

## 論 說 報 告

土木學會誌 第十七卷第五號 昭和六年五月

部分的分布荷重を受くる矩形平版の  
彎曲並に彎曲應力に就て

會員 工學士 井 口 鹿 象

On Bending and Bending Stresses of a Rectangular  
Plate subjected to any Partially Distributed Load.

By Shikazo Iguchi, C. E., Member.

## 内 容 梗 概

本論は著者が本誌第十六卷第十號に發表せる“二軸の方向に於ける彎曲剛率不  
等なる矩形平版の一解法”の補遺にして、先づ四邊に於て單純に支承せらるゝ isotropic  
rectangular plate が其の任意の位置に於て部分的等布荷重を受くる Navier 氏の公式  
を論究し、其の彎曲力率と平版の彎曲力率とを比較し、集中荷重を受くる矩形平版に  
對する應用の方法を述べ、且つ著者が前論に於て誘導せる各公式は荷重を表はす函數が  
Fourier の級數に展開し得る以上は、其の分布面積が平版の全面なると一部分なるとを  
問はず、最も一般的に適用し得るものなることを明かにせるものなり。

## 目 次

1. 部分的等布荷重を受くる矩形平版に關する Navier 氏の公式 .....	1
2. Navier 氏公式の變形 .....	3
3. 彈性基礎に接する平版及び桁 .....	7
4. 彎曲力率 .....	9
5. 平版の彎曲力率並に之れと矩形平版の彎曲力率との比較 .....	12
6. 集中荷重を受くる矩形平版 .....	15
7. 著者の公式の一般性 .....	16

## 1. 部分的等布荷重を受くる矩形平版に關する Navier 氏の公式

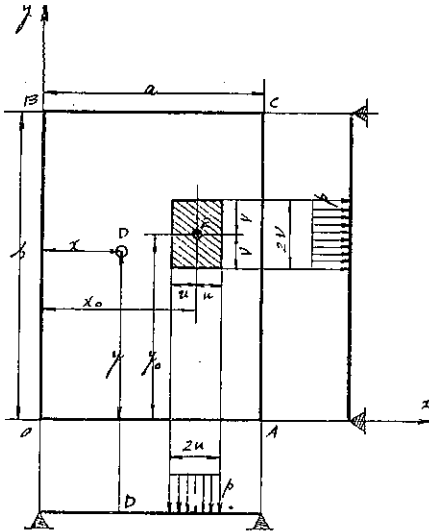
Navier 氏は、凡ての點に於ける彎曲剛率 (flexural rigidity) 不變なる矩形平版が、第一  
圖に示す如く其の各邊に於て單純に支承せられ、矩形の四邊に並行なる小矩形  $4uv$  内に一  
様に分布せらるゝ荷重  $p$  を受くるとき、任意の點  $D(x, y)$  に於ける撓度 (deflection)  $\zeta$  を  
次の如き Fourier の複式無限級數を以て表はせり。\*

\* A. Nádai: Elastische Platten, S. 114-119. 參照

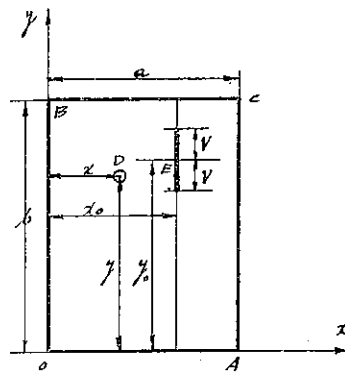
$$\begin{aligned}
 p &= p \sum_m \sum_n R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 \zeta &= \frac{pa^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{m^2 n^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 \text{但し} \quad R_{mn} &= \frac{16}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v \dots\dots\dots (1) \\
 \rho_{mn} &= \left( m^2 + \frac{\alpha n^2}{\pi^2} \right)^2, \quad \alpha_n = \frac{a}{b} n\pi \\
 N &= \text{平板の彎曲剛率} \\
 m, n &= 1, 2, 3, 3, 4 \dots\dots\dots \infty
 \end{aligned}$$

上記第一式に示す荷重の展開式は、D 點が荷重の分布面積  $4uv$  内に在るときは  $p$ 、該面

第一圖



第二圖



積の外に在るときは零となり、第二式は平板の基本方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} &= \Delta \Delta \zeta \\
 &= \frac{p}{N} \quad (D \text{ 點が矩形 } 4uv \text{ の内に在るとき}) \\
 &= 0 \quad ( \quad \quad \quad \text{外に在るとき}) \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

を満足するものなることを證明し得べし。

斯の如く荷重の分布状態が非連続的なるにも拘らず、任意の點に於けると及び  $p$  が各々唯一つの式を以て表はさるゝは、Fourier 級数の興味ある一特性にして、此の種の問題解説上頗る便利なるものなり。

特に荷重が平板の全面に分布せらるゝときは

$$\frac{x_0}{a} = \frac{u}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{v}{b} = \frac{1}{2}$$

従て

$$\begin{aligned} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v &= \left( \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right)^2 \\ &= 0 \quad (m, n \text{ が偶数のとき}) \\ &= 1 \quad (m, n \text{ が奇数のとき}) \end{aligned}$$

なるを以て、 $\zeta$  の式は次の如くなるべし。

$$\zeta = \frac{16px^4}{N} \sum_{m, n=1, 3, 5, 7, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{m^2 n^2 \rho^{mn}} \dots\dots\dots (3)$$

是 Navier 氏の公式として最も廣く知らるゝものなり。

又  $4puv = P = \text{定數}$ , 従て  $p = \frac{P}{4uv}$  と置けば

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} u}{u} = \frac{m\pi}{a}, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\pi}{b} v}{v} = \frac{n\pi}{b}$$

なる關係に依り、第二圖の如く  $y$  軸に並行なる線荷重を受くる平版に對しては

$$\zeta = \frac{4Pa^3}{Nv} \sum_{m, n=1, 2, 3, 4, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v \sin \frac{n\pi}{b} y}{n^5 \rho^{mn}} \dots\dots\dots (4)$$

第三圖の如く集中荷重を受くる場合に對しては、

$$\zeta = \frac{4Pa^3}{Nb} \sum_{m, n=1, 2, 3, 4, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} y}{\pi^4 \rho^{mn}} \dots\dots\dots (5)$$

