\frac{\beta}{\gamma^2}e^{-\gamma h}A_1\\
&\text{但し}\qquad F=\frac{2(1-\sigma^2)}{E}\rho_0 g h
\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(102)$$

A_1 は垂直荷重に依つて定まる値にして，基礎の沈下量のみを求むる時は A_1' のみを考慮すれば足る。A_1' を書き改むれば，

$$\left.\begin{aligned}&A_1'=f'(\gamma h)e^{-\gamma h}A_1\\ &\text{但し}\quad f'(x)=\frac{F\{x(\mathrm{Sinh}\,x+\mathrm{Cosh}\,x)+\mathrm{Sinh}\,x\}-x\{x(1+x)(\mathrm{Sinh}\,x+\mathrm{Cosh}\,x)+\mathrm{Sinh}\,x\}}{F(x+\mathrm{Cosh}\,x\ \mathrm{Sinh}\,x)+x(\mathrm{Sinh}^2x-x^2)}\end{aligned}\right\}\quad\ldots(103)$$

式中の $f(x)$ は第一章の (46) 式の値と同一にして，基礎沈下は，

$$(w)_{z=0}=\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{A_1}{\gamma}\cos\alpha x\ \cos\beta y\,d\alpha d\beta+\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\int_0^\infty\int_0^\infty f'(\gamma h)\frac{A_1}{\gamma}\cos\alpha x\ \cos\beta y\,e^{-\gamma h}d\alpha d\beta\quad\ldots\ldots(104)$$

二邊の長さ夫々 $2a$, $2b$ なる矩形上に一様なる垂直荷重の作用する場合，A_1 は (75) 式にて與へらるゝを以て沈下量は，

$$\begin{aligned}(w)_{z=0}=&\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\ \sin\beta b}{\alpha\beta}\cos\alpha x\ \cos\beta y\,d\alpha d\beta\\ &-\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f'(\gamma h)}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\ \sin\beta b}{\alpha\beta}\cos\alpha x\ \cos\beta y\,e^{-\gamma h}d\alpha d\beta\end{aligned}$$

基礎中央に於ては

$$W=\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\ \sin\beta b}{\alpha\beta}d\alpha d\beta-\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f'(\gamma h)}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\ \sin\beta b}{\alpha\beta}e^{-\gamma h}d\alpha d\beta\quad\ldots\ldots(105)$$

本節にては基礎中心の沈下量に對してのみ計算するに止めしが，總て第一法により，結果は a/h の大なる場合に對しても略算値を求むるには差し支へなし。

先づ S_2 を計算するには (105) 式左邊第二項の積分を S_2 にて表はし變數の變換を行ひ，

$$S_2=\int_0^\infty dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}h\frac{\beta'(x)\sin\left(\frac{a}{h}x\cos\theta\right)\sin\left(\frac{b}{h}x\sin\theta\right)}{x^2\sin\theta\ \cos\theta}e^{-x}d\theta\quad\ldots\ldots(106)$$

S_2 の計算法は第三節と全く同一なり。

i) 正方形の場合

附錄の (11) 式により S_2 を級數に展開し，

$$S_2=\pi a\frac{a}{h}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nA_n\left(\frac{a}{h}\right)^{2n}\quad\ldots\ldots(107)$$

係數 A_n を第十一表より求め，S_2 を計算するに $a/h\leqq1$ に於ては收斂速かなるを以て容易に求め得べく，(105) 式は次の如く書き改められ，

$$W=2.25\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\left\{1-\frac{8}{2.25\pi^2}\frac{1}{a}S_2\right\}\quad\ldots\ldots(108)$$

補正値 $8S_2/2.25\pi^2a$ の値は第二十四表及び第二十二圖 (a), (b) に示す如し。

第二十四表　補正値 $8S_2/2.25\pi^2a$ の値

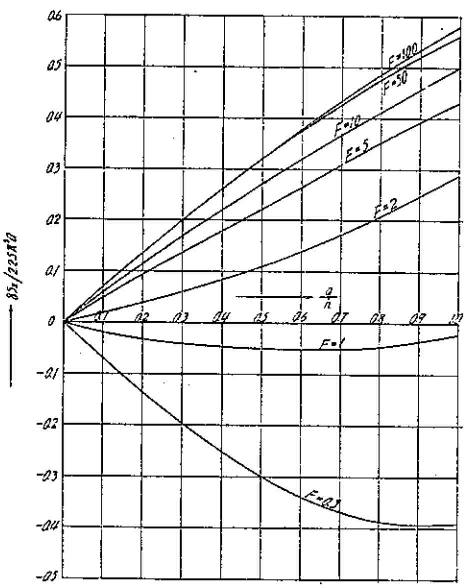
F	100	50	10	5	2	1	0.50
$a/h=0.10$	0.07	0.07	0.06	0.05	0.02	-0.02	-0.07
$=0.50$	0.32	0.32	0.27	0.22	0.11	-0.05	-0.30

F	100	50	10	5	2	1	0.50
$a/h=0.75$	0.46	0.45	0.39	0.33	0.19	−0.05	−0.38
$=1.00$	0.58	0.56	0.50	0.43	0.29	−0.02	−0.39

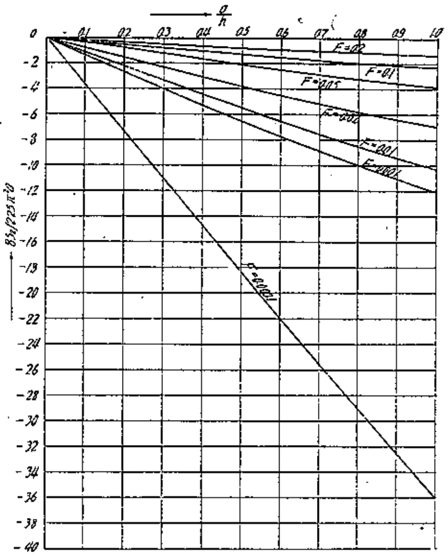
F	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	−0.001	−0.0001
$a/h=0.10$	−0.18	−0.29	−0.34	−0.79	− 1.13	− 1.34	− 3.73
$=0.50$	−0.84	−1.35	−2.15	−3.84	− 5.53	− 6.52	−18.41
$=0.75$	−1.17	−1.89	−3.07	−5.56	− 8.07	− 9.47	−27.32
$=1.00$	−1.39	−2.31	−3.81	−6.96	−10.36	−12.08	−35.90