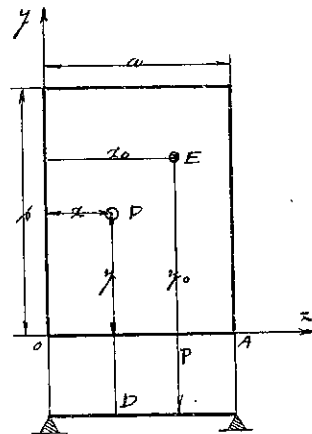
然れども、荷重が幾何學的の一點に集中するときは、該點に於て singularität を生じ、其の應力は無限大となるものなり。

### 2. Navier 氏公式の變形

著者が本誌第十六卷第十號に發表せる“二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる矩形平版の一解法”に於ける公式 (24) 及び (26) の各第五式に依り (以下單に前論公式(4)と稱す)、

$0 \leq \theta \leq 2$  のとき

第三圖



$$\left. \begin{aligned} \sum_m \frac{\sin m\pi\theta}{m\pi^5 \rho_{mn}} &= \frac{1}{4\alpha_n^4} \{ H_{n\theta} + 2(1-\theta) \} \\ \text{但し } H_{n\theta} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \{ -2 \text{Sinh } \alpha_n \text{Sinh } \alpha_n (1-\theta) \\ &\quad - \alpha_n \theta \text{Cosh } \alpha_n \text{Sinh } \alpha_n (1-\theta) + \alpha_n (1-\theta) \text{Sinh } \alpha_n \theta \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

此の式並に

$$\begin{aligned} &\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \sin \frac{m\pi}{a} x \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 - u + x) - \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 - u - x) - \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 + u + x) + \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 + u - x) \right\} \end{aligned}$$

なる関係を適用すれば、 $x$  の値の三つの限界に對し、Navier 氏の公式 (1) は運算の結果次の如く表はさるべし、

$$\left. \begin{aligned} &0 \leqq x \leqq x_0 - u \quad \text{のとき} \\ \xi &= \frac{pb^4}{N} \sum_{n=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{H_n(x_0' - u' + \xi) - H_n(x_0' - u' - \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) + H_n(x_0' + u' - \xi)}{n^5 \pi^5} Y_n \\ &x_0 - u \leqq x \leqq x_0 + u \quad \text{のとき} \\ \xi &= \frac{pb^4}{N} \sum_{n=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{H_n(x_0' - u' + \xi) + H_n(-x_0' + u' + \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) + H_n(x_0' + u' - \xi) + 4}{n^5 \pi^5} Y_n \\ &u + x_0 \leqq x \leqq a \quad \text{のとき} \\ \xi &= \frac{pb^4}{N} \sum_{n=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{H_n(x_0' - u' + \xi) + H_n(-x_0' + u' + \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) - H_n(-x_0' - u' + \xi)}{n^5 \pi^5} Y_n \\ \text{但し } &x_0' = \frac{x_0}{a}, \quad u' = \frac{u}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \\ &Y_n = \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} (7)$$

上式中各  $H_n$  は公式 (6) に示す  $H_{n\theta}$  の  $\theta$  の代りに夫々  $x_0' - u' + \xi$ ,  $x_0' - u' - \xi$ ... 等と置きたるものなり。

例へば (7) 式の第一の場合に對しては

$$\begin{aligned} &\{ H_n(x_0' - u' + \xi) - H_n(x_0' - u' - \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) + H_n(x_0' + u' - \xi) \} \text{Sinh}^2 \alpha_n \\ &= -2 \text{Sinh} \alpha_n \{ \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' + u' - \xi) - \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' + u' + \xi) - \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' - u' - \xi) \\ &\quad + \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' - u' + \xi) \} - \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n \{ (x_0' - u' + \xi) \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' + u' - \xi) \\ &\quad - (x_0' - u' - \xi) \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' + u' + \xi) - (x_0' + u' + \xi) \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' - u' - \xi) \\ &\quad + (x_0' + u' - \xi) \text{Sinh} \alpha_n (1 - x_0' - u' + \xi) \} + \alpha_n \{ (1 - x_0' + u' - \xi) \text{Sinh} \alpha_n (x_0' - u' + \xi) \\ &\quad - (1 - x_0' + u' + \xi) \text{Sinh} \alpha_n (x_0' - u' - \xi) - (1 - x_0' - u' - \xi) \text{Sinh} \alpha_n (x_0' + u' + \xi) \\ &\quad + (1 - x_0' - u' + \xi) \text{Sinh} \alpha_n (x_0' + u' - \xi) \} \end{aligned}$$

運算の結果上式右邊の内

$$\begin{aligned}
 \text{第一項} &= 8 \operatorname{Sinh} \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n u' \\
 \text{第二項} &= 4 \alpha_n \operatorname{Cosh} \alpha_n [-u' \operatorname{Cosh} \alpha_n u' \operatorname{Cosh} \alpha_n (1-x_0) \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \\
 &\quad + \{x_0' \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi - \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Cosh} \alpha_n \xi\} \operatorname{Sinh} \alpha_n u'] \\
 \text{第三項} &= 4 \alpha_n [u' \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n x_0' \operatorname{Cosh} \alpha_n u' \\
 &\quad + \{\xi \operatorname{Cosh} \alpha_n \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n x_0' - (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Sinh} \alpha_n x_0'\} \operatorname{Sinh} \alpha_n u']
 \end{aligned}$$

従て(7)式の第一式は次の如く書換ふることを得。

$$\left. \begin{aligned}
 0 \leq x \leq x_0 - u \text{ のとき} \\
 \zeta = \frac{4pb^4}{N} \sum_n \frac{Y_n}{n^4 \pi^4 \operatorname{Sinh}^2 \alpha_n} \left[ \begin{aligned}
 &2 \operatorname{Sinh} \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n u' \\
 &+ \alpha_n \operatorname{Cosh} \alpha_n \{ -u' \operatorname{Cosh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n u' \\
 &+ [x_0' \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi - \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n (1-x_0') \operatorname{Cosh} \alpha_n \xi] \operatorname{Sinh} \alpha_n u' \} \\
 &+ \alpha_n \{ u' \operatorname{Cosh} \alpha_n u' \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n x_0' \\
 &+ [\xi \operatorname{Cosh} \alpha_n \xi \operatorname{Cosh} \alpha_n x_0' - (1-x_0') \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \operatorname{Sinh} \alpha_n x_0'] \operatorname{Sinh} \alpha_n u' \} \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned} \right\}$$

公式(7)の第二及び第三式も類似の式に變形することを得。

公式(8)に於て、 $p = \frac{P'}{4uv}$  と置けば

$$\lim_{u' \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sinh} \alpha_n u'}{u'} = \alpha_n, \quad \lim_{u' \rightarrow 0} \operatorname{Cosh} \alpha_n u' = 1$$

なる關係に依り、第二圖に示す如き線荷重に對しては

$$\begin{aligned}
 \zeta = \frac{Pb^3}{Nv} \sum_n \frac{Y_n}{n^4 \pi^4 \operatorname{Sinh}^2 \alpha_n} \left[ \begin{aligned}
 &\{ \operatorname{Sinh} \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') - \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n x_0' \} \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \\
 &+ \alpha_n x_0' \{ \operatorname{Cosh} \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') + \operatorname{Sinh} \alpha_n x_0' \} \operatorname{Sinh} \alpha_n \xi \\
 &- \alpha_n \xi \{ \operatorname{Cosh} \alpha_n \operatorname{Cosh} \alpha_n (1-x_0') - \operatorname{Cosh} \alpha_n x_0' \} \operatorname{Cosh} \alpha_n \xi \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

荷重の分布せる直線又は其の延長上の點に對しては、上式中

$$\xi = x_0'$$

と置けば可なり。即ち

$x = x_0$  のとき (第四圖参照)

$$\left. \begin{aligned}
 \zeta &= \frac{Pb^3}{Nv} \sum_n \frac{Y_n}{n^4 \pi^4 \operatorname{Sinh}^2 \alpha_n} \left[ \begin{aligned}
 &\{ \operatorname{Sinh} \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-x_0') - \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n x_0' \} \operatorname{Sinh} \alpha_n x_0' \\
 &- \alpha_n x_0' \operatorname{Sinh} \alpha_n \operatorname{Sinh} \alpha_n (1-2x_0') \end{aligned} \right] \\
 &= \frac{Pb^3}{4Nv} \sum_n \frac{\operatorname{Sinh} \alpha_n - \alpha_n}{n^4 \pi^4 \operatorname{Cosh}^2 \frac{\alpha_n}{2}} Y_n \quad \left( \frac{x_0}{\alpha} = x_0' = \frac{1}{2} \text{ のとき} \right) \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned} \right\}$$

公式(9)及び(10)に於て、 $\frac{Y_n}{v}$  の代りに

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{Y_n}{v} = \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} y$$

と置けば、第三圖に示す如き集中荷重を受くる平板の  $0 \leq x \leq a_0$  及び  $x = a_0$  に對する  $\zeta$  の式となる。

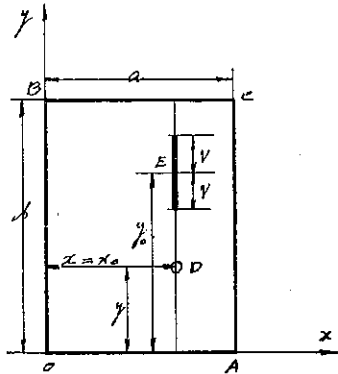
又公式 (9) に於て

$$a_0' = \frac{1}{2}$$

とすれば、運算の結果

$$\zeta = \frac{Pb^3}{4Nv} \sum_n \frac{Y_n}{n^4 \pi^4 \text{Cosh}^2 \frac{\alpha_n}{2}} \left\{ \left( 2 \text{Cosh} \frac{\alpha_n}{2} + \alpha_n \text{Sinh} \frac{\alpha_n}{2} \right) \text{Sinh} \alpha_n \xi - 2 \alpha_n \xi \text{Cosh} \frac{\alpha_n}{2} - \text{Cosh} \alpha_n \xi \right\} \dots \dots \dots (11)_a$$

第四圖



之れ線荷重が  $x$  軸に直角なる矩形の對稱線上に在るときの撓度の式にして、 $y$  軸を該對稱線上に移せば、上式  $\xi$  の代りに  $\left( \frac{1}{2} + \xi \right)$  と置くこととなるを以て、 $\zeta$  は次の如く表はさるべし。

$$\zeta = \frac{Pb^3}{4Nv} \sum_n \frac{Y_n}{n^4 \pi^4 \text{Cosh}^2 \frac{\alpha_n}{2}} \left\{ 2 \text{Cosh} \frac{\alpha_n}{2} \text{Sinh} \alpha_n \left( \frac{1}{2} + \xi \right) - \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n \xi - 2 \alpha_n \xi \text{Cosh} \frac{\alpha_n}{2} - \text{Cosh} \alpha_n \left( \frac{1}{2} + \xi \right) \right\} \dots \dots \dots (11)_b$$

此の式は稻田博士が九州帝國大學工學彙報第五卷第五號に發表せられたる“對稱線上に線荷重の作用を受くる矩形平板の解法”に於ける公式中  $a$  と  $b$  及び  $x$  と  $y$  とを取換へたるものと全く同一の式なることを證明し得べし。

普通の桁は矩形平板の特別の場合なるが故に、公式 (1) 乃至 (11) より桁に對する撓度の式を誘導することを得べし。例へば公式 (4) に於て、

$$v = \frac{b}{2}$$

とし、且つ  $x$  軸を之れに並行なる矩形の對稱線上に移せば

$$\zeta = \frac{8Pa^3}{Nb} \sum_{\substack{m=1,2,3,4,\dots,\infty \\ n=1,3,5,7,\dots,\infty}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 \pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin n\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{y_0}{b} \right) \sin n\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{b} \right)$$

上式中  $P/b$  は  $b$  の如何に拘はらず常に一定の値  $P'$  に等しきものとすれば、

$$\text{Lim}_{b \rightarrow \infty} \zeta = \frac{8P'a^3}{N} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{m^4 n \pi^5} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2P'a^3}{N} \sum_n \frac{1}{m^2 \pi^4} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \dots \quad \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} = \frac{1}{4} \\
 &= \frac{P'a^3}{N} \sum_m \frac{1}{m^4 \pi^4} \left\{ \cos m\pi \left( \frac{x_0}{a} - \frac{x}{a} \right) - \cos m\pi \left( \frac{x_0}{a} + \frac{x}{a} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

前論公式(16)の第四式に依り、上記右邊の無限級數の總和を求むれば運算の結果次の如くなる。

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \zeta = \frac{P'a^3}{6N} \frac{x}{a} \left( 1 - \frac{x_0}{a} \right) \left( \frac{2x_0}{a} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad 0 \leq x \leq x_0$$