第二十二圖　補正値（正方形基礎）

(a)



(b)



上記の補正値と半徑 a なる圓形載荷面の場合の夫れとを比較すれば，次の **第二十五表**の如し。

第二十五表　正方形と圓形の補正値の比較

F	100		10		1		0.2	
	圓形載荷面	正方形載荷面	圓形載荷面	正方形載荷面	圓形載荷面	正方形載荷面	圓形載荷面	正方形載荷面
$a/h=0.1$	0.06	0.07	0.05	0.06	−0.01	−0.02	−0.16	−0.18
$=0.5$	0.29	0.32	0.24	0.27	−0.05	−0.05	−0.76	−0.84
$=1.0$	0.52	0.58	0.45	0.40	−0.01	−0.02	−1.30	−1.39

F	0.05		0.01		0.001	
	圓 形 載荷面	正方形 載荷面	圓 形 載荷面	正方形 載荷面	圓 形 載荷面	正方形 載荷面
$a/h=0.1$	−0.40	−0.34	−1.00	− 1.13	− 1.18	− 1.34
$=0.5$	−1.92	−2.15	−4.89	− 5.53	− 5.67	− 6.52
$=1.0$	−3.49	−3.81	−9.30	−10.36	−10.89	−12.08

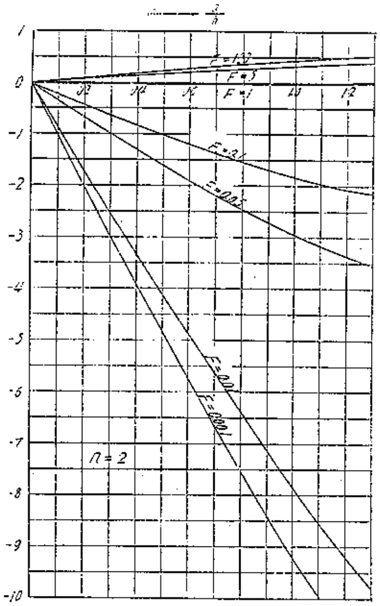
第二十五表に示すが如く正方形載荷面の補正値は夫れと等長の直徑を有する圓形載荷面のそれと著しき差異なければ前者の場合に後者の値を用ひて大差なし。

ii) 矩形の場合

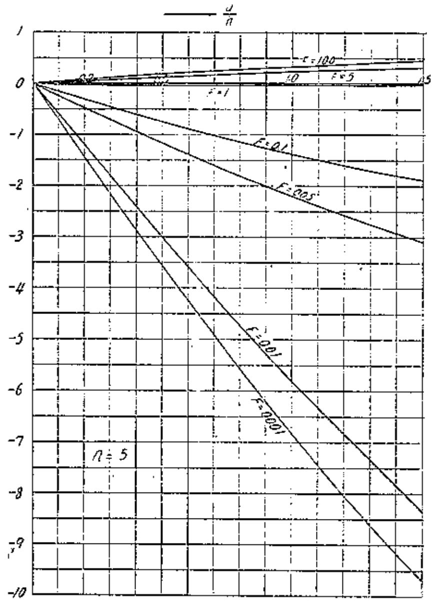
第三節と同じく $b=\frac{1}{2}a$, $b=\frac{1}{5}a$ の場合に就て計算せり, $b=\frac{1}{2}a$ に對する補正値は**第二十六表**及び**第二十三圖**に示さる。

$$W=1.53\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\left\{1-\frac{8}{1.53\pi^2}\frac{1}{a}S_2\right\}$$

第二十三圖 補正値(矩形基礎)



第二十四圖 補正値(矩形基礎)



第二十六表 補正値 $8S_2/1.53\pi^2a$ の値 ($a=2b$)

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00	1.25
$F=100$	0.05	0.24	0.35	0.44	0.52
$=5$	0.03	0.17	0.27	0.33	0.40
$=1$	−0.01	−0.05	−0.05	−0.02	0.02

a/h	0.10	0.50	0.75	1.00	1.25
$F=0.100$	−0.21	−1.01	−1.45	−1.81	− 2.10
$=0.050$	−0.33	−1.60	−2.32	−2.95	− 3.45
$=0.010$	−0.83	−4.08	−6.01	−7.82	− 9.47
$=0.001$	−0.98	−4.82	−7.08	−9.17	−11.05

$b=\frac{1}{5}a$ に對する補正値は**第二十七表**及び**第二十四圖**に示す如し。

$$W=0.83\frac{1-\sigma^2}{E}p_0a\left\{1-\frac{8}{0.83\pi^2}\frac{1}{a}S_2\right\}$$

第二十七表　補正値 $8S_2/0.83\pi^2a$ の値 $(a=5b)$

a/h	0.20	0.50	1.00	1.50
$F=100$	0.07	0.18	0.33	0.46
$=\ 5$	0.05	0.12	0.24	0.34
$=\ 1$	−0.02	−0.04	−0.03	−0.01
$=\ 0.1$	−0.31	−0.75	−1.38	−1.88
$=\ 0.05$	−0.49	−1.19	−2.23	−3.09
$=\ 0.01$	−1.22	−3.02	−5.83	−8.35
$=\ 0.001$	−1.45	−3.57	−6.85	−9.69

iii) 矩形の場合の補正値の比較

補正値が兩邊の比によりて生ずる影響を知らんが爲，矩形と同面積の正方形の補正値とを比較するに，

第二十八表　正方形と矩形の補正値の比較 $(a=2b)$

a/h		0.10	0.50	0.75	1.00	1.25
$F=100$	矩形	0.05	0.24	0.35	0.44	0.52
	正方形	0.05	0.23	0.32	0.44	0.53
$=\ 5.000$	〃	0.03	0.17	0.27	0.33	0.40
	〃	0.03	0.16	0.22	0.32	0.39
$=\ 1.000$	〃	−0.01	−0.05	−0.05	−0.02	0.02
	〃	−0.01	−0.05	−0.05	−0.05	− 0.04
$=\ 0.100$	〃	−0.21	−1.01	−1.45	−1.81	− 2.10
	〃	−0.20	−0.95	−1.30	−1.80	− 2.10
$=\ 0.050$	〃	−0.33	−1.60	−2.32	−2.95	− 3.45
	〃	−0.23	−1.50	−2.12	−2.95	− 3.50
$=\ 0.010$	〃	−0.83	−4.08	−6.01	−7.82	− 9.47
	〃	−0.80	−3.90	−5.50	−7.70	− 9.30
$=\ 0.001$	〃	−0.98	−4.82	−7.08	−9.17	−11.05
	〃	−0.92	−4.60	−6.50	−9.00	−10.90

第二十九表　正方形と矩形の補正値の比較 ($a=5b$)

a/h		0.20	0.50	1.00	1.50
$F=100$	矩　形	0.07	0.18	0.33	0.46
	正方形	0.07	0.15	0.29	0.41
$=5.000$	〃	0.05	0.12	0.24	0.34
	〃	0.05	0.10	0.20	0.30
$=1.000$	〃	−0.02	−0.04	−0.03	−0.01
	〃	−0.01	−0.02	−0.05	−0.05
$=0.100$	〃	−0.31	−0.75	−1.38	−1.88
	〃	−0.30	−0.60	−1.20	−1.70
$=0.050$	〃	−0.49	−1.19	−2.23	−3.09
	〃	−0.35	−0.90	−1.90	−2.80
$=0.010$	〃	−1.22	−3.02	−5.83	−8.35
	〃	−1.00	−2.50	−5.00	−7.20
$=0.001$	〃	−1.45	−3.57	−6.85	−9.69
	〃	−1.20	−3.00	−6.00	−8.50

上記の表より正方形の補正値を矩形に代用する際生ずる誤差を推定し得べし。

第三節及び第四節の結果より弾性基礎地盤に對しては，

(1)　矩形基礎に作用する一様なる垂直荷重による沈下量は地中に存在する硬又は軟地層により著しく影響さる。

(2)　その影響を表はす補正値は $a/h, \sigma$ 又は F, 兩邊の比の函數にて示され，本質的には圓形載荷面の場合と同様にして，數量に於て多少の差異あるも，普通實用上省略し得る程度なるを以て，兩邊の比餘り大ならざる矩形に對し圓形の補正値を用ふるも大なる誤差無し。

第五節　二三の荷重分布に依る基礎の沈下

第二節に於て矩形載荷面に一様に分布する垂直荷重による沈下量を計算せしが，本節にては屢々實際に起る荷重分布の二三に就き沈下量を計算せり。

(1)　中空の矩形載荷面に一様なる垂直荷重の作用する場合（**第二十五圖**參照）

$p(x,y)$ は次式に示され，

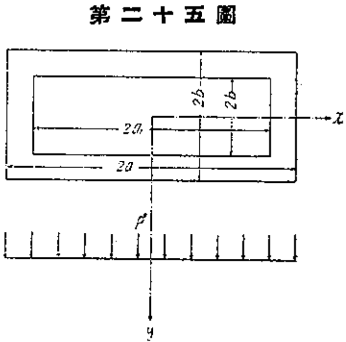
$$p(x,y)=0 \qquad (|x|<a_1 \quad |y|<b_1)$$
$$p(x,y)=-p_0 \qquad (a_1\leqq|x|\leqq a, \quad b_1\leqq|y|\leqq b)$$
$$p(x,y)=0 \qquad (|x|>a, \quad |y|>b)$$

定數 A_1 は (72) 式より

$$A_1=-\frac{8(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E\pi^2}p_0\left[\frac{\sin\alpha a\sin\beta b-\sin\alpha a_1\sin\beta b_1}{\alpha\beta}\right] \qquad \text{.................(110)}$$

A_1 を知れば (70) 式より變位及び應力を求め得るも，基礎の沈下量のみを必要とする場合は

第二十五圖



$$(w)_{z=0}=\frac{8(1-\sigma^2)}{E\pi^2}p_0\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b-\sin\alpha a_1\sin\beta b_1}{\alpha\beta}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\ ..(111)$$

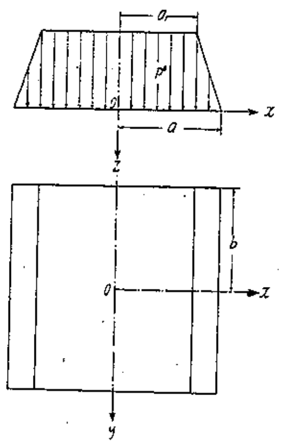
の式によるか又は $(x=0,y=0)$, $(x=a_1,y=0)$, $(x=a,y=0)$, $(x=0,\ y=b_1)$ 及び $(x=0,y=b)$ に於ける沈下量を夫々 W_1, W_2, W_3, W_4 及び W_5 にて表はし，次の諸式に依つて求むる。

$$\left.\begin{aligned}
W_0&=\frac{2}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0\{F(a,b)-F(a_1,b_1)\}\\
W_1&=\frac{1}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0\{F(a+a_1,b)+F(a-a_1,b)-F(2a_1,b_1)\}\\
W_2&=\frac{1}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0\{F(2a,b)-F(a+a_1,b_1)+F(a-a_1,b_1)\}\\
W_3&=\frac{1}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0\{F(a,b+b_1)+F_1(a,b-b_1)-F(a,2b_1)\}\\
W_4&=\frac{1}{\pi}\frac{1-\sigma^2}{E}p_0\{F(a,2b)-F(a_1,b+b_1)+F(a_1,b-b_1)\}
\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(112)$$