$N$  を桁に對する撓曲剛率  $EI$  と見做せば、上式は一端よりの距離  $x_0$  なる點に一つの集中荷重を受くる單桁 (simple beam) の撓度の式に外ならず。

第五圖

### 3. 彈性基礎に接する平板及び桁

平板の一侧が  $B$  なる Bettungsziffer を有する彈性基礎に接するときは、其の撓曲方程式は、(2) 式の代りに一般に

$$\Delta \Delta \zeta = p - B \zeta \dots \dots \dots (12)$$

ならざるべからず。故に撓度の式を

$$\zeta = \frac{pa^4}{N} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

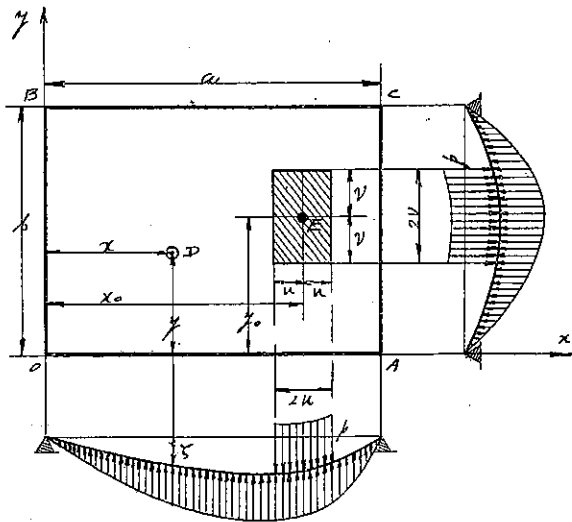
として(12)式に當てはむれば、運算の結果  $A_{mn}$  は次の如くなるを知るべし。

$$A_{mn} = \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \left( \rho_{mn} + \frac{L^4 \alpha^4}{\pi^4} \right)}, \quad L^4 \equiv \frac{B}{N}$$

$$\begin{aligned}
 \text{但し} \quad \rho_{mn} + \frac{L^4 \alpha^4}{\pi^4} &= \left( m^2 + \frac{\alpha n^2}{\pi^2} \right)^2 + \frac{L^4 \alpha^4}{\pi^4} \\
 &= \left( m^2 + \lambda n^2 \frac{\alpha n^2}{\pi^2} \right) \left( m^2 + \lambda' n^2 \frac{\alpha n^2}{\pi^2} \right)
 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\lambda n^2 = 1 + i \frac{L^2 \alpha^2}{\alpha n^2}, \quad \lambda' n^2 = 1 - i \frac{L^2 \alpha^2}{\alpha n^2}$$

従てこの式は、公式(1)中の  $\rho_{mn}$  の代りに上式に示す  $\left( \rho_{mn} + \frac{L^4 \alpha^4}{\pi^4} \right)$  を用ふれば可なり。



前論公式 (24), (27) 及び (28) 等に依り次の如き關係を求むることを得べし。

$$\sum_m \frac{\sin m\pi\theta}{m\pi^5 \left( \rho_{m1} + \frac{L^4 a^4}{\pi^4} \right)} = \sum_m \frac{\sin m\pi\theta}{m\pi^5 \left( m^2 + \lambda_n^2 \frac{\alpha_n^2}{\pi^2} \right) \left( m^2 + \lambda'_n{}^2 \frac{\alpha_n^2}{\pi^2} \right)} = \frac{1}{4\alpha_n^4} \left\{ H_{n\theta} + \frac{2(1-\theta)}{1 + \frac{L^4 a^4}{c\pi^4}} \right\}$$

但し、

$$H_{n\theta} = \frac{\frac{1}{K_n K'_n} P_{n\theta} + 2Q_{n\theta}}{\left( 1 + \frac{L^4 a^4}{\alpha_n^4} \right) (\text{Cosh} 2K_n \alpha_n - \text{cos} 2K'_n \alpha_n)}$$

$$P_{n\theta} = \text{Sinh} K_n \alpha_n \theta \sin K'_n \alpha_n (2-\theta) - \text{Sinh} K'_n \alpha_n (2-\theta) \sin K_n \alpha_n \theta$$

$$Q_{n\theta} = \text{Cosh} K_n \alpha_n \theta \cos K'_n \alpha_n (2-\theta) - \text{Cosh} K'_n \alpha_n (2-\theta) \cos K_n \alpha_n \theta$$

$$K_n = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{L^4 a^4}{\alpha_n^4}} + 1 \right)}, \quad K'_n = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{L^4 a^4}{\alpha_n^4}} - 1 \right)}$$

} \dots (14)

又

$$\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$= \frac{1}{4} \{ \sin m\pi(x_0' - u' + \xi) - \sin m\pi(x_0' - u' - \xi) - \sin m\pi(x_0' + u' + \xi) + \sin m\pi(x_0' + u' - \xi) \}$$

なるを以て、 $x_0 - u \leq x \leq x_0 + u$  に對しては

$$\begin{aligned} x_0' - u' + \xi &\equiv \theta_1, & -x_0' + u' + \xi &\equiv \theta_2 \\ x_0' + u' + \xi &\equiv \theta_3, & x_0' + u' - \xi &\equiv \theta_4 \end{aligned}$$

と置けば、運算の結果  $\xi$  は次式を以て表はさるべし。

$x_0 - u \leq x \leq x_0 + u$  のとき、

$$\xi = \frac{p}{NL^4} \sum_n \frac{Y_n}{n\pi \left( 1 + \frac{n^4 \pi^4}{b^4 L^4} \right)} \left\{ 4 + \frac{\frac{1}{K_n K'_n} (P_{n\theta_1} + P_{n\theta_2} - P_{n\theta_3} + P_{n\theta_4}) + 2(Q_{n\theta_1} + Q_{n\theta_2} - Q_{n\theta_3} + Q_{n\theta_4})}{\text{Cosh} 2K_n \alpha_n - \text{cos} 2K'_n \alpha_n} \right\}$$

\dots (15)