但し $F(a,b)=b\log\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}-a}+a\log\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}$

(2)　梯形狀分布の荷重による沈下量（第二十六圖參照）

第 二 十 六 圖



$p(x,y)$ は次式に示され，

$$\begin{aligned}
p(x,y)&=-p_0 && (|x|\leqq a_1,\quad |y|\leqq b)\\
&=-p_0\frac{a-x}{a-a_1} && (a_1<x<a,\quad |y|\leqq b)\\
&=0 && (|x|>a\ \text{又は}\ |y|>b)
\end{aligned}$$

A_1 は (72) 式より求め，

$$A_1=\frac{8(1+\sigma)(1-2\sigma)}{\pi^2E}p_0\frac{1}{a-a_1}\frac{(\cos\alpha a-\cos\alpha a_1)}{\alpha^2\beta}\sin\beta b\ \ldots.(114)$$

從つて基礎の沈下は次式にて示さる。

$$(w)_{z=0}=\frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2E}\frac{p_0}{a-a_1}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{(\cos\alpha a_1-\cos\alpha a)\sin\beta b}{\alpha^2\beta}$$
$$\times\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\ \cdots\cdots\cdots\cdots(115)$$

然るに

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\frac{(\cos\alpha a_1-\cos\alpha a)\sin\beta b}{\alpha^2\beta}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta$$

$$I_1=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\gamma}\frac{\sin\alpha a\sin\beta b}{\alpha\beta}\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta$$

と置けば，

$$I=\int_{a_1}^{a}f(a,b)\,da\qquad\text{但し}\ I_1=f(a,b)$$

となり，$f(a,b)$ は既に求めし處にして，積分は

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a} F(a,b)\,da = H(a,b) - H(a_1,b)\\ &\text{但し}\quad H(a,b) = ab\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}-a} - b\sqrt{a^2+b^2} + a^2\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(116)$$

而して $f(a,b)$ は (77) 式に示す如く $F(a,b)$ の和より成る函數たれば，一般に I は (116) 式にて示さる，基礎中心の時には (117) 式を以て表し得る。

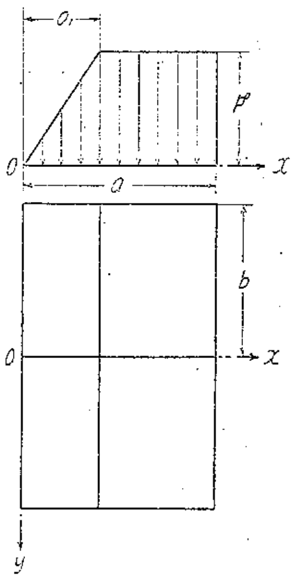
$$W = \frac{8(1-\sigma^2)}{\pi^2 E}\frac{p_0}{a-a_1}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\gamma}\frac{(\cos\alpha a_1 - \cos\alpha a)}{\alpha^2\beta}\sin\beta b\,d\alpha\,d\beta$$

又は

$$W = \frac{2(1-\sigma^2)}{\pi^2 E}\frac{p_0}{a-a_1}\{H(a,b) - H(a_1,b)\}\cdots\cdots\cdots\cdots(117)$$

$a_1=0$ とすれば三角形荷重分布の沈下を得る。

第二十七圖



(3)　一邊が垂直なる梯形荷重の作用する場合又は橋臺の背面に盛土をする場合等にありては**第二十七圖**に示す如き荷重の作用する事屢々にして盛土による橋臺等の沈下並に傾斜は次の計算にて求め得べし。

(62) 式及び (63) 式に示す解に夫々 u_1, v_1 及び $u_2, v_2, \cdots\cdots$ とし解として次の形を用ふれば，

$$\left.\begin{aligned}&w = w_1 + w_2\\ &\widehat{zz} = \widehat{zz}_1 + \widehat{zz}_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\text{等}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(118)$$

(118) 式は $z=0$ にて $\widehat{zx}=0,\ \widehat{zy}=0$ にして垂直荷重のみ作用する場合を示す。$p(x,y)$ は次式に依つて現はさる。

$$\left.\begin{aligned}p(x,y) &= 0 && (x<0,\ x>a\ \text{及び}\ |y|>b)\\ &= -\frac{p_0}{a_1}x && (0\leqq x\leqq a_1,\quad |y|\leqq b)\\ &= -p_0 && (a_1\leqq x\leqq a,\quad |y|\leqq b)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(118)$$

A_1, A_2 を求むれば

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= \frac{4(1-2\sigma)(1+\sigma)}{\pi^2 E}p_0\frac{\sin\beta b}{\beta}\left\{\frac{1}{a_1}\frac{1-\cos\alpha a_1}{\alpha^2} - \frac{\sin\alpha a}{\alpha}\right\}\\ A_2 &= \frac{4(1-2\sigma)(1+\sigma)}{\pi^2 E}p_0\frac{\sin\beta b}{\beta}\left\{\frac{\cos\alpha a}{\alpha} - \frac{1}{a_1}\frac{\sin\alpha a_1}{\alpha^2}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(119)$$

從つて基礎の沈下は次式に依つて示され，

$$(w)_{z=0} = -\frac{4(1-\sigma^2)}{\pi^2 E}\frac{p_0}{a_1}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\{(1-\cos\alpha a_1) - a_1\alpha\sin\alpha a\}\cos\alpha x + \{a_1\alpha\cos\alpha a - \sin\alpha a_1\}\sin\alpha x}{\alpha^2\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\times\sin\beta b\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\cdots\cdots\cdots\cdots(120)$$

$y=0$ に於ける沈下量は (120) 式に $y=0$ と置きて得る。

$$(w)_{\substack{z=0\\y=0}}=-\frac{4(1-\sigma^2)}{\pi^2E}\frac{p_0}{a_1}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\{\cos\alpha x-\cos\alpha(x-a)+a_1\alpha\sin\alpha(a-x)\}}{\alpha^2\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\beta b d\alpha d\beta$$

又は

$$(w)_{\substack{z=0\\y=0}}=\frac{(1-\sigma^2)}{\pi E}\frac{p_0}{a_1}\{a_1F(x-a,b)+H(x,b)-H(x-a,b)\}\quad\cdots\cdots(121)$$

にして，F 並に H は (78) 式及び (116) 式に示す函數なり。b_1 を以て橋臺の底の幅とし，傾斜を i にて示す時，(121) 式により $x=a$, $x=a+b_1$ なる點の沈下は次の (122) 式に求めらるべく，

$$\left.\begin{aligned}(W)_{x=a}&=\frac{1-\sigma^2}{\pi E}\frac{p_0}{a_1}H(a,b)\\(W)_{x=b_1+a}&=\frac{1-\sigma^2}{\pi E}\frac{p_0}{a_1}\{a_1F(b_1,b)+H(a+b_1,b)-H(b_1,b)\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(122)$$

從つて i は (123) 式に示さる。

$$i=\frac{1-\sigma^2}{\pi E}\frac{p_0}{a_1b_1}[H(a,b)-H(a+b_1,b)+H(b_1,b)-a_1F(b_1,b)]\quad\cdots\cdots(123)$$

附　　錄

$$I=\int\frac{\sin(\alpha\cos\theta)\sin(\beta\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}d\theta \text{ の値の計算}$$

I なる積分を級數の形にて求めん。

(1)　$\sin(\alpha\cos\theta)\sin(\beta\sin\theta)$ は次の (1) 式の如く展開し得べく，此の級數は cosine 級數の差なれば絶對收斂なれど，計算の都合上剰餘の形にて示せり。

$$2\sin(\alpha\cos\theta)\sin(\beta\sin\theta)=\{\cos(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)-\cos(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)\}$$

$$=\frac{1}{2!}(a_1-b_1)-\frac{1}{4!}(a_1^2-b_1^2)+\ldots+(-)^n\frac{1}{(2n)!}\left\{a_1^n\cos^{(2n)}\mu\sqrt{a_1}-b_1^n\cos^{(2n)}\mu\sqrt{b_1}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{但し}\quad a_1=(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)^2,\qquad b_1=(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)^2\\&\text{及び}\quad \cos^{2n}\mu\sqrt{a_1}=\frac{d^{2n}}{da_1^{2n}}(\cos\mu\sqrt{a_1})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

(1) 式の一般項は $(a_1^m-b_1^m)/(2m)!$ にて示さるべく，$(a_1^m-b_1^m)$ は (3) 式の如く書き改められ，

$$a_1^m-b_1^m=(a_1-b_1)S_{m-1}\quad\cdots\cdots(3)$$

但し　$S_m=a_1^m+a_1^{m-1}b_1+a_1^{m-2}b_1^2+\ldots+a_1^2b_1^{m-2}+a_1b_1^{m-1}+b_1^m$

S_m の間には (4) なる關係あり，S_0, S_1 の値より一般の S_m の値は容易に計算し得る。

$$S_m=(a_1+b_1)S_{m-1}-a_1b_1S_{m-2}\quad\cdots\cdots(4)$$

(4) 式なる關係式を數學的歸納法 (mathematical induction) により證明すれば, S_0, S_1, S_2 の値は (5) 式に示され,

$$\left.\begin{aligned} S_0&=1\\ S_1&=a_1+b_1\\ S_2&=a_1^2+a_1b_1+b_1^2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

S_2, S_1, S_0 の間には (4) なる關係の成立するを知る。任意の n に對し (4) 式が成立すれば

$$S_n=(a_1+b_1)S_{n-1}-a_1b_1S_{n-2}$$

なるべく,

$$(a_1+b_1)S_n-a_1b_1S_{n-1}=S_{n+1}+b_1^2(S_{n-1}-a_1S_{n-2}-b_1^{n-1})=S_{n+1}$$

にして, $(n+1)$ に對しても (4) 式なる關係成立す, 卽ち關係式の成り立つを知る。

(3) 式により (1) 式の級數は次の如く S_m の項にて示され,

$$\sin(\alpha\cos\theta)\sin(\beta\sin\theta)=2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta\left[\frac{1}{2!}S_0-\frac{1}{4!}S_1-\frac{1}{6!}S_2-\cdots\cdots+(-)^nR_n\right]$$

但し $$R_n=\frac{1}{(2n)!}\frac{a_1^n\cos^{(2n)}\mu\sqrt{a_1}-b_1^n\cos^{(2n)}\mu\sqrt{b_1}}{2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta}\qquad(0<\mu<1)\cdots\cdots(6)$$

又被積分値は

$$\frac{\sin(\alpha\cos\theta)\sin(\beta\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=2\alpha\beta\left[\frac{1}{2!}S_0-\frac{1}{4!}S_1+\frac{1}{6!}S_2\cdots+(-)^nR_n\right]\cdots\cdots(7)$$

にて示さるべし。

(2) (7) 式の級數の剩餘は R_n なるを以て, $\alpha\geqq\beta$ と假定すれば $a_1\leqq\alpha^2$, $b_1\leqq\alpha^2$ なるは明かにして, 從つて R_n に對し次の不等式が成立す。

$$|R_n|\leqq\frac{1}{\beta^2\sin 2\theta}\frac{2\alpha^{2n}}{(2n)!}\cdots\cdots(8)$$