之れ第五圖の如き平板の荷重の分布面積内の任意の點に於ける撓度の式にして、各  $P_{n\theta}$  及び  $Q_{n\theta}$  は公式 (14) に示すが如し。特に

$$x_0' = u' = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_0}{b} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2} \quad \text{なるときは}$$

$$Y_n = \sin \frac{n\pi}{b} y$$

にして

$$\begin{aligned} P_{n\theta_1} + P_{n\theta_2} - P_{n\theta_3} + P_{n\theta_4} &= 2 \{ \text{Sinh} K_n \alpha_n \xi \sin K'_n \alpha_n (2-\xi) - \text{Sinh} K'_n \alpha_n (2-\xi) \sin K_n \alpha_n \xi \\ &\quad - \text{Sinh} K_n \alpha_n (1+\xi) \sin K'_n \alpha_n (1-\xi) + \text{Sinh} K'_n \alpha_n (1-\xi) \sin K_n \alpha_n (1+\xi) \} \\ &= -4 \{ \text{Cosh} K_n \alpha_n - \text{cos} K'_n \alpha_n \} \{ \text{Sinh} K_n \alpha_n (1-\xi) \sin K'_n \alpha_n \xi + \text{Sinh} K'_n \alpha_n \xi \sin K_n \alpha_n (1-\xi) \} \\ Q_{n\theta_1} + Q_{n\theta_2} - Q_{n\theta_3} + Q_{n\theta_4} &= -4 \{ \text{Cosh} K_n \alpha_n - \text{cos} K'_n \alpha_n \} \{ \text{Cosh} K_n \alpha_n (1-\xi) \cos K'_n \alpha_n \xi + \text{Cosh} K'_n \alpha_n \xi \cos K_n \alpha_n (1-\xi) \} \\ \text{Cosh} 2K_n \alpha_n - \text{cos} 2K'_n \alpha_n &= 2(\text{Cosh} K_n \alpha_n - \text{cos} K'_n \alpha_n)(\text{Cosh} K_n \alpha_n + \text{cos} K'_n \alpha_n) \end{aligned}$$



なるを以て (15) 式は次の如く表はさる。

$$\zeta = \frac{4p}{NL^4} \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{b} y}{n\pi \left(1 + \frac{n^4 \pi^4}{L^4 b^4}\right)} \left\{ 1 - \frac{1}{2K_n K_n'} \frac{\Delta_{n\xi} + \Delta_{n'\xi}}{\text{Cosh } K_n \alpha_n + \text{cos } K_n' \alpha_n} \right\} \dots (16)$$

但し  $\Delta_{n\xi} = \text{Sinh } K_n \alpha_n (1 - \xi) \sin K_n' \alpha_n \xi + \text{Sinh } K_n \alpha_n \xi \sin K_n' \alpha_n (1 - \xi)$   
 $\Delta_{n'\xi} = \text{Cosh } K_n \alpha_n (1 - \xi) \cos K_n' \alpha_n \xi + \text{Cosh } K_n \alpha_n \xi \cos K_n' \alpha_n (1 - \xi)$

之れ満載等布荷重を受け、一側が弾性基礎に接する矩形平版の撓度に關する公式なり。

座標軸の原点を  $(0, \frac{b}{2})$  に移せば、上式中の  $\sin \frac{n\pi}{b} y$  の代りに  $(-1)^n \cos \frac{n\pi}{b} y$  と置かさるべからず。而して

$$\lim_{b \rightarrow \infty} K_n \alpha_n = \lim_{b \rightarrow \infty} K_n' \alpha_n = \frac{La}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n\xi}}{2K_n K_n'} = 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \Delta_{n\xi}' = \text{Cosh } \frac{La}{\sqrt{2}} (1 - \xi) \cos \frac{La}{\sqrt{2}} \xi + \text{Cosh } \frac{La}{\sqrt{2}} \xi \cos \frac{La}{\sqrt{2}} (1 - \xi)$$

なるが故に

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \zeta = \frac{4p}{NL^4} \left\{ 1 - \frac{\text{Cosh } \frac{La}{\sqrt{2}} (1 - \xi) \cos \frac{La}{\sqrt{2}} \xi + \text{Cosh } \frac{La}{\sqrt{2}} \xi \cos \frac{La}{\sqrt{2}} (1 - \xi)}{\text{Cosh } \frac{La}{\sqrt{2}} + \cos \frac{La}{\sqrt{2}}} \right\} \dots (17)$$

を得べし。是満載等布荷重を受くる單桁が其の一側に於て弾性基礎に接する場合の撓度の式なり。

### 4. 彎曲力率

$x$  軸に直角なる斷面の單位幅に生ずる彎曲力率は一般に

$$M_x = -N \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

但し  $\mu = \text{Poisson's number}$

を以て表はさるゝが故に、第一圖に示す如き矩形平版に對しては次の公式を得べし。

$0 \leq x \leq x_0 - u$  のとき、

$$M_x = pb^2 \sum_n \frac{Y_n}{n^3 \pi^3} \left[ H_n(x_0' - u' + \xi) - H_n(x_0' - u' - \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) + H_n(x_0' + u' - \xi) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \left\{ H_n(x_0' - u' + \xi) - H_n(x_0' - u' - \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) + H_n(x_0' + u' - \xi) \right\} \right]$$

$x_0 - u \leqq x \leqq x_0 + u$  のとき,

$$M_x = p\delta^2 \sum_n \frac{Y_n}{n^3 \pi^3} \left[ H_n'(x_0' - u' + \xi) + H_n'(-x_0' + u' + \xi) - H_n'(x_0' + u' + \xi) + H_n'(x_0' + u' - \xi) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \left\{ 4 + H_n(x_0' - u' + \xi) + H_n(-x_0' + u' + \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) + H_n(x_0' + u' - \xi) \right\} \right]$$

$x_0 + u \leqq x \leqq a$  のとき,

$$M_x = p\delta^2 \sum_n \frac{Y_n}{n^3 \pi^3} \left[ H_n'(x_0' - u' + \xi) + H_n'(-x_0' + u' + \xi) - H_n'(x_0' + u' + \xi) - H_n'(-x_0' - u' + \xi) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \left\{ H_n(x_0' - u' + \xi) + H_n(-x_0' + u' + \xi) - H_n(x_0' + u' + \xi) - H_n(-x_0' - u' + \xi) \right\} \right]$$

..... (18)

上式中各  $H_n$  は公式 (6) に示す如くにして, 各  $H_n'$  は次式を以て表はさるべし (前論公式 (26) の第 3 式参照)。

$$H'_{n\theta} = \frac{\alpha_n}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ \epsilon \text{Cosh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1 - \theta) - (1 - \theta) \text{Sinh} \alpha_n \theta \right\} \dots \dots \dots (19)$$