2θ が π の整數倍ならざる場合には, α が有限なれば,

$$\lim_{n\to\infty}|R_n|=0$$

にして, (7) 式の級數は收斂する。

2θ が π の整數倍なる時は, R_n は不定形となり, $\theta=0,\frac{\pi}{2}$ の場合のみを計算すれば可なり。今

$$f(\theta)=a_1^n\cos^{2n}\mu\sqrt{a_1}-b_1^n\cos^{2n}\mu\sqrt{b_1}\cdots\cdots(9)$$

と置けば,

$$\frac{df(\theta)}{d\theta}=na_1^{n-1}\frac{da_1}{d\theta}\cos^{2n}\mu\sqrt{a_1}-nb_1^{n-1}\frac{db_1}{d\theta}\cos^{2n}\mu\sqrt{b_1}+\mu a_1^n\cos^{2n+1}\mu\sqrt{a_1}\frac{d\sqrt{a_1}}{d\theta}$$

$$-\mu b_1{}^n \cos^{2n+1}\mu\sqrt{b_1}\frac{d\sqrt{b_1}}{b\theta}$$

にして，

$$\left[\frac{df(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=0}=2n\alpha^{2n-1}\beta\cos^{2n}\mu\alpha+\mu\alpha^{2n}\beta\cos^{2n+1}\mu\alpha-2n\alpha\beta^{2n-1}\cos^{2n}\mu\alpha+\mu\beta^{2n}\beta\cos^{2n+1}\mu\alpha$$

$$\left[\frac{df(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-2n\alpha^{2n-1}\beta\cos^{2n}\mu\beta-\mu\alpha^{2n+1}\cos^{2n+1}\mu\beta-2n\alpha\beta^{2n-1}\cos^{2n}\mu\beta+\mu\beta^{2n}\alpha\cos^{2n+1}\mu\alpha$$

従つて $n>\alpha$ なる場合には，

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}|R_n|&\leqq\frac{2n\alpha^{2n-2}+2\alpha^{2n-1}}{(2n)!}<\frac{4n\alpha^{2n-2}}{(2n)!}\\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}|R_n|&\leqq\frac{2n\alpha^{2n-2}+2\alpha^{2n-1}}{(2n)!}<\frac{4n\alpha^{2n-2}}{(2n)!}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

にして，(10) 式より R_n は $\theta=0, \frac{\pi}{2}$ に於ても n が無限大となると共に限りなく小となり，(7) 式にて示す級數は絶對收斂なるを知る。

(3)　S_m の計算

(i)　$\alpha=\beta$ なる場合

$$\left.\begin{aligned}&S_0=1 \qquad\qquad S_1=2\alpha^2\\ &S_2=\alpha^4(3+4\sin^2\theta-4\sin^4\theta) \qquad S_3=\alpha^6(4+16\sin^2\theta-16\sin^4\theta)\\ &S_4=\alpha^8(5+40\sin^2\theta-24\sin^4\theta-32\sin^6\theta+16\sin^8\theta)\\ &S_5=\alpha^{10}(6+80\sin^2\theta+16\sin^4\theta-192\sin^6\theta+96\sin^8\theta)\\ &S_6=\alpha^{12}(7+140\sin^2\theta+196\sin^4\theta-608\sin^6\theta+144\sin^8\theta+192\sin^{10}\theta-64\sin^{12}\theta)\\ &S_7=\alpha^{14}(8+224\sin^2\theta+672\sin^4\theta-1\,280\sin^6\theta-640\sin^8\theta+1\,536\sin^{10}\theta-512\sin^{12}\theta)\\ &S_8=\alpha^{16}(9+336\sin^2\theta+1\,680\sin^4\theta-1\,728\sin^6\theta-4\,640\sin^8\theta\\ &\qquad+5\,888\sin^{10}\theta-768\sin^{12}\theta-1\,024\sin^{14}\theta+256\sin^{16}\theta)\\ &S_9=\alpha^{18}(10+480\sin^2\theta+3\,552\sin^4\theta-384\sin^6\theta-16\,448\sin^8\theta\\ &\qquad+12\,800\sin^{10}\theta+7\,680\sin^{12}\theta-10\,240\sin^{14}\theta+2\,560\sin^{16}\theta)\\ &S_{10}=\alpha^{20}(11+660\sin^2\theta+6\,732\sin^4\theta+6\,336\sin^6\theta-41\,888\sin^8\theta+8\,064\sin^{10}\theta\\ &\qquad+58\,240\sin^{12}\theta-46\,080\sin^{14}\theta+3\,840\sin^{16}\theta+5\,120\sin^{18}\theta-1\,024\sin^{20}\theta)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

(ii)　$\alpha\neq\beta$ なる場合

$a=(\alpha^2-\beta^2)/\alpha^2$,　$b=(\alpha^2+\beta^2)/\alpha^2$ と置けば S_m は次式に求められる。

$$\begin{aligned}&S_0=1 \qquad\qquad S_1=\alpha^2(2-2a\sin^2\theta)\\ &S_2=\alpha^4\{3-(8a-2b)\sin^2\theta+(4a^2-b^2)\sin^4\theta\}\\ &S_3=\alpha^6\{4-(20a-8b)\sin^2\theta+(24a^2-8ab-4b^2)\sin^4\theta-(8a^3-4ab^2)\sin^6\theta\}\\ &S_4=\alpha^8\{5-(40a-20b)\sin^2\theta+(84a^2-48ab-6b^2)\sin^4\theta-(64a^3-24a^2b-24ab^2+4b^3)\\ &\qquad\times\sin^6\theta+(16a^4-12a^2b^2+b^4)\sin^8\theta\}\\ &S_5=\alpha^{10}\{6-(70a-40b)\sin^2\theta+(224a^2-168ab+4b^2)\sin^4\theta-(288a^3-192a^2b-60ab^2\\ &\qquad+24b^3)\sin^6\theta+(160a^4-64a^3b-96a^2b^2+24ab^3+6b^4)\sin^8\theta-(32a^5-32a^3b^2\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad +6ab^4)\sin^{10}\theta\}\\
&S_6=\alpha^{12}\{7-(112a-70b)\sin^2\theta+(504a^2-488ab+49b^2)\sin^4\theta-(960a^3-864a^2b-32ab^2\\
&\quad +76b^3)\sin^6\theta+(880a^4-640a^3b-336a^2b^2+192ab^3+9b^4)\sin^8\theta-(384a^5\\
&\quad -160a^4b-320a^3b^2+96a^2b^3+48ab^2-6b^5)\sin^{10}\theta+(64a^6-80a^4b^2\\
&\quad +24a^2b^4-b^6)\sin^{12}\theta\}\\
&S_7=\alpha^{14}\{8-(168a-112b)\sin^2\theta+(1\,008a^2-1\,008ab+168b^2)\sin^4\theta-(264a^3-2\,880a^2b\\
&\quad +360ab^2+160b^3)\sin^6\theta+(3\,520a^4-3\,520a^3b-480a^2b^2+800ab^3-40b^4)\\
&\quad \times\sin^8\theta-(2\,496a^5-1\,920a^4b-1\,440a^3b^2+960a^2b^3+120ab^4-48b^5)\sin^{10}\theta\\
&\quad +(896a^6-384a^5b-960a^4b^2+320a^3b^3+240a^2b^4-480ab^5-8b^6)\sin^{12}\theta\\
&\quad -(128a^7-192a^5b^2+80a^3b^4-8ab^6)\sin^{14}\theta\\
&S_8=\alpha^{16}\{9-(240a-168b)\sin^2\theta+(1\,848a^2-2\,016ab+420b^2)\sin^4\theta-(6\,336a^3-7\,920a^2b\\
&\quad +1\,872ab^2+216b^3)\sin^6\theta+(11\,440a^4-14\,080a^3b+1\,320a^2b^2+2\,240ab^3\\
&\quad -290b^4)\sin^8\theta-(11\,648a^5-12\,480a^4b-3\,200a^3b^2+4\,960a^2b^3-240ab^4\\
&\quad -184b^5)\sin^{10}\theta+(6\,720a^6-5\,376a^5b-5\,280a^4b^2+3\,840a^3b^3+840a^2b^4-480ab^5\\
&\quad -12b^6)\sin^{12}\theta-(2\,048a^7-896a^6b-2\,688a^5b^2+960a^4b^3+960a^3b^4-240a^2b^5\\
&\quad -80ab^6+8b^7)\sin^{14}\theta+(256a^8-448a^6b^2+240a^4b^4-40a^2b^6+b^8)\sin^{16}\theta\}
\end{aligned}\right\}\quad(12)
$$

(12) 式の特別の場合とし，$\alpha=2\beta$, $\alpha=5\beta$ の値は次の (13) 式及び (14) 式に示さる。

(a) $\alpha=2\beta$ の場合

$$
\left.\begin{aligned}
&S_0=1 \qquad S_1=\alpha^2(2-1.5\sin^2\theta)\\
&S_2=\alpha^4(3-4.5\sin^2\theta+1.25\sin^4\theta) \qquad S_3=\alpha^6(4-5\sin^2\theta-0.25\sin^4\theta-0.56\sin^6\theta)\\
&S_4=\alpha^8(5-5\sin^2\theta-7.12\sin^4\theta+10.87\sin^6\theta-3.04\sin^8\theta)\\
&S_5=\alpha^{10}(6-2.5\sin^2\theta-25.25\sin^4\theta+37.54\sin^6\theta-17.68\sin^8\theta+2.51\sin^{10}\theta)\\
&S_6=\alpha^{12}(7+3.5\sin^2\theta-56\sin^4\theta+92\sin^6\theta-51.2\sin^8\theta+8\sin^{10}\theta+\sin^{12}\theta)\\
&S_7=\alpha^{14}(8+21.5\sin^2\theta-115.5\sin^4\theta+208.7\sin^6\theta-90.5\sin^8\theta-24.9\sin^{10}\theta\\
&\qquad +34.5\sin^{12}\theta-5\sin^{14}\theta)\\
&S_8=\alpha^{16}(9+30\sin^2\theta-194.2\sin^4\theta+261.4\sin^6\theta-72\sin^8\theta-204.6\sin^{10}\theta+164\sin^{12}\theta\\
&\qquad +62.3\sin^{14}\theta+6.6\sin^{16}\theta)
\end{aligned}\right\}\quad(13)
$$

(b) $\alpha=5\beta$ の場合

$$
\left.\begin{aligned}
&S_0=1 \qquad S_1=\alpha^2(2-1.92\sin^2\theta)\\
&S_2=\alpha^4(3-5.6\sin^2\theta+2.61\sin^4\theta) \qquad S_3=\alpha^6(4-10.9\sin^2\theta+8.8\sin^4\theta-2.9\sin^6\theta)\\
&S_4=\alpha^8(5-17.6\sin^2\theta+23\sin^4\theta-13.2\sin^6\theta+2.8\sin^8\theta)\\
&S_5=\alpha^{10}(6-25.6\sin^2\theta+43.04\sin^4\theta-35.5\sin^6\theta+14.3\sin^8\theta-2.21\sin^{10}\theta)\\
&S_6=\alpha^{12}(7-34.7\sin^2\theta+70.2\sin^4\theta-73.5\sin^6\theta+41.6\sin^8\theta-11.7\sin^{10}\theta+1.2\sin^{12}\theta\\
&S_7=\alpha^{14}(8-44.8\sin^2\theta+104.3\sin^4\theta-129.1\sin^6\theta+89.5\sin^8\theta-32.8\sin^{10}\theta\\
&\qquad +4.9\sin^{12}\theta-0.04\sin^{14}\theta)\\
&S_8=\alpha^{16}(9-55.7\sin^2\theta+144.6\sin^4\theta-201.4\sin^6\theta+156.6\sin^8\theta-60.1\sin^{10}\theta\\
&\qquad +2.4\sin^{12}\theta+41.1\sin^{14}\theta-1.4\sin^{16}\theta)
\end{aligned}\right\}\quad(14)
$$