第六圖の如き方形平板の  $E$  及び  $F$  點に於ける  $M_x$  を夫々  $M_{xE}$  及び  $M_{xF}$  を以て表せば, 公式 (18) の第二式より次の結果を得べし。

$$M_{xF} = \frac{P}{2u'^2} \sum_n \frac{\sin n\pi u'}{n^2 \pi^2} \left[ \left\{ \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{4} \text{Sech}^2 \frac{n\pi}{2} - u'\right) + \frac{\text{Tanh} \frac{n\pi}{2}}{\mu n \pi} \right\} \text{Sinh} 2n\pi u' \right. \\ \left. + \left\{ u' \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \text{Tanh} \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{\mu n \pi} \right\} \text{Cosh} 2n\pi u' + \frac{1}{\mu n \pi} \right]$$

$$M_{xE} = \frac{P}{2u'^2} \sum_n \frac{\sin n\pi u'}{n^2 \pi^2} \left[ \left\{ \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{2} \text{Sech}^2 \frac{n\pi}{2} - u'\right) + \frac{2 \text{Tanh} \frac{n\pi}{2}}{\mu n \pi} \right\} \text{Sinh} n\pi u' \right. \\ \left. + \left\{ u' \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \text{Tanh} \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{\mu n \pi} \right\} \text{Cosh} n\pi u' + \frac{2}{\mu n \pi} \right]$$

..... (20)

但し  $u' = \frac{u}{a}, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots \dots \dots \infty$

$P=1$  なるときは,  $u'$  の種々の値に對する  $M_{xF}$  及び  $M_{xE}$  の値は第一表及び第七圖に示すが如し。

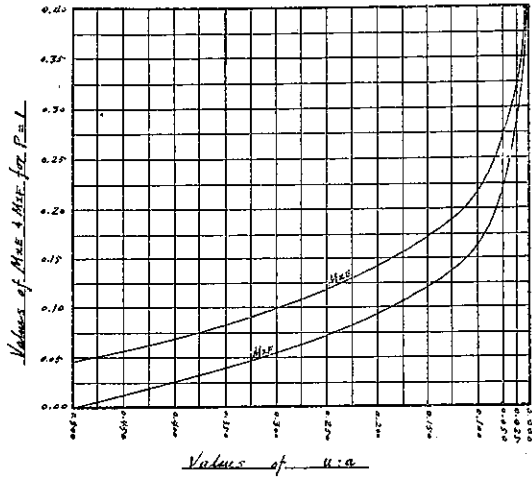
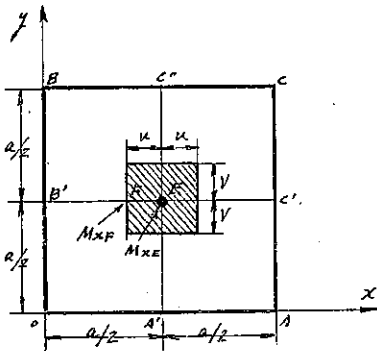
第 一 表

$u'$	彎 曲 力 率	
	$M_{xF}$	$M_{xE}$
0.500	0.00000	0.04598
0.400	0.02565	0.06935
0.300	0.05418	0.09886

0.250	0.07133	0.11789
0.200	0.09270	0.14105
0.150	0.12060	0.17143
0.100	0.16071	0.21363
0.050	0.22858	0.27837
0.025	0.28587	0.32384

第七圖

第六圖



(18) 式の第二式より，一つの集中荷重が矩形の中心點に作用するときは，該點に於ける彎曲力率  $M_w$  は次式を以て表はさるべし。

$$M_w = \frac{P}{2} \sum_{n=1,3,5,7,\dots,\infty} \frac{1}{n\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \text{Tanh} \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \alpha_n \text{Sech}^2 \frac{\alpha_n}{2} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

上式中

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n\pi} \text{Tanh} \frac{\alpha_n}{2} &= \frac{1}{\pi} \left( \text{Tanh} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3} \text{Tanh} \frac{3\pi a}{2b} + \frac{1}{5} \text{Tanh} \frac{5\pi a}{2b} + \dots \dots \dots \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Tanh} \frac{\pi a}{2b} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{\text{Tanh} \frac{3\pi a}{2b}}{\text{Tanh} \frac{\pi a}{2b}} + \frac{1}{5} \frac{\text{Tanh} \frac{5\pi a}{2b}}{\text{Tanh} \frac{\pi a}{2b}} + \dots \dots \dots \right) \end{aligned}$$

然るに

$$1 < \frac{\text{Tanh} \frac{3\pi a}{2b}}{\text{Tanh} \frac{\pi a}{2b}} < \frac{\text{Tanh} \frac{5\pi a}{2b}}{\text{Tanh} \frac{\pi a}{2b}} < \dots \dots \dots$$

にして、且つ

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \text{divergent}$$

$$\therefore \sum \frac{1}{n\pi} \text{Tanh} \frac{\alpha n}{2} = \text{divergent}$$

従て  $P$  の作用點に於ける  $M_x$  は無限大となり、(21)<sub>a</sub> 式を用ふるも其の數値を計算すること能はざるを知るべし (第3頁参照)。

(21)<sub>a</sub> 式を書き換ふれば、

$$M_x = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \sum \frac{1}{n\pi} + \frac{P}{2} \sum \frac{1}{n\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{\alpha n}{2 \text{Cosh}^2 \frac{\alpha n}{2}} - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \left(1 - \text{Tanh} \frac{\alpha n}{2}\right) \right\}$$

此の式の第二項は convergent にして、

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \mu = \frac{10}{3}$$

に對しては次の如くなる。

$$M_x = \frac{P}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \sum \frac{1}{n} + 0.0106997P \dots \dots \dots (21)$$

此の式は (21)<sub>a</sub> 式と同様 divergent なること明かなるも、後段記載の平圓版に對する對應式と比較せむため特に公式として掲記せり。

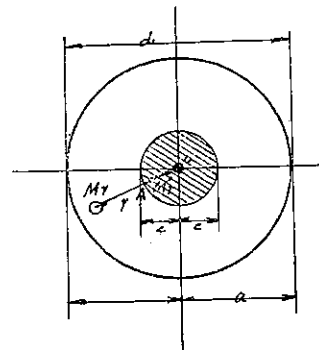
### 5. 平圓版の彎曲力率並に之れと矩形平板の彎曲力率との比較

第八圖に示す如き平圓版が其の周圍に於て單純に支承せられ、 $c$  なる半径を有する同心圓内に一樣に分布せらるゝ荷重を受くるときは、任意の點に於ける radial bending moment は次式を以て表はさるべし。\*

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{a^2}\right) \right\}, & r \geq c \\ M_{r'} &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \ln \frac{a}{r} + 1 - \frac{c^2}{4a^2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - \frac{r^2}{4c^2} \left(3 + \frac{1}{\mu}\right) \right\}, & r \leq c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

又荷重の分布せる小圓の周圍及び其の中心點に於ける radial bending moment を夫々  $M_{ra}$  及び  $M_{r'o}$  とすれば

第八圖



\* A. Nadai: Elastische Platten, S. 59.

$$\begin{aligned}
 M_{rA} &= M'_{rA} = \frac{P}{4\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \ln \frac{a}{c} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \right\} \\
 &= P \left\{ 0.23820 \log_{10} \frac{a}{c} + 0.01393 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \right\} \\
 M'_{r0} &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \ln \frac{a}{c} + 1 - \frac{c^2}{4a^2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \right\}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \mu = \frac{10}{3} \dots\dots\dots (23)$$

上式第一又は第二式に依り、與へられたる  $P, a$  及び  $c$  等に対する  $M_{rA}$  を計算すれば、任意の  $r$  (但し  $r \leq c$ ) に對する  $M'_r$  は次式に依りて計算するが便利なり。

$$\begin{aligned}
 M'_r &= M_{rA} + \frac{P}{16\pi} \left(3 + \frac{1}{\mu}\right) \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) \\
 &= M_{rA} + \frac{P}{16\pi} \left(3 + \frac{1}{\mu}\right) \quad (r=0 \text{ のとき}) \\
 &= M_{rA} + 0.06565 \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) \quad \left(\mu = \frac{10}{3} \text{ のとき}\right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$P=1, 2a=d$  とし、 $c/d$  及び  $r/d$  の種々の値に對する  $M_{rA}$  及び  $M'_r$  の値を計算すれば第二表及び第九圖の如し。

第二表 Values of  $M'_r$  for different values of  $\frac{r}{d}$  and  $\frac{c}{d}$

$\frac{r}{a}$	$\frac{r}{d}$	$\frac{c}{d}=0.5$	$\frac{c}{d}=0.4$	$\frac{c}{d}=0.3$	$\frac{c}{d}=0.25$	$\frac{c}{d}=0.20$
1.000	0.500	0.00000	—	—	—	—
0.800	0.400	0.02363	0.02810	—	—	—
0.600	0.300	0.04202	0.05682	0.06176	—	—
0.500	0.250	0.04924	0.06811	0.08182	0.08215	—
0.400	0.200	0.05515	0.07734	0.09823	0.10578	0.10649
0.300	0.150	0.05974	0.08452	0.11100	0.12417	0.13521
0.200	0.100	0.06303	0.08965	0.12012	0.13730	0.15573
0.100	0.050	0.06499	0.09273	0.12558	0.14518	0.16804
0.050	0.025	0.06549	0.09350	0.12696	0.14715	0.17112
0.000	0.000	0.06565	0.09375	0.12741	0.14780	0.17214

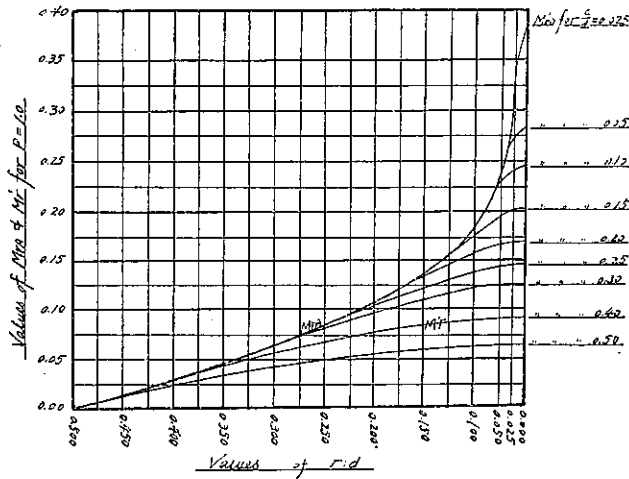
$\frac{r}{a}$	$\frac{r}{d}$	$\frac{c}{d}=0.15$	$\frac{c}{d}=0.10$	$\frac{c}{d}=0.05$	$\frac{c}{d}=0.025$	$\frac{c}{d}=0.000$
1.000	0.500	—	—	—	—	—
0.800	0.400	—	—	—	—	—
0.600	0.300	—	—	—	—	—
0.500	0.250	—	—	—	—	—
0.400	0.200	—	—	—	—	—

$\frac{r}{a}$	$\frac{r}{d}$	$\frac{c}{d}=0.15$	$\frac{c}{d}=0.10$	$\frac{c}{d}=0.05$	$\frac{c}{d}=0.025$	$\frac{c}{d}=0.000$
0.300	0.150	0.13722	—	—	—	—
0.200	0.100	0.17369	0.17987	—	—	—
0.100	0.050	0.19558	0.22910	0.25199	—	—
0.050	0.025	0.20105	0.24142	0.30123	0.32380	—
0.000	0.000	0.20287	0.24552	0.31764	0.38935	0.55598

備考：上表中縦行の最上端の数字は夫々之れに對應せる  $\frac{r}{d}$  及び  $\frac{c}{d}$  に對する  $M_{r,A}$  の値となる。

第一表と第二表とを比較するに、荷重の分布面積の中心點に於ける方形平板の彎曲力率  $M_{r,E}$  と平圓版の彎曲力率  $M_{r,o'}$  との差は、分布面積が小なる程小くなることを知るべし。例へば、 $w' = \frac{c}{d} = 0.5$ 、即ち荷重が平板の全面に分布せるときは

第九圖



$$100 \frac{M_{r,o'} - M_{r,E}}{M_{r,o'}} = 100 \times \frac{0.06565 - 0.04598}{0.06565} = 30.0\%$$

$w' = \frac{c}{d} = 0.025$  のときは

$$100 \frac{M_{r,o'} - M_{r,E}}{M_{r,o'}} = 100 \times \frac{0.38935 - 0.32384}{0.38935} = 16.8\%$$

なるが如し。而して公式 (22) の第二式より

$$\begin{aligned} (M'_{r'})_{r=c} = M_{r,A} &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \ln \frac{a}{c} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \right\} \\ &= \frac{P}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \left\{ \frac{a-c}{a+c} + \frac{1}{3} \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^5 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{P}{16\pi} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore \lim_{c \rightarrow 0} M_{r,1} = \lim_{c \rightarrow 0} M_{r,0}' = \frac{P}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \sum \frac{1}{n} + 0.0139168P \quad \left(\mu = \frac{10}{3} \text{ のとき}\right)$$