(4) 被積分値は絶對收斂級數に展開し得べく，從つて I は各項別積分により次の如く書き改められ，

$$I=2\alpha\beta\Big[\frac{1}{2!}\int S_0 d\theta-\frac{1}{4!}\int S_1 d\theta+\frac{1}{6!}\int S_2 d\theta+\ldots\Big] \quad\ldots\ldots(15)$$

剰餘を R_n' とすれば,

$$|R_n'|=\int|R_n|d\theta \quad\ldots\ldots(16)$$

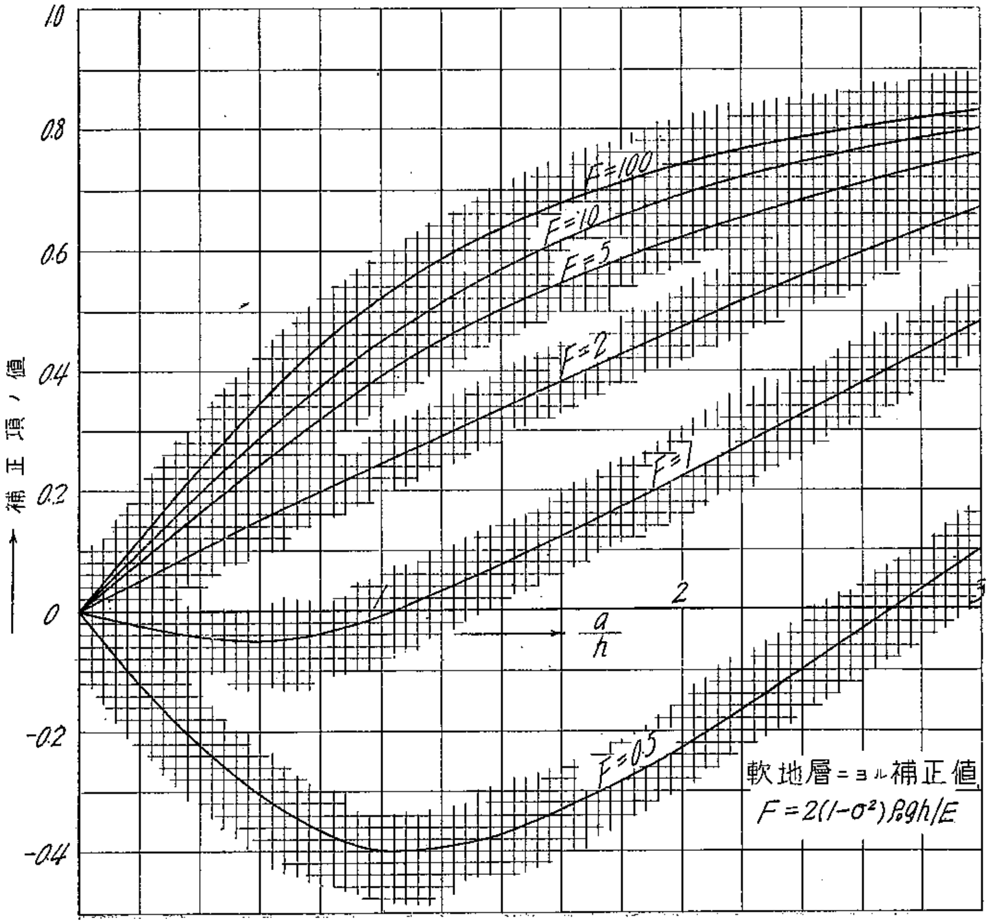
然るに (8) 式及び (10) 式より $|R_n|\leqq C\dfrac{\alpha^{2n-2}}{(2n-2)!}$ (但し C は常數)なるを以て $|R_n'|\leqq C\dfrac{\alpha^{2n-2}}{(2n-2)!}\int d\theta$, 從つて $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n'|=0$ なる關係を得べく, (15) 式にて示す級數の絶對收斂なるを知る。

（完）

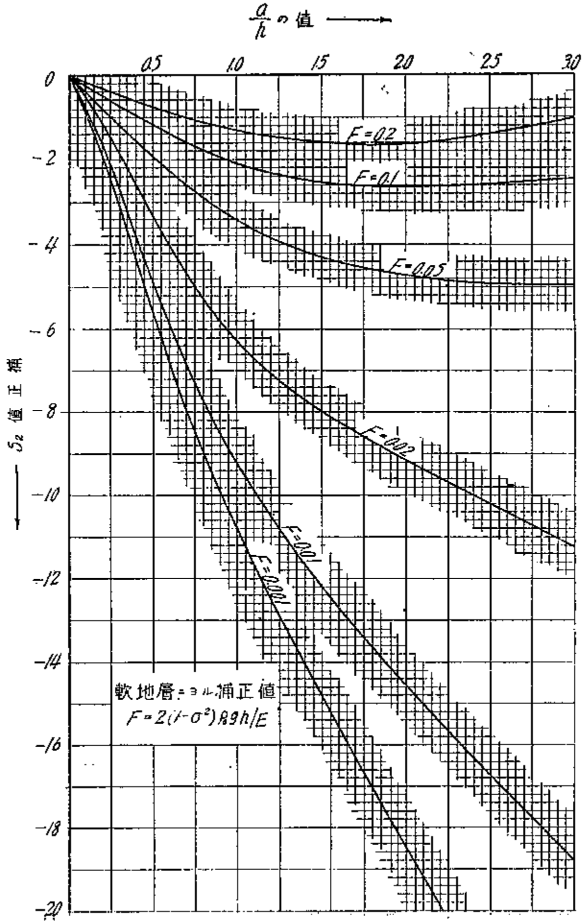
(土木學會誌第十七卷第九號附圖)

附圖第一

(a)



(b)



附圖第二　補正値 S_2 の比較