此の式の右邊は方形平版に對する公式 (21) と殆ど同じく、唯其の第二項の係數に於て

$$100 \times \frac{0.0139168 - 0.0106997}{0.0139168} = 23.1\%$$

の誤差あるに過ぎず。更に平圓版に對する荷重  $P$  の  $\pi c^2$  内に分布せらるゝ強度をして方形版に對する  $P$  の  $4u^2$  内に分布せらるゝ強度と等しからしむるためには、上記の係數 0.0139168 は

$$0.0139168 \times \frac{\pi}{4} = 0.0109302$$

となり、平圓版の  $\lim_{c \rightarrow 0} M_{r,0}'$  と方形版の  $\lim_{c \rightarrow \infty} M_{r,0}$  との差の百分率は僅かに

$$100 \times \frac{0.0109302 - 0.0106997}{0.0109302} = 2\%$$

に過ぎざるべし。之れに依り、平版の中心點の周りに分布せらるゝ荷重に依りて生ずる最大彎曲力率は、其の分布面積が平版の dimension に比して極めて小なるときは、方形版に對するものと圓版に對するものとは相等しと見做すも實用上大なる誤差を生ぜざることを知るべし。

## 6. 集中荷重を受くる矩形平版

吾人の日常遭遇する所謂集中荷重は、常に或る小面積  $A$  内に分布せらるゝものにして其の分布面積が數學的に零なる如きものは實際上殆ど絶無なりと謂ふことを得るのみならず、其の強度  $P/A$  が、少くとも之れを受くる材料の抗壓強度を超過せざる丈の  $A$  を與ふるを要すること論を俟たず。而して荷重の分布面積が零なる如き平版の撓曲面は、前各項に記述せる所に依りて明かなる如く、荷重の作用點に於て必ず Singularität を惹起し、該點に於ける應力は無限大となり、之れを算定するの途なし。依つて從來斯の如き平版の解説に當り、荷重  $P$  は常に或る小面積 (圓又は矩形) 内に分布せらるゝものと假定せるは蓋し止むを得ざる手段たるのみならず實用上何等の支障を生ぜざるものとす。\*

斯の如き荷重を以て實用上所謂集中荷重と見做す以上は、之れに對する撓度、彎曲力率、その他の應力は、部分的分布荷重を受くる Navier 氏の公式より誘導せる著者の公式 (7) 乃至 (20) に於て、 $u$  及び  $v$  を適當に定むることに依り算定することを得べし。

\* 稻田博士著“四邊に於て支持せらるゝ矩形平面版の研究”(本誌第十四卷第四號所載) 参照

7. 著者の公式の一般性

著者は本誌第十六卷第十號に“二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる矩形平板の一解法”と題し、矩形の兩軸の方向の彎曲剛率  $B_1, B_2$ , 扭剛率  $2c$ , 荷重  $p_{xy}$  及び周邊の條件(但し同論第一章第五節記載の 9 種の場合)の如何に關せず適用し得る如き一般公式を誘導せり(前論公式 49, 50, 51, 58 及び 59 等参照)。而して荷重  $p_{xy}$  に関しては

$$p_{xy} = p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

の如く、Fourier の級數に展開し得るものなることを限定し、其の特別の場合として、 $p_{xy}$  が平板の全面に等布的若くは等變的に分布せらるゝものに就き論述せるも、部分的分布荷重又は集中荷重に對して何等言及する所なかりき。

本論に於ては、四邊に於て單純に支承せらるゝ isotropic rectangular plate が、其の任意の位置に於て部分的等布荷重を受くる場合に就き論述せるものにして、前論記載の各公式は、荷重  $p_{xy}$  が Fourier の級數に展開し得るものたる以上は、其の分布面積が平板の全面なると若くは一部分なることを問はず最も普遍的に適用し得るものなることは、又本論の説述せる所に依り明かなり。

普通の矩形平板に於て最も多く遭遇する荷重は、第十圖に示す如き部分的等變荷重の特別の場合と見做し得るもの多し。

今荷重の強度  $p_{xy}$  は

$$x_0 - u \leq x \leq x_0 + u \quad \text{及び} \quad y_0 - v \leq y \leq y_0 + v$$

なる範圍に於て

$$\begin{aligned} p_{xy} &= pf(x, y) = p \left( 1 + \alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} \right) \\ &= p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

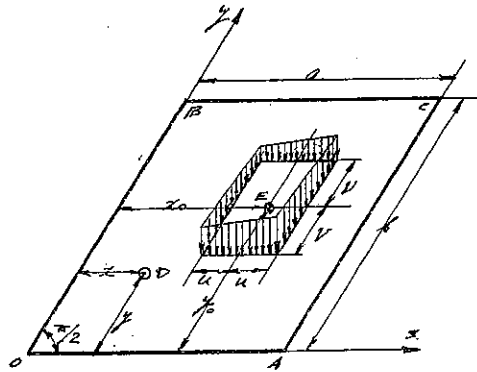
を以て表はさるゝものとすれば

$$R_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x_0-u}^{x_0+u} \int_{y_0-v}^{y_0+v} f(x, y) dx dy$$

に依り次の如き結果を得べし。

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \frac{16}{m\pi n^2} \left[ \left( 1 + \alpha \frac{x_0}{a} + \beta \frac{y_0}{b} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{a} u \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v \right. \\ &\quad - \frac{\alpha u}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x_0 \cos \frac{m\pi}{a} u \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v \\ &\quad \left. - \frac{\beta v}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \cos \frac{n\pi}{b} y_0 \cos \frac{n\pi}{b} v \right] \end{aligned}$$

第十圖





$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v \\
& + \frac{\beta}{n\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{m\pi}{a} u \cos \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{n\pi}{b} v \quad ] \dots\dots\dots(25)
\end{aligned}$$

前論公式の  $R_{mn}$  の代りに (25) 式に示すものを用ふれば、第十圖の如き部分的等變荷重を受くる矩形平版に對する公式を與ふるのみならず、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $x_0$ ,  $u$ ,  $y_0$  及び  $v$  等を適當に取ることに依り矩形の全面に分布せらるゝ等布又は等變荷重、若くは集中荷重を受くる場合の各公式を得べし。(終